وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ابن خلدون – تيارت –
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية و علوم التسيير
قسم العلوم الإقتصادية

محاضرات في مقياس بحوث العمليات

مطبوعة موجهة إلى طلبة السنة أولى ماستر
تخصص إقتصاديات العمل

إعداد الدكتور:عابد علي

السنة الجامعية: 2023/2022

قائمة المحتويات:

نشأة وتطور بحوث العمليات

1-نشأة وتطور بحوث العمليات: يمكن تقسيم مراحل تطور بحوث العمليات إلى ثلاث مراحل وهي

المرحلة الأولى (مرحلة ما قبل الحرب العالمية الثانية): تعود جذور بحوث العمليات إلى عام 1885م،ذ ركز **فريدريك تايلور(F.Taylor)** على تطبيق التحليل العلمي على الأنشطة الإنتاجية، من خلال قيامه بتجارب عديدة للتوصل إلى الحمولة الملائمة من مادة معينة ليتمكن العامل من جرف أكبر كمية ممكنة منها باستخدام الجرافة وبأقل ما يمكن من الجهد، وبعد قيامه بسلسلة من التجارب استطاع تايلور التوصل إلى مبتغاة.

ساهم العالم **هنري جانت (Henry.L.Gantt)** أيضا في وضع اللبنات الأولى لهذا العلم، إذ توصل إلى أسلوب علمي لجدولة العمل، من خلال خارطة عرفت باسمه وهي خارطة جانت لتخطيط أساليب تحميل المكائن من اجل تقليل أية تأخيرات يمكن أن تحدث في العملية الإنتاجية، وعلى إثره يتم تحديد وقت تسليم المنتج بشكل دقيق.

وفي عام 1915م وضع **هاريس (F.W.Harris)** نموذجا يمثل حجم الكمية الاقتصادية المعروفة في مجال السيطرة على المخزون.

في حين نشر عالم الرياضيات الدانمركي ارلينج (A.K.Erlang) في عام 1917م مؤلفه حول المشاكل المتعلقة بكثرة المكالمات الهاتفية، ذ لم تستطع العاملات في البدالات من استلام كل المكالمات فور طلب الخدمة في فترات الذروة، مما أدى إلى حدوث تأخيرات في تلبيتها، وفي هذا الصدد، يمكن القول بأنه قد تم الاعتماد على مؤلف ايرلينج بعد عدة سنوات من قبل مكاتب البريد البريطانية من خلال الاستفادة من ملاحظاته لتقديم أفضل الخدمات البريدية إلى الزبائن.

وفي الثلاثينات من القرن المنصرم، تم تطبيق التحليل السلعي من قبل العالم الفلكي **ليفنسن (H.C.Levinson)**،إذ ركز جهوده على دراسة علمية للعادات الشرائية وسلوك المستهلكين ومدى استجابتهم لأساليب الترويج المختلفة مثل الإعلان.

وقد أثرت الثورة الصناعية بشكل كبير على تطور بحوث العمليات،إذ اتسمت الفترة السابقة لتلك الثورة بصغر حجم المنظمات،كما و أن أداء الأعمال اتسم بكونه يدويا، وطور العمل بعد ذلك من خلال إحلال المكائن محل العمل اليدوي، فضلا عن التطورات في مجالات النقل والمواصلات، مما أدى إلى صعوبة قيام المدير بمختلف الوظائف الإدارية بمفرده من التخطيط للإنتاج، المبيعات والشراء...الخ، وعليه كان لا بد من إيجاد تقسيم للوظائف الإدارية متمثلا بوظائف الإنتاج، التسويق، المالية، الأفراد والبحث والتطوير ....الخ، ومع التطور الصناعي دعت الحاجة إلى تجزئة الوظائف الرئيسية المشار إليها إلى فروع أخرى، فمثلا تم تقسيم قسم الإنتاج إلى فروع أمثال الصيانة، السيطرة على الجودة، تخطيط الإنتاج....الخ.

المرحلة الثانية خلال الحرب العالمية الثانية: تواصل تطور علم بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية من خلال استدعاء الإدارة العسكرية في بريطانيا لفريق عمل من العلماء،من اجل دراسة المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية للدفاع الجوي، تحت إشراف البروفيسور باتريك بلاكت (Patrick Blackett)، من جامعة مانشستر تكون فريق العمل من 11 عضوا، ثلاثة علماء منهم متخصصون في علم وظائف الأعضاء، واثنان في علم الرياضيات الفيزيائية، وعالم واحد في مجال الفيزياء العامة واثنان في مجال الرياضيات البحتة.

هدف الفريق إلى إيجاد أفضل توزيع للموارد العسكرية المحدودة على مختلف العمليات العسكرية، ومن ثم تطبيق بحوث العمليات للاستخدام الفاعل للرادارات وتوزيع القوة الجوية، وكان هذا الفريق هو الأول في مجال بحوث العمليات.

لقد جاءت تسمية بحوث العمليات، استنادا إلى مهمة الفريق القائمة على البحث في العمليات والمجالات العسكرية.

توصل الفريق إلى نتائج مشجعة، مما أدى إلى تشكيل فرق أخرى في كل من بريطانيا، الولايات المتحدة الأمريكية،كندا وفرنسا.

المرحلة الثالثة ما بعد الحرب العالمية الثانية: لقد أدت النتائج التي توصل إليها أثناء الحرب العالمية الثانية إلى تشجيع المدراء الصناعيين الباحثين عن الحلول للمشاكل التي كانت تواجههم للاهتمام بهذا العلم، ففي بريطانيا وبعد انتهاء الحرب العالمية الثانية انتقل استخدام بحوث العمليات من المجال العسكري إلى مجالات أخرى كالصناعة، الاجتماع، والاقتصاد إذ كان الاقتصاد البريطاني يواجه حالة ركود اقتصادي حاد، مما تطلب البحث عن أساليب جديدة لزيادة فاعلية الإنتاج وإيجاد أسواق جديدة.

بينما كان الوضع مختلفا في الولايات المتحدة الأمريكية،إذ تم التركيز على بحوث العمليات الدفاعية، ولم يؤشر له دور كبير في المجال الصناعي، ولكن تزايد الاهتمام بعلم بحوث العمليات خلال الثورة الصناعية الثانية، على اثر اتمتتة العمليات الإنتاجية واستبدال العامل بالماكنة، وفي الخمسينات من القرن الماضي وجه الاهتمام لعلم بحوث العمليات في الجامعات الأمريكية إذ شكلت جمعية متخصصة في مجال بحوث العمليات عام 1950م وهكذا استمر تطور هذا العلم تدريجيا، من خلال الاستفادة من علم الحاسوب في حل المشكلات المتعددة التي تواجه المنظمات والمتعلقة بموضوعات خاصة ببحوث العمليات مثل البرمجة الخطية،نظرية القرارات، شجرة القرارات، التنبؤ،نماذج النقل،مشاكل التخصيص، التحليل الشبكي،نماذج المخزون، تحليل ماركوف، صفوف الانتظار، نظرية المباريات، والمحاكاة.... وغيرها للتوصل إلى القرار الأمثل.

2-مفهوم بحوث العمليات: عرف علم بحوث العمليات بتعاريف عديدة نذكر منه التالي:

فقد عرفته الجمعية الأمريكية لبحوث العمليات على انه علم تطبيقي تم تطويره لملاحظة فهم والتنبؤ بسلوك أنظمة (الرجل–الماكنة) وحل المشاكل العملية من خلاله في مختلف المجالات مثل الأعمال الحكومة والمجتمع.

وعرف أيضا على انه تطبيق الأساليب العلمية، الأدوات و التقنيات لحل مشاكل النظام لتوفير السيطرة على العمليات والتوصل إلى حلول مثالية.

وعرفه آخرون على انه مساعدة للإدارة لاتخاذ القرارات من خلال توفير المعلومات الكمية المطلوبة والمبنية على الأساليب العلمية.

3–خصائص بحوث العمليات: يمكن استنباط أهم خصائص بحوث العمليات من خلال التركيز على مفهومه، واهم تلك الخصائص

–اهتمام بحوث العمليات بالمشاكل أو بالنظام ككل، إذ أن النشاط في أي جزء من أجزاء المنظمة له تأثير على أنشطة بقية الأجزاء الأخرى فيها، إذ أن اتخاذ أي قرار في جزء ما لابد من تحديد كل التفاعلات المحتملة الخاصة بذلك الجزء وتحديد تأثيراتها على المنظمة ككل.

–اعتماد بحوث العمليات على فريق عمل من العلماء المتخصصين بعلم الرياضيات، الإحصاء،الفيزياء، والاقتصاد، مما يعزز التوصل إلى حلول اقرب ما تكون إلى الحلول المثلى.

–تطبيق الأساليب العلمية في حل المشاكل التي لازالت قيد الدراسة.

–استخدام الحاسوب في حل النماذج الرياضية المعقدة، لاحتياجها إلى حسابات متعددة، معقدة وطويلة.

–توفير معلومات كمية للإدارة للاستفادة منها والاستعانة بها في اتخاذ القرار المناسب.

–الأخذ بنظر الاهتمام العوامل الإنسانية من جهد ووقت وظروف العمل وغيرها.

4–مجالات تطبيق بحوث العمليات:نظرا لتعدد تطبيقات بحوث العمليات يصعب حصرها إلا انه يمكن ذكر التطبيقات التالية على سبيل المثال لا الحصر:

–مشكلة نقل المواد.

–مشكلة التعيين والتخصيص.

–تخطيط الإنتاج.

–تخطيط المالية.

–اختيار الميزانية العامة.

–تخطيط أنماط استهلاك الطاقة.

–تحديد المواقع الخدمية والإنتاجية.

–تخطيط رحلات الطيران والسكك الحديدية.

-التخطيط والتحكم في المخزون.

-تصميم الشبكات الكهربائية.

-تخطيط الإشارات الضوئية في الطرق.

-تخطيط شبكات الري والصرف.

-نظام صفوف الانتظار.

نظام المحاكاة.

تخطيط المشروعات.

-الصيانة والسيطرة على التكاليف.

-التنبؤ.

-السيطرة النوعية.

-تقييم المشروعات.

-ظروف المخاطرة وعدم التأكد.

1- نشأة بحوث العمليات وتطورها

يرجع بعض العلماء نشأة بحوث العمليات إلى عمل عامل البدالة الانجليزي ايرلينج Erlang 1909، حين لاحظ الازدحام على كابينة الهاتف من قبل طالبي المكالمات الهاتفية، التي حاول من خلالها أن ينشا نظرية الطوابير ويطورها، بينما بدأت حركة الإدارة العلمية في الظهور عام 1918م عندما قدم فريدريك تايلور كتابه "الإدارة العلمية" والذي دعا فيه إلى ضرورة استبدال طريقة الحكم الشخصي والتجربة والخطأ بطريقة أخرى تعتمد على البحث العلمي في كل ما يتعلق بالعمل داخل المنشاة كما نادى بتطبيق واستخدام الأسلوب العلمي في الإدارة وتطبيقه الذي يركز على جمع الحقائق وتحليلها للوصول إلى تفسير للظواهر التي يراد تحليلها.

ويعد اكتشاف بحوث العمليات امتدادا للاتجاه العلمي في الإدارة وقد جاء تطبيقها في هذا المجال متأخرا وكان من الممكن أن يستمر تأخره لولا التقدم الذي أحرزته قيادة القوات الجوية البريطانية في هذا المجال في أثناء الحرب العالمية الثانية 1939م في هذا المجال، إذ ظهرت حاجة بريطانيا الماسة إلى مساهمة العلماء في فروع العلوم المختلفة لوضع أسلوب علمي لصد الهجوم الجوي الألماني الناجح آنذاك، فقد عمل فريق من العلماء المتخصصين في بحوث العمليات في استغلال الموارد المحدودة المتاحة من القوى العاملة والمعدات للقوات البريطانية في صد العدوان الألماني الجوي وتحويل بريطانيا من موقف الدولة المدافعة إلى الدولة المهاجمة في عام 1942م، وبنهاية الحرب العالمية الثانية اهتمت بريطانيا بما توصلت إليه من علوم (من ساحة القتال، العمليات)، لتكون دولة مهاجمة بدلا من أن تكون مدافعة ثم طورت هذه العلوم وطبقتها للاستفادة منها في بقية

قطاعات الحياة المختلفة مما أدى بها إلى أن تجني ثمار ما توصلت إليه من نتائج جيدة، في كل قطاعات الحياة الاقتصادية (الصناعية، والزراعية والخدمية)، مما حمل ببقية الدول الأخرى على الاهتمام بهذا العلم ومنها الولايات المتحدة الأمريكية التي هي الأخرى استفادت من تطبيقه في قطاعات الحياة الأخرى بعد أن أسهمت في تطوير بقية ألغازه ومواصلة اكتشافها.

2-مفهوم بحوث العمليات

اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات، فقد عرف دانتزيغ بحوث العمليات "بأنها علم الإدارة أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقها"، ويعد هذا التعريف تعريفا شاملا ولا يقدم مفهوما واضحا لبحوث العمليات يميزها من غيرها من المصطلحات، فبحوث العمليات ليست علم اتخاذ القرارات وتطبيقها وإنما هي أدوات تستعمل مع غيرها من الأدوات الأخرى للمساعدة في اتخاذ القرارات.

وقد عرف واجنر Wagner بحوث العمليات "بأنها مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمشروعات"، وهذا التعريف يحدد نطاق بحوث العمليات بالإدارة العليا للمشروعات في الوقت الذي يتسع فيه نطاقها سواء أكان على نطاق الإدارة التنفيذية أم الإدارة العليا للمشروع، أما مورس وكمبال Morse and Kimball فقد عرفا بحوث العمليات "بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات" ومن هذا التعريف يمكن تحديد العناصر الرئيسية لبحوث العمليات على النحو التالي:

-استعمال الطريقة العلمية.

-الاعتماد على الأساس الكمي، مثل استعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها.

- يمكن للإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وعلى هذا الأساس يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات على أنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي وباستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها كالبرمجة الخطية والبرمجة العددية، والبرمجة غير الخطية، والتحليل الشبكي...الخ، وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

3-مساهمة بحوث العمليات مدخلا كميا في حل مشاكل الإدارة

يعد الإستخدام المباشر للأرقام الرياضية والأساليب والأدوات الكمية حلقة الوصل في هذا المدخل التي تأتي ضمن ما يسمى ببحوث العمليات وذلك لتفسير كثير من مشكلات إدارة الأعمال، يعتمد المدخل الكمي الأرقام والعلاقات الرياضية (المعادلات والمتباينات) والنماذج الرياضية أساسا لتوضيح المشكلة، في حين تعتمد المداخل الأخرى لدراسة دارة الأعمال على المقارنة والوصف والتحليل استنادا إلى أساليب البحث والاستبيان، وهذه نقطة الاختلاف الجوهرية التي تعطي المدخل الكمي سمات خاصة، إذ يعتمد هذا الأخير على عدد من الأساليب والأدوات التي تقع ضمن ما يسمى ببحوث العمليات وذلك لتحديد ما هو مطلوب انجازه في الواقع العملي

للمشكلة، فعلى سبيل المثال في مجال إدارة الإنتاج يتم تحديد المستلزمات من المواد الأولية والأيدي العاملة وأية مدخلات أخرى للعملية الإنتاجية،مع بيان ماهية المخرجات وذلك من خلال احد أساليب بحوث العمليات المحددة لهذا الغرض.

ويفسر بحوث العمليات بوصفها مدخلا كميا لدراسة المشاكل الإدارية كافة من خلال النظر للمشكلة من زاوية كمية وبعبارة أخرى تؤطر المشكلة لتكون نموذجا، وتتضح أهمية بحوث العمليات مدخلا كميا أيضا لدراسة المشاكل الإدارية في الواقع العملي لمنظمة الأعمال من خلال الأمور الآتية:

3-1 تسهم بحوث العمليات في تقريب المشكلة الإدارية في الواقع بموجب صيغ عملية مبسطة ونماذج رياضية معينة تظهر مكونات المشكلة ضمن أطر من التفكير العلمي المنظم والعقلاني.

3-2 عرض النماذج في مجموعة من العلاقات الرياضية بالشكل الذي يوضح الفرص المختلفة (البدائل) لعملية اتخاذ القرارات وبما يسهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها.

3-3 تعميم المعايير القياسية والمثالية لإتخاذ القرارات، ذلك بأن الإدارة التي تتمكن من وضع نموذج رياضي معين لمشكلة ما، تستطيع أن تطبق هذا النموذج في المستقبل عندما تواجهها مشكلة متماثلة وهكذا تدار الأعمال المختلفة في الوظائف كافة لمعالجة المشاكل في الواقع العملي.

ن التعامل مع أساليب بحوث العمليات كافة في مختلف المشاكل الإدارية في منظمة الأعمال من شانه أن يرسخ العلاقة بين هذه الأساليب وهذه المشاكل، ويمكن أن يحدث التوافق التام بين هذه الأساليب والمشاكل الإدارية عامة عند استعمال نماذج معينة تحمل مسميات متطابقة مع تلك الوظائف، كما هي الحال في استعمال نماذج النقل في دارة النقل والتسويق ونماذج الخزين في دارة المخازن...وهكذا.

4-شروط تطبيق بحوث العمليات

أن أساليب بحوث العمليات كافة يمكن أن تطبق في مختلف منظمات الأعمال الإنتاجية منها والخدمية، بشرط توفر على النحو التالي:

4-1 محدودية الموارد: وتعني أن الموارد التي تستعملها منظمة الأعمال سواء كانت ذلك في العملية الإنتاجية أم التجارية وما شابه ذلك تتصف بكونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها ، بمعنى آخر إن الموارد المتوافرة تحت تصرف منظمة الأعمال لا يوجد منها كميات كبيرة إلى درجة بحث يمكن الحصول عليها في أية لحظة ومن دون عناء وكلفة، وينطبق هذا الشرط على ما يأتي:

- الموارد المالية على نحو عام.
- الموارد البشرية ذات الكفاءة المالية والمتخصصة.

– الموارد الأولية التي يتم الحصول عليها مقابل ثمن وتؤلف نسبة مهمة من عنصر الكلفة للوحدة الواحدة من المنتج.

– مساحات الأراضي ذات المواصفات النادرة، كما هي الحال مع مساحات الأراضي التي يتواجد فيها النفط أو مناجم الفحم والذهب وما شابه ذلك في حين قد لا تعد الصحراء الجرداء أو الأراضي ير الصالحة للزراعة من الموارد المحدودة، وبخاصة البلدان التي لديها مساحات جغرافية شاسعة.

2-4 تعدد البدائل: يقصد بهذا الشرط أن هناك أكثر من بديل أو طريقة يتم بموجبها استلال الموارد المتوفرة، فعند الحديث عن المستلزمات الأساسية لعملية الإنتاج وبالتحديد عن الموارد الأولية الداخلة في صنع المنتج، يعني هذا الشرط أن هناك أكثر من طريقة لإستغلال هذه الموارد الأولية، ومن الجدير بالذكر هنا أن اختيار البديل الفضل أو الأمثل يخضع لمعايير متعددة أهمها أن يحقق البديل أعلى الفوائد والمنافع أو اقل التكاليف والخسائر وهو ما يعرف بالبديل الأمثل.

إن هذين الشرطين (محدودية الموارد وتعدد البدائل) متلازمان،أحدهما بالآخر عند تعلق الأمر بتطبيق أساليب بحوث العمليات في منظمة الأعمال التي منها على سبيل المثال النماذج التالية:

-أسلوب البرمجة الخطية والبرمجة بأعداد صحيحة.

-أسلوب نماذج النقل.

-أسلوب شبكات الأعمال.

-أسلوب السيطرة على الخزين.

-أسلوب تحليل ماركوف.

-أسلوب خطوط الانتظار.

يستعمل احد هذه الأساليب أو أكثر من أسلوب في كل وظيفة من الوظائف الإدارية وهذه الأخيرة تتشعب وتتنوع بحسب نوع النشاط الإنتاجي أو الخدمي الذي تمارسه أية منظمة أعمال.

5- النماذج في بحوث العمليات

على العموم يتم تطبيق بحوث العمليات والاستفادة من وسائلها عن طريق صياغة المشكلة على هيأة نموذج والنماذج متعددة ومختلفة الاستعمال وفي هذا المجال يتم التمييز بين نوعين من النماذج أو الأساليب الكمية وهي:

5-1 نماذج رياضية تستعمل في ترشيد القرار المطلوب اتخاذه من خلال تصميم نظام مصغر يعبر بشكل أو بآخر عن النظام الفعلي ضمن ما يعرف بحالة المحاكاة للواقع بحيث أن حل المشكلة ضمن نظام المحاكاة يمكن أن يؤدي إلى حلها في الواقع العملي، ويرجع ذلك إلى أسباب اقتصادية كلفوية.

5-2 نماذج رياضية تستخدم في وضع مقياس امثل للمقارنة بحيث يكون ذلك على أساس توفر الظروف والإمكانات المواكبة كافة التي تعد شرطا لكي يمكن أن يصبح الحل ممكنا كما هي الحال عند استعمال أسلوب البرمجة الخطية وبالتحديد طريقة السمبلكس في التخطيط لعناصر الإنتاج كافة ومن ثم تحديد حجم المنتج الأمثل الذي يحقق الاستعمال الكامل لمستلزمات الإنتاج ويضمن اكبر العوائد الممكنة لمنظمة الأعمال وتشمل النماذج الرياضية على ثلاثة مجاميع أساسية هي:

-**المتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار:** وهي المتغيرات التي يمكن الوصول إلى قيمها عند حل النموذج وهنا يتخذ القرار وفقا للقيم المحددة لهذه المتغيرات ولذلك يمكن تسميتها (بالقرارات المتغيرة).

- **القيود أو محددات النموذج:** وهذه المحددات ضرورية في تكوين النماذج فمن الضروري أن تؤخذ بنظر الاعتبار المحددات المادية للنظام وهذه المحددات هي التي تدفع بالمتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار بان تكون ضمن القيم الممكنة.

- دالة الهدف: دالة الهدف هي الصيغة الرياضية (المعادلة الرياضية) التي تظهر قياس التأثير الكلي (الربحية) إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم Max أو للكلفة إذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير (تدنية) Min، للمتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار وهي التي تحدد مقدار الربح الكلي أو مقدار الكلفة الكلية.

6-مراحل دراسة بحوث العمليات

أهم هدف يتحقق عند استعمال بحوث العمليات هو لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرار الرشيد (الأمثل)، وتعد عملية اتخاذ القرارات جوهر العملية الإدارية بشكل عام، إذ يكرس المدراء جل اهتماماتهم عليها، ويقصد بعملية اتخاذ القرار بأنها مجموعة الخطوات التي يقوم بها متخذ القرار من اجل الوصول إلى الهدف الذي يسعى من اجله (مراحل استعمال بحوث العمليات)، وترد في هذا الصدد تسميات مختلفة لهذه الخطوات إلا أنها بشكل عام تتمحور حول الترتيب والتسميات الآتية:

-تعريف المشكلة قيد البحث.

-بناء النموذج.

-حل النموذج.

-صلاحية النموذج.

-تطبيق واعتماد النتائج.

وتحتاج **المرحلة الأولى** من مراحل الدراسة إلى تعريف واضح للمشكلة، والتي تتحدد بثلاث خطوات رئيسية و على النحو الآتي:

-تحديد واضح للأهداف المراد تحقيقها من خلال الدراسة.

-تحديد واضح للبدائل المتعلقة باتخاذ القرار.

-تحديد واضح للمحددات أو المتطلبات اللازمة لتحقيق الأهداف.

أما **المرحلة الثانية** فتتطلب تحديد شكل النموذج المطلوب فإذا كان النموذج المقدر صياغته هو من صيغ النماذج الرياضية فيمكن اللجوء إلى موضوع البرمجة الخطية لدراسة المشكلة بينما إذا كانت الدراسة معقدة وكبيرة فمن الممكن اللجوء إلى نماذج المحاكاة والتي تعد في هذه الحالة أكثر ملائمة.

أما **المرحلة الثالثة** والمتعلقة بإيجاد حل للنموذج المقترح (الحل هنا يعني إيجاد قيم المتغيرات للقرار) وهنا الحل يمثل النتيجة المثلى باستعمال نماذج الحل الأمثل.

أما **المرحلة الرابعة** فإنها تتعلق باختيار النتائج ويتم ذلك مثلا بمقارنة النتائج مع سلسلة زمنية سابقة لمتغيرات القرار التي يشملها النموذج أو بعض النتائج التاريخية.

وأخيرا **المرحلة الخامسة** التي تتعلق بتطبيق النتائج التي تم التوصل إليها في الحياة العملية وتأخذ شكل التوجيهات أو التعليمات إلى الإدارات المختلفة للوصول إلى النتائج التي رسمت في المرحلة الأولى.

البرمجة الخطية

1-مفهوم البرمجة الخطية: تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي حديث يستعمل أداة لإيجاد أفضل الاستعمالات للموارد المحدودة المتاحة لدى المنشاة ولهذا الأسلوب جانبان هما البرمجة Program وتعني مكانية استعمال الأسلوب لإيجاد البرامج المختلفة لاستعمال الموارد المحدودة المتاحة لدى المنشاة وبما يتلائم مع القيود المفروضة على هذه الموارد ثم اختيار أفضل هذه البرامج التي تحقق هدف المنشاة وذلك بالانطلاق من برنامج لآخر أفضل منه وهكذا.

أما الخطية Linearit فيقصد بها العلاقات بين المتغيرات المحددة كافة للمشكلة قيد الدراسة، أي أن استجابة المتغيرات كافة هي استجابة واحدة وتتناغم مع استجابة دالة الهدف.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف) ولا ننسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا وعادة ما تكون للمعادلات الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل (أي الحل الذي يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف) وتكون الحلول على ثلاثة أنواع:

أ-الحل: وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.

ب-الحل الممكن: وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.

ج-الحل الأمثل: وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

2- شروط البرمجة الخطية: هناك عدد من الشروط ينبغي توافرها عند استخدام البرمجة الخطية ومن أبرزها ما يلي:

1- وجود هدف واضح ومحدد وهو ما يمثل دالة الهدف، والذي يعبر عن أقصى عائد أو أدنى تكلفة، إذ لا بد من التعبير عن ذلك الهدف بنموذج رياضي.

2- وجود عدد من المتغيرات إذ يتأثر حدوث أي تغير فيها على القرارات المتخذة من قبل الإدارة، ويمكن زيادتها أو تخفيضها حسب الخطة الموضوعة لحل المشكلة المطروحة، ومن ثم سوف تؤثر هذه الزيادة أو النقصان على الهدف المطلوب تحقيقه.

3- وجود علاقة خطية بين المتغيرات ودرجة تحقيق الأهداف، ويمكن تمثيل هذا الشرط رياضيا، أي يتم التعبير عن دالة الهدف والقيود على هيئة معادلات أو متباينات من الدرجة الأولى.

4- إمكانية التعبير عن الفعاليات أو المتغيرات موضوع البرمجة بصورة كمية، إن هذا الشرط يشير مثلا إلى ضرورة التعبير عن رأس المال بعدد من الوحدات النقدية أو الأيدي العاملة بعدد العاملين أو الطاقة الإنتاجية المتاحة بعدد الساعات المتوافرة في العمل خلال مدة زمنية معينة (أسبوع، شهر، سنة.....الخ).

5- وجود عدد من القيود أو المحددات تعبر عن محدودية الموارد المتاحة مثل الأيدي العاملة، المواد الأولية، المكائن ورأس المال المطلوب، والتي تستلزم الاستخدام الأمثل لتلك الموارد بسبب المنافسة الشديدة للحصول عليها.

6- ينبغي أن تكون المتغيرات المختلفة والممثلة للقيود اكبر او مساوية للصفر، وهو ما يطلق عليه بشرط عدم السلبية.

3-صياغة نموذج البرمجة الخطية وبناؤه: الهدف الأساسي من استعمال نماذج البرمجة الخطية هو حل مشكلة ما تواجه الإدارة ولذلك يتم الاستعانة بالبرمجة الخطية، وهنا يستلزم الأمر نقل المشكلة من حالتها الأولية (حالة الكلام أو الحالة الإنشائية والمتمثلة في السرد الكلامي لتفاصيل المشكلة كافة)، إلى حالة المعادلات والمتباينات المعبرة عن المشكلة قيد الدراسة.

وهنا يجب أن يوضح نموذج البرمجة الخطية (والذي يمثل أصلا حل للمشكلة المبحوثة) وللحصول على الحل الأمثل، ولذلك يجب أن تستعمل الأمور كافة من خبرة ودراية في صياغة نماذج البرمجة الخطية.

وبعد أن يتم تحويل المشكلة من حالتها الأولية إلى نموذج برمجة خطية (مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف) وهنا يتم الحصول على حل النموذج بالطرق الرياضية التي سنتطرق لها لاحقا.

4-طرق حل نماذج البرمجة الخطية:هناك طريقتان أساسيتان لحل نماذج البرمجة الخطية وهما:

4-1 الطريقة البيانية (في حال وجود متغيرين فقط)

4-2 طريقة السمبلكس (في حال وجود أكثر من متغيرين)

5-أشكال صيغ نموذج البرمجة الخطية: قبل الدخول إلى طريقة حل النموذج بطريقة السمبلكس علينا معرفة أنواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على أساسها وهي ثلاث أنواع:

5-1 الصيغة العامة: وشروط هذه الصيغة هي:

-أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل MAX أو MIN

-أن تكون القيود مكتوبة بإشارة اقل أو يساوي أو اكبر أو يساوي أو على هيئة معادلة أي مساواة.

-المتغيرات تكون إما مقيدة أو غير مقيدة بالإشارة.

ونموذج الصيغة العامة يعطى بالشكل التالي

$$MAX \text{ OR MIN} \quad Z=C_1X_1+C_2X_2+............+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+........+a_{1n}X_n \le \; = \; \ge \; b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+........+a_{2n}X_n \le \; = \; \ge \; b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+........+a_{mn}X_n \le \; = \; \ge b_m \\ X_1,X_2,X_3,............,X_n \ge 0 \end{cases}$$

5-2 الصيغة القانونية: وترد هذه الصيغة إما في حالة التعظيم أو في حالة التدنية

5-2-1 الصيغة القانونية في حالة التعظيم: ونموذج الصيغة القانونية في حالة التعظيم يعطى بالشكل التالي

$$MAX\ \ Z=C_1X_1+C_2X_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}X_n\le b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}X_n\le b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{mn}X_n\le b_m \\ X_1,X_2,X_3,\ldots\ldots\ldots\ldots,X_n\ge 0 \end{cases}$$

5-2-2 الصيغة القانونية في حالة التدنية: ونموذج الصيغة القانونية في حالة التدنية يعطى بالشكل التالي

$$MIN\ \ Z=C_1X_1+C_2X_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}X_n\ge b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{2n}X_n\ge b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{mn}X_n\ge b_m \\ X_1,X_2,X_3,\ldots\ldots\ldots\ldots,X_n\ge 0 \end{cases}$$

5-3 الصيغة القياسية:يستعمل هذا النوع من الصيغ في حل نماذج البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس ومن شروط هذه الصيغة:

1-أن تكون متغيرات النموذج مقيدة بالإشارة.

2-أن يحتوي البرنامج الخطي على قيود مكتوبة على شكل معادلات، فإذا كانت إشارة المتباينة اصغر أو يساوي يضاف إلى الطرف الأيسر متغير وهمي أو ما يسمى بمتغيرات الموازنة ويرمز له بالرمز (S) كما يلي:

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}X_n\le b_1$$

يصبح القيد كالتالي $a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}X_n+S_1=b_1$

أما إذا كانت إشارة المتباينة اكبر أو يساوي يطرح من الطرف الأيسر المتغير الوهمي (S) وتسمى بالمتغيرات الفائضة كما يلي:

$$a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}X_n\ge b_1$$

يصبح القيد كالتالي $a_{11}X_1+a_{12}X_2+\ldots\ldots\ldots+a_{1n}X_n-S_1=b_1$

6-حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس (simplex method)

تم تطوير هذه الطريقة من طرف عالم الرياضيات البريطاني **George Dantzig** في عام 1947م وتنطوي هذه الطريقة على الفكرة الآتية:

تبدأ الطريقة بإيجاد حل مبدئي أساسي ممكن ثم التحرك إلى حل أساسي ممكن يكون أفضل من الحل السابق وذلك بإحلال احد المتغيرات الغير أساسية محل المتغيرات الأساسية في الجدول الأول وهذا ما يسمى بالمتغير الداخل، ويتم اختياره على أساس نسبة مساهمته في تحسين دالة الهدف، أما المتغير الذي سيتم مغادرته والذي حل محله احد المتغيرات الأساسية فيسمى بالمتغير الخارج ويتم اختياره طبقا لقاعدة تضمن إمكانية الحصول على حل جديد، وعندما يتم الوصول إلى هذا الحل فانه سيكون لدينا نقطة بداية جديدة لتكرار العملية السابقة نفسها لتحديد حل أساسي ممكن أفضل من ذلك الذي حصلنا عليه في المرحلة السابقة وتتوقف هذه العملية عندما نصل إلى احد الحالات الآتية:

-الحصول على حل نهائي ويكون الحل الأمثل .

-تحديد عدد لا نهائي من الحلول.

-المشكلة ليس لها حل ممكن.

6-1حالة تعظيم الأرباح (النموذج الأولي Primal): قبل البدء باستخدام طريقة السمبلكس لحل مشكلة التعظيم لابد من تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل المعياري والذي يتناسب مع القواعد والإجراءات الجبرية المعينة لمشكلة البرمجة الخطية، فإذا كانت لدينا الصيغة العامة لمشكلة تعظيم من الشكل التالي:

$$MAX\ \ Z=C_1X_1+C_2X_2+............+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+........+a_{1n}X_n\le b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+........+a_{2n}X_n\le b_2 \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+........+a_{mn}X_n\le b_m \\ X_1,X_2,X_3,............,X_n\ge 0 \end{cases}$$

فان الصيغة القياسية لها ستكون بالشكل التالي:

$$MAX\ \ Z=C_1X_1+C_2X_2+............+C_nX_n+0S_1+0S_2+..........+0S_m$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+........+a_{1n}X_n+S_1=b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+........+a_{2n}X_n+S_2=b_2 \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \\ . \quad\quad . \quad\quad . \quad . \quad\quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+........+a_{mn}X_n+S_m=b_m \\ X_1,X_2,X_3,............,X_n\ge 0,S_1,S_2,S_3,........,S_m\ge 0 \end{cases}$$

وتكون الصيغة الجدولية كالأتي:

C_B	C_j / BASIC	C_1	C_2	C_3	C_4	..	C_n	0	0	0	0	.....	0	b_i
		X_1	X_2	X_3	X_4	..	X_n	S_1	S_2	S_3	S_4	.....	S_m	
0	S_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	..	a_{1n}	1	0	0	0	.....	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	..	a_{2n}	0	1	0	0	.....	0	b_2
0	S_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	..	a_{3n}	0	0	1	0	.....	0	b_3
0	S_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	..	a_{4n}	0	0	0	1	.....	0	b_4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	..	⋮	0	0	0	0	.....	0	⋮
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{m4}	..	a_{mn}	0	0	0	0	.....	1	b_m
Z_j-C_j		$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	$-C_4$	..	$-C_n$	0	0	0	0	.....	0	Z=0

ملاحظات حول الجدول السابق

C_B:هي معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف (ولأية مرحلة من مراحل جدول السمبلكس)

C_j: هي معاملات المتغيرات كافة (الأساسية وغير الأساسية) لدالة الهدف.

BASIC:ويعني المتغيرات الأساسية لذلك الجدول من جداول السمبلكس (أي لكل مرحلة من مراحل السمبلكس، اي لكل جدول للسمبلكس له متغيراته الأساسية الخاصة به)

Z_j-C_j: يسمى بسطر التقييم وهو حاصل طرح معاملات المتغيرات كافة في دالة الهدف من حاصل ضرب صف معاملات المتغيرات الأساسية لذلك الجدول في حاصل ضرب أعمدة الجدول بحيث $Z_1 = \sum_{i=1}^{m} \left(C_B \times a_{i1}\right) = 0$

وهكذا مع بقية القيم في سطر التقييم

a_{ij}: تسمى بالمعاملات الفنية.

b_i: هذا العمود يسمى بالكميات المتاحة أو شعاع الثوابت.

قيمة دالة الهدف (Z) تحسب وفق العلاقة التالية $Z = \sum_{i=1}^{m} C_B \times b_i$

6-2 خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس

1-تحويل القيود ودالة الهدف إلى الصيغة القياسية.

2-تحويل الصيغة القياسية إلى هيئة جدول وتسمى عندها بالصيغة الجدولية

3-تعيين الحل الأساسي الابتدائي.

4-اختيار المتغير ذي القيمة الصغرى في سطر التقييم أو القيمة الكبرى بالقيمة المطلقة في حالة تعظيم الأرباح، إذ يطلق على العمود الذي يقابل تلك القيمة بالمتغير الداخل (عمود الارتكاز).

5-قسمة ثوابت الطرف الأيمن (شعاع الثوابت) على المعاملات الفنية الموجبة فقط للمتغير الداخل وذلك لاستخراج النسبة ثم اختيار اقل نسبة، وتشير هذه النسبة المختارة إلى المتغير الأساسي المقابل لها وهو المتغير الخارج (سطر الارتكاز).

6-تعيين نقطة الارتكاز وهو العنصر المشترك بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج.

7-تنظيم جدول جديد يدرج فيه المتغيرات الأساسية الجديدة، أي استبدال المتغير الداخل محل المتغير الخارج في عمود القاعدة (basic).

8-قسمة سطر الارتكاز على نقطة الارتكاز، أما عمود المتغير الداخل فيأخذ صفرا.

9-بقية القيم الموجودة في الجدول يتم استخراجها وفقا للمعادلة التالية بما في ذلك قيم عمود b_i كما يلي:

العنصر الجديد= العنصر القديم- $\dfrac{\text{المقابل في العمود الداخل} \times \text{المقابل في الصف الخارج}}{\text{نقطة الارتكاز}}$

10- يتم تكرار الخطوات (4-5-6-7-8-9) إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل والذي يتميز بوجود جميع القيم موجبة أو معدومة في سطر التقييم

مثال01: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 05X_1 + 02X_2 + 10X_3 + X_4$$

$$S/C = \begin{cases} 02X_1 + X_2 + 04X_3 + 07X_4 \le 1000 \\ \quad 05X_2 + 02X_3 + 07X_4 \le 200 \\ 04X_1 + 03X_2 + 06X_3 + 13X_4 \le 2000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس؟

الحل:

1-نحول نموذج البرمجة الخطية إلى النموذج القياسي

$$MAX(Z) = 05X_1 + 02X_2 + 10X_3 + X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S/C = \begin{cases} 02X_1 + X_2 + 04X_3 + 07X_4 + S_1 = 1000 \\ \quad 05X_2 + 02X_3 + 07X_4 + S_2 = 200 \\ 04X_1 + 03X_2 + 06X_3 + 13X_4 + S_3 = 2000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0, S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases}$$

2-نشكل جدول الحل الابتدائي

C_B	C_i / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	02	01	04	07	1	0	0	1000	250
0	S_2	00	05	02	07	0	1	0	200	100
0	S_3	04	03	06	13	0	0	1	2000	333.33
Z_j-C_j		-05	-02	-10	-01	0	0	0	Z=0	

من خلال سطر التقييم نقوم باستخراج المتغير الداخل إلى القاعدة والذي يقابل اقل قيمة سالبة أو اكبر قيمة بالقيمة المطلقة، ومن خلال جدول الحل الابتدائي نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_3 (عمود الارتكاز)

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الارتكاز) نقوم بقسمة قيم عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ اقل قيمة موجبة، ومن خلال نفس الجدول السابق نلاحظ أن اقل قيمة موجبة توافق المتغير S_2 وان نقطة الارتكاز هي القيمة 02 إذن

X_3 يدخل إلى القاعدة وS_2 يخرج من القاعدة ونعيد تشكيل جدول سمبلكس آخر كما يلي

C_B	C_j / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1			0		01		0		
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	
0	S_3			0		0		01		
Z_j-C_j				0		0		0	Z=	

في أول خطوة نقوم بتقسيم سطر الارتكاز على نقطة الارتكاز في حين أن العمود يأخذ صفرا

ما تبقى من القيم (المعاملات الفنية) يتم حسابها وفق العلاقة السابقة الذكر وهي

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{المقابل في العمود الداخل} \times \text{المقابل في الصف الخارج}}{\text{نقطة الارتكاز}}$$

على سبيل المثال نأخذ القيمة 02 في الجدول السابق وهي نقطة تلاقي X_1 وS_1 ونحسب القيمة الجديدة لها في الجدول الثاني كما يلي:

$$\text{العنصر الجديد} = 02 - \frac{0\times 04}{02} = 02$$

وبنفس الطريقة نكمل جميع القيم الفنية فنتحصل على الجدول التالي

C_B	C_j / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	02	-09	0	-07	01	-02	0	600	300
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	∞
0	S_3	04	-12	0	-08	0	-03	01	1400	350
Z_j-C_j		-05	23	0	34	0	05	0	Z=1000	

أما قيمة الدالة الاقتصادية فيتم حسابها وفق العلاقة التالية:

$$Z=\sum_{i=1}^{m} C_B \times b_i \Rightarrow Z=\sum_{i=1}^{3} C_B \times b_i \Rightarrow Z = 0\times 600 + 10\times 100 + 0\times 1400 = 1000$$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن قيم سطر التقييم لا تزال بها قيمة سالبة وبالتالي لم نتوصل بعد إلى الحل الأمثل ونعيد نفس الخطوات السابق شرحها.

من خلال الجدول نلاحظ أن القيمة السالبة الوحيدة تقابل المتغير الداخل هو X_1 (عمود الارتكاز)

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الارتكاز) نقوم بقسمة قيم عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ اقل قيمة موجبة، ومن خلال نفس الجدول السابق نلاحظ أن اقل قيمة موجبة توافق المتغير S_1 وان نقطة الارتكاز هي القيمة 02 إذن

X_1 يدخل إلى القاعدة وS_1 يخرج من القاعدة

C_B	C_i	05	02	10	01	0	0	0	b_i	خارج القسمة
	BASIC	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
05	X_1	01	-9/2	0	-7/2	1/2	-01	0	300	
10	X_3	0		01				0		
0	S_3	0		0				01		
Z_j-C_j		0		0				0	Z=	

في أول خطوة نقوم بتقسيم سطر الارتكاز على نقطة الارتكاز في حين أن العمود يأخذ صفرا

وباقي المعاملات الفنية تحسب وفق العلاقة السابقة الذكر لتتحصل على جدول السمبلكس التالي

C_B	C_i	05	02	10	01	0	0	0	b_i	
	BASIC	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
05	X_1	01	-9/2	0	-7/2	1/2	-01	0	300	
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	
0	S_3	0	0	0	06	-02	01	01	200	
Z_j-C_j		0	1/2	0	33/2	5/2	0	0	Z=2500	

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل

المتغيرات الأساسية: $X_1 = 300, X_3 = 100, S_3 = 200$

المتغيرات غير الأساسية: $X_2 = X_4 = S_1 = S_2 = 0$

أسعار الظل: $X_2 = \frac{01}{02}, X_4 = \frac{33}{02}, S_1 = \frac{05}{02}, S_2 = 0$

6-2حالة تقليل التكاليف (النموذج الأولي Primal): فإذا كانت لدينا الصيغة العامة لمشكلة تقليل التكاليف من الشكل التالي:

$$MIN\ (W) = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\dots + C_nX_n$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots\dots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة يتم طرح المتغيرات الفائضة للحصول على حالة التساوي بين الطرفين وعليه يتم تحويل المشكلة إلى الصيغة التالية :

$$MIN\ (W) = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\dots + 0S_m$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n - S_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n - S_2 = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n - S_m = b_m \\ X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots\dots, X_n \geq 0, S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_m \geq 0 \end{cases}$$

وبما أن الحل الابتدائي الأساسي يبدأ من خلال وضع قيم كل متغيرات القرار مساويا إلى الصفر وعليه فان الموارد تأخذ قيم المتغيرات الفائضة لنحصل على الصيغة التالية:

$$S/C = \begin{cases} -S_1 = b_1 \\ -S_2 = b_2 \\ . \\ \\ . \\ -S_m = b_m \end{cases}$$

تعارض العلاقة السابقة مع شرط عدم السلبية، وعليه لا يوجد حل متاح وبموجبه يتطلب إجراء تعديلات لغرض التحول إلى الحل المتاح وهذا ما يمكن إجراؤه من خلال إضافة المتغيرات الاصطناعية لكل معادلة ولتكن هذه المتغيرات الاصطناعية $(A_1, A_2, A_3, \dots\dots\dots\dots, A_m)$ ل (m) من المعادلات وبناءا على ذلك يمكن التعبير عن القيود كالتالي:

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n - S_1 + A_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n - S_2 + A_2 = b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n - S_m + A_m = b_m \end{cases}$$

وبما أن الحل الابتدائي الأساسي يبدأ من خلال وضع قيم كل متغيرات القرار والمتغيرات الفائضة مساويا إلى الصفر وعليه فان الموارد تأخذ قيم المتغيرات الاصطناعية لنحصل على الصيغة التالية:

$$S/C=\begin{cases} A_1=b_1 \\ A_2=b_2 \\ . \\ . \\ . \\ A_m=b_m \end{cases}$$

قيم شعاع الثوابت (الكميات المتاحة) موجبة وبالتالي يتوافق مع شرط عدم السلبية وبالتالي يوجد حل ممكن.

وتكون الصيغة القياسية للنموذج في شكلها النهائي كالتالي:

$$MIN\,(W)=C_1X_1+C_2X_2+............+C_nX_n+0S_1+0S_2+.....+0S_m+MA_1+MA_2+.......+MA_m$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+........+a_{1n}X_n-S_1+A_1=b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+........+a_{2n}X_n-S_2+A_2=b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+........+a_{mn}X_n-S_m+A_m=b_m \\ X_1,X_2,X_3,............,X_n\geq 0,S_1,S_2,S_3,........,S_m\geq 0,A_1,A_2,A_3,........,A_m\geq 0 \end{cases}$$

6-2-1: طرق الحل في حالة تقليل التكاليف

في مشاكل التعظيم كانت القيود من الشكل اصغر أو يساوي وتم تحويلها إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الفائضة، أما إذا كانت قيود المشكلة على شكل اكبر أو يساوي فلا بد من طرح المتغيرات الفائضة منها لتحويلها إلى النموذج القياسي، وهنا نواجه مشكلة تعذر الحصول على حل ابتدائي ممكن لان المتغيرات الفائضة تحمل إشارة سالبة، وهذا مخالف لشرط عدم السلبية، مما يتطلب إضافة متغيرات أخرى موجبة يطلق عليها المتغيرات الاصطناعية لتكون بمثابة المتغير الأساسي للتوصل إلى حل ممكن، أما القيود التي تحوي على علامة مساواة (=) فيتم إضافة المتغير الاصطناعي إليها فقط تمهيدا لتوفير المتغيرات الأساسية التي تستند عليها مصفوفة الوحدة ومن ثم التوصل إلى حل النموذج.

نستطيع التوصل إلى حل المشكلة المتضمنة المتغيرات الاصطناعية من خلال استبعاد هذه المتغيرات من النموذج، ومن ثم الاستمرار في خطوات الحل للتوصل إلى الحل الأمثل ويمكن تطبيق طريقتان لحل النموذج الذي يحتوي على المتغيرات الاصطناعية وهما طريقة:

1- طريقة M الكبيرة (طريقة الغرامة) BIG-M -Technique

2- طريقة المرحلتين tow phase

6-2-1طريقة M الكبيرة (طريقة الغرامة) BIG-M –Technique

تعتمد هذه الطريقة على إضافة (M) إلى المتغيرات الاصطناعية في دالة الهدف إذ تمثل (M) قيمة كبيرة جدا، وتحمل الإشارة الموجبة في مشاكل تقليل التكاليف والإشارة السالبة في مشاكل تعظيم الأرباح، وتساعد إضافة (M) إلى دالة الهدف في اخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل الأمثل، ويتم تطبيق الخطوات الرياضية التالية للوصول إلى الحل الأمثل:

1-تحويل القيود ودالة الهدف إلى الصيغة القياسية وذلك بإضافة المتغيرات الاصطناعية ومتغيرات الفجوة.

2-تحويل الصيغة القياسية إلى هيئة جدول وتسمى عندها بالصيغة الجدولية

3-تعيين الحل الأساسي الابتدائي.

4-اختيار المتغير ذي القيمة الكبرى لمعامل(M) في سطر التقييم ، إذ يطلق على العمود الذي يقابل تلك القيمة بالمتغير الداخل (عمود الارتكاز).

5-قسمة ثوابت الطرف الأيمن (شعاع الثوابت) على المعاملات الفنية الموجبة فقط للمتغير الداخل وذلك لاستخراج النسبة ثم اختيار اقل نسبة، وتشير هذه النسبة المختارة إلى المتغير الأساسي المقابل لها وهو المتغير الخارج (سطر الارتكاز).

6-تعيين نقطة الارتكاز وهو العنصر المشترك بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج.

7-تنظيم جدول جديد يدرج فيه المتغيرات الأساسية الجديدة، أي استبدال المتغير الداخل محل المتغير الخارج في عمود القاعدة (basic).

8-قسمة سطر الارتكاز على نقطة الارتكاز، أما عمود المتغير الداخل فيأخذ صفرا.

9-بقية القيم الموجودة في الجدول يتم استخراجها وفقا للمعادلة التالية بما في ذلك قيم عمود b_i كما يلي:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{المقابل في العمود الداخل} \times \text{المقابل في الصف الخارج}}{\text{نقطة الارتكاز}}$$

10- يتم تكرار الخطوات (4-5-6-7-8-9) إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل والذي يتميز بوجود جميع القيم سالبة أو معدومة في سطر التقييم.

مثال: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$\text{MIN}(Z) = 2400X_1 + 1000X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 \geq 20 \\ 06X_1 + X_2 \geq 30 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: اوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة M الكبيرة؟

الحل:

1-تحويل الصيغة القانونية للنموذج إلى الصيغة القياسية كما يلي

$$MIN(Z) = 2400X_1 + 1000X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 - S_1 + A_1 = 20 \\ 06X_1 + X_2 - S_2 + A_2 = 30 \\ X_1, X_2 \geq 0, S_1, S_2 \geq 0, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

2-نشكل جدول الحل الابتدائي

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	03	02	-01	0	01	0	20	6.66
M	A_2	06	01	0	-01	0	01	30	05
Z_j-C_j		09M-2400	03M-1000	-M	-M	0	0	Z=50M	

من خلال سطر التقييم نقوم باستخراج المتغير الداخل إلى القاعدة والذي يقابل اكبر قيمة موجبة للمعامل M، ومن خلال جدول الحل الابتدائي نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_1 (عمود الارتكاز)

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الارتكاز) نقوم بقسمة قيم عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ اقل قيمة موجبة، ومن خلال نفس الجدول السابق نلاحظ أن اقل قيمة موجبة توافق المتغير A_2 وان نقطة الارتكاز هي القيمة 06 إذن

X_1 يدخل إلى القاعدة وA_2 يخرج من القاعدة ونعيد تشكيل جدول سمبلكس آخر كما يلي

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	0				01			
2400	X_1	01	1/6	0	-1/6	0	1/6	05	
Z_j-C_j		0				0		Z=	

في أول خطوة نقوم بتقسيم سطر الارتكاز على نقطة الارتكاز في حين أن العمود يأخذ صفرا

ما تبقى من القيم (المعاملات الفنية) يتم حسابها وفق العلاقة السابقة الذكر وهي

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{المقابل في العمود الداخل} \times \text{المقابل في الصف الخارج}}{\text{نقطة الارتكاز}}$$

فنتحصل على الجدول التالي

C_B	C_i / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	0	3/2	-01	1/2	01	-1/2	05	10/3
2400	X_1	01	1/6	0	-1/6	0	1/6	05	30
Z_j-C_j		0	3/2M-600	-M	M/2-400	0	-3/2M+400	Z=05M+ 12000	

أما قيمة الدالة الاقتصادية فيتم حسابها وفق العلاقة التالية:

$$Z=\sum_{i=1}^{m} C_B \times b_i \Rightarrow Z=\sum_{i=1}^{2} C_B \times b_i \Rightarrow Z=M\times 05+05\times 2400=05M+12000$$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن قيم سطر التقييم لا تزال بها قيمة موجبة وبالتالي لم نتوصل بعد إلى الحل الأمثل ونعيد نفس الخطوات السابق شرحها.

من خلال الجدول نلاحظ أن أكبر قيمة موجبة للمعامل M تقابل المتغير الداخل هو X_2 (عمود الارتكاز)

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الارتكاز) نقوم بقسمة قيم عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ اقل قيمة موجبة، ومن خلال نفس الجدول السابق نلاحظ أن اقل قيمة موجبة توافق المتغير A_1 وان نقطة الارتكاز هي القيمة $3/2$ إذن

X_2 يدخل إلى القاعدة وA_1 يخرج من القاعدة

C_B	C_i / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
1000	X_2	0	01	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3	
2400	X_1	01	0						
Z_j-C_j		0	0						

في أول خطوة نقوم بتقسيم سطر الارتكاز على نقطة الارتكاز في حين أن العمود يأخذ صفرا

وباقي المعاملات الفنية تحسب وفق العلاقة السابقة الذكر لتتحصل على جدول السمبلكس التالي

C_B	C_i / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
1000	X_2	0	01	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3
2400	X_1	01	0	1/9	-2/9	-1/9	2/9	40/9
Z_j-C_j		0	0	-400	-200	400-9M	200-3M	Z=14000

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل

المتغيرات الأساسية: $X_1=\frac{40}{9}, X_2=\frac{10}{3}$

المتغيرات غير الأساسية: $S_1=S_2=0$

أسعار الظل: $S_1=-400, S_2=-200$

6-2-2 طريقة المرحلتين tow phase: إن هذه الطريقة تختلف عن طريقة M الكبيرة حيث أنها لا تستخدم المتغير M إذ أن القيمة المفترضة إلى M كرقم كبير جدا قد يجعل الحل يتضمن بعض الصعوبة وقد طور العالمان Dantzig و Orden طريقة المرحلتين والتي تعتمد في إيجاد الحل الأمثل على مرحلتين هما:

المرحلة الأولى:تبدأ بتحديد المتغيرات الاصطناعية لغرض استخراج حل أساسي ممكن ويتم تعريف دالة الهدف الجديدة وهي عبارة عن حاصل جمع قيم المتغيرات الاصطناعية وتكون على شكل دالة هدف تصغير مهما كانت دالة الهدف الأصلية لمشكلة البرمجة الخطية، ونبدأ الحل بهذه المرحلة لإيجاد الحل الأساسي الأولي فإذا كانت دالة الهدف الجديدة مساوية إلى الصفر ننتقل إلى المرحلة الثانية وإلا نتوقف عن الحل وذلك لعدم وجود حل ممكن للمشكلة.

المرحلة الثانية: نقوم بحذف دالة الهدف الجديدة والمتغيرات الاصطناعية من جدول الحل الممكن الذي حصلنا عليه في المرحلة الأولى ونبدأ بحل المرحلة الثانية لدالة الهدف الأصلية.

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب : اوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة المرحلتين؟

الحل:

المرحلة الأولى: نكتب دالة الهدف الجديدة كالتالي

$$\text{MIN}(Z) = A_1 + A_2$$

أما قيود المسالة فتبقى على حالها

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 - S_1 + A_1 = 20 \\ 06X_1 + X_2 - S_2 + A_2 = 30 \\ X_1, X_2 \geq 0, S_1, S_2 \geq 0, A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

نشكل جدول الحل الأساسي للمشكلة كما يلي

C_B	C_j	0	0	0	0	01	01	b_i	خارج القسمة
	BASIC	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
01	A_1	03	02	-01	0	01	0	20	6.66
01	A_2	06	01	0	-01	0	01	30	05
Z_j-C_j		09	03	-01	-01	0	0	Z=50	

نختار اكبر قيمة موجبة وهي X_1 أما المتغير الخارج فهو الذي يقابل اقل قيمة موجبة وهو A_2 وعليه فنقطة الارتكاز هي 06

نشكل جدول آخر كما يلي

C_B	C_j	0	0	0	0	01	01	b_i	خارج القسمة
	BASIC	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
01	A_1	0				01			
0	X_1	01	1/6	0	-1/6	0	1/6	05	
Z_j-C_j		0				0		Z=	

بنفس الخطوات السابقة نكمل حل الجدول فنتحصل على التالي

C_B	C_j / BASIC	0	0	0	0	01	01	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
01	A_1	0	3/2	-01	1/2	01	-1/2	05	10/3
0	X_1	01	1/6	0	-1/6	0	1/6	05	30
Z_j-C_j		0	3/2	-01	1/2	0	-3/2	Z=05	

X_2 يدخل إلى القاعدة و A_1 يخرج من القاعدة ونقطة الارتكاز هي 3/2

C_B	C_j / BASIC	0	0	0	0	01	01	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
0	X_2	0	01	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3	
0	X_1	01	0						
Z_j-C_j		0	0					Z=	

بنفس الخطوات السابقة نكمل الجدول التالي فنتحصل على التالي

C_B	C_j / BASIC	0	0	0	0	01	01	b_i	
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
0	X_2	0	01	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3	
0	X_1	01	0	1/9	-2/9	-1/9	2/9	40/9	
Z_j-C_j		0	0	0	0	-01	-01	Z=0	

نلاحظ أن قيمة الدالة الاقتصادية مساوي للصفر كما ان سطر التقييم كل قيمه سالبة أو معدومة وعليه فهي تمثل نهاية المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية: نحذف أعمدة المتغيرات الاصطناعية ونعيد دالة الهدف الجديدة كما يلي

$$MIN(Z) = 2400X_1 + 1000X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

نعيد تشكيل جدول المرحلة الأولى بتبديل معاملات دالة الهدف الأصلية مع حذف أعمدة المتغيرات الاصطناعية كالتالي

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	b_i	
		X_1	X_2	S_1	S_2		
1000	X_2	0	01	-2/3	1/3	10/3	
2400	X_1	01	0	1/9	-2/9	40/9	
Z_j-C_j		0	0	-400	-200	Z=14000	

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل

المتغيرات الأساسية: $X_1 = \frac{40}{9}, X_2 = \frac{10}{3}$

المتغيرات غير الأساسية: $S_1 = S_2 = 0$

أسعار الظل: $S_1 = -400, S_2 = -200$

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها بطريقة M الكبيرة (BIG-M-).

النموذج المقابل في البرمجة الخطية (Dual)

1-مقدمة:إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية (Primal Models) ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل (الثنائي Dual)

وعند مناقشة مشاكل البرمجة الخطية لابد من مناقشة مشكلة أخرى ألا وهي الثنائية (Duality) إذ يقترن دائما بكل مشكلة أولية (Primal probleme) نموذج آخر يطلق عليه المشكلة المقابلة أو الثنائية ويعني هذا انه بالإمكان تحويل أي مشكلة في البرمجة الخطية إلى ما يقابلها من نموذج .

ويتضمن استخدام النموذج المقابل على فوائد عديدة منها:

1-سهولة وسرعة التوصل إلى الحل الأمثل، إذ يتطلب إحدى المشاكل إجراءات حل مطولة وفق الطريقة المبسطة للمشكلة الأولية وبالمقابل فقد يتضمن حل المشكلة بالنموذج المقابل سهولة اكبر وعليه يكون حلها أسهل عند تحويلها إلى النموذج الثنائي.

2-تساعد الإدارة في معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار.

3-لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الأخرى (الثنائية) فإذا كان النموذج أولي Primal وبصيغة التعظيم (MAX) أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج المقابل ويكون بصيغة التقليل (MIN) وتمثيله للجانب الكلفوي في نفس المشكلة ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية Primal

2-خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل: لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل أو العكس يمكن ذلك بإتباع الخطوات التالية

1-إذا كان هدف المشكلة في النموذج الأولي تعظيم الأرباح فتصبح هدف المشكلة في النموذج المقابل تقليل التكاليف والعكس بالعكس.

2-عدد المتغيرات في النموذج الأولي يكون مساويا لعدد القيود في النموذج المقابل، فمثلا لو كان النموذج الأولي يحوي على ثلاث متغيرات فان النموذج المقابل سيحتوي على ثلاث قيود.

3-تحويل معاملات المتغيرات في قيود المشكلة بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفا.

4-استبدال ثوابت القيود (الكميات المتاحة) بمعاملات دالة الهدف والعكس بالعكس.

5-تحويل اتجاه المتباينات من اصغر أو يساوي إلى اكبر أو يساوي والعكس بالعكس.

6-استبدال جميع المتغيرات المشار إليها بالمتغيرات (X) في النموذج الأولي إلى المتغيرات (Y) في النموذج المقابل.

فإذا كانت الصيغة القانونية للنموذج الأولي في حالة التعظيم كالتالي

$$MAX\ (Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n \le b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n \le b_m \\ X_1, X_2, X_3, ..., X_n \ge 0 \end{cases}$$

عندها تكون الصيغة القانونية للنموذج المقابل كما يلي

$$MIN\ (W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + ... + b_mY_m$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 + ... + a_{m1}Y_m \ge C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 + ... + a_{m2}Y_m \ge C_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + a_{3n}Y_3 + ... + a_{mn}Y_m \ge C_n \\ Y_1, Y_2, Y_3, ..., Y_m \ge 0 \end{cases}$$

3- استنتاج الحل الأمثل للمشكلة المقابلة انطلاقا من الحل الأمثل للمشكلة الأولية: بعد تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل يمكننا استنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الأولي وذلك بالاعتماد على الخطوات التالية:

1- متغيرات القرار في النموذج الأولي تصبح متغيرات فائضة في النموذج المقابل.

2- المتغيرات الفائضة في النموذج الأولي تصبح متغيرات القرار في النموذج المقابل.

3- المتغيرات الأساسية في النموذج الأولي تصبح متغيرات غير أساسية في النموذج المقابل.

4- المتغيرات غير الأساسية في النموذج الأولي تصبح متغيرات أساسية في النموذج المقابل.

5- كميات الإنتاج في النموذج الأولي تصبح أسعار الظل في النموذج المقابل.

6- أسعار الظل في النموذج الأولي تصبح كميات الإنتاج في النموذج المقابل.

7- المعاملات الفنية في النموذج الأولي تؤخذ بإشارة سالبة في النموذج المقابل.

8- قيمة الدالة الاقتصادية في النموذج الأولي هي نفسها في النموذج المقابل.

مثال: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية الأولية في حالة التعظيم كالتالي

$$MAX(Z) = 05X_1 + 02X_2 + 10X_3 + X_4$$

$$S/C = \begin{cases} 02X_1 + X_2 + 04X_3 + 07X_4 \le 1000 \\ \quad 05X_2 + 02X_3 + 07X_4 \le 200 \\ 04X_1 + 03X_2 + 06X_3 + 13X_4 \le 2000 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1-اكتب النموذج المرافق ؟

2-انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الأولي كما يوضحه الجدول التالي

C_B	C_i / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i	
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
05	X_1	01	-9/2	0	-7/2	1/2	-01	0	300	
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	
0	S_3	0	0	0	06	-02	01	01	200	
Z_j-C_j		0	1/2	0	33/2	5/2	0	0	Z=2500	

استنتج الحل الأمثل للنموذج المقابل دون حله؟

الحل:

1– كتابة النموذج المرافق

$$MIN(W)=1000Y_1+200Y_2+2000Y_3$$

$$S/C=\begin{cases}02Y_1+04Y_3Y\geq 05\\ Y_1+05Y_2+03Y_3\geq 02\\ 04Y_1+02Y_2+06Y_3\geq 10\\ 07Y_1+07Y_2+13Y_3\geq 01\\ Y_1,Y_2,Y_3\geq 0\end{cases}$$

2-استنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الأولي

لدينا جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي كالتالي

		متغيرات النموذج الأولي								
		المتغيرات الأساسية				المتغيرات الفائضة				
C_B	C_i / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i	
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
05	X_1	01	-9/2	0	-7/2	1/2	-01	0	300	
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	
0	S_3	0	0	0	06	-02	01	01	200	
Z_j-C_j		0	1/2	0	33/2	5/2	0	0	Z=2500	
		المتغيرات الفائضة				المتغيرات الأساسية				
		متغيرات النموذج المقابل								

وبالرجوع إلى الخطوات السابق ذكرها يمكننا استنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل دون حله كما يلي

			متغيرات النموذج الأولي									
	C_B	C_j	05	02	10	01	0	0	0	b_i		
		BASIC	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3			
متغيرات النموذج الأولي	05	X_1	01	-9/2	0	-7/2	1/2	-01	0	300	S_1	متغيرات النموذج المقابل
	10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	S_3	
	0	S_3	0	0	0	06	-02	01	01	200	Y_3	
	Z_j-C_j		0	1/2	0	33/2	5/2	0	0	Z=2500		
			S_1	S_2	S_3	S_4	Y_1	Y_2	Y_3			
			متغيرات النموذج المقابل									

فيكون جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل كالتالي

C_B	C_j / BASIC	1000	200	2000	0	0	0	0	b_i	
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_2	0	0	0	9/2	01	-5/2	0	1/2	X_2
0	S_4	0	0	-06	7/2	0	-7/2	01	33/2	X_4
1000	Y_1	01	0	02	-1/2	0	0	0	5/2	S_1
200	Y_2	0	01	-01	01	0	-1/2	0	0	S_2
W_j-C_j		0	0	-200	-300	0	-100	0	W=2500	
		S_1	S_2	S_3	X_1	X_2	X_3	X_4		

مدخل لنظرية البيان

مقدمة:تستخدم نظرية البيان في كثير من الحياة العملية وخاصة في مجالات التسير الأمثلي للموارد، كأعمال الطرق وإمداد الشبكات كشبكات المياه والغاز والكهرباء والطرق ...إلخ، وأعمال البترول وإنجاز المشاريع فهي واحدة من أهك النظريات ذات الفعالية في حل الكثيير من المسائل الحقيقية التي تدرسها بحوث العمليات.

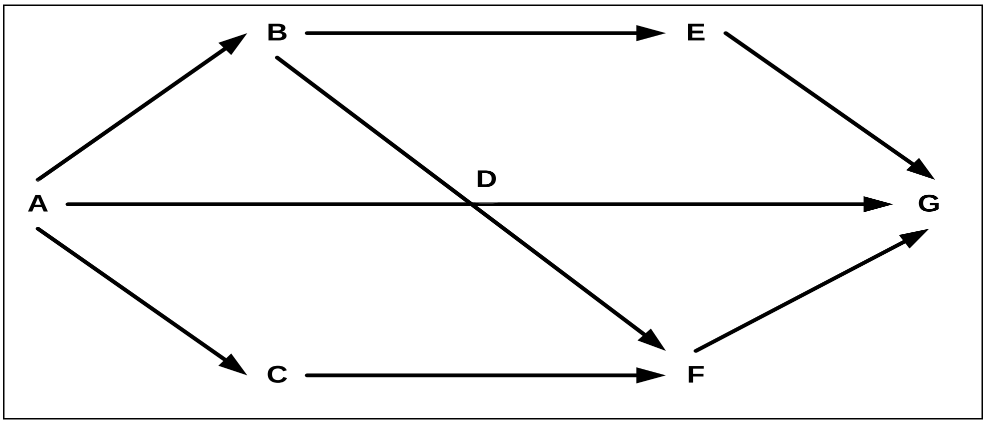
وقد بدأ ظهور نظرية البيان من خلال أول مطبوعة ظهرت سنة 1936م لصاحبها DENES KONIG، وفي سنة 1958م أظهر CLAUD BERGE نظرية البيانات وتطبيقاتها، وقد تم تطوير هذه النظرية خاصة بعد سنة 1971م في كل من فرنسا والمجر والولايات المتحدة الأمريكية والإتحاد السوفياتي سابقا.

أولا:مفاهيم عامة

01–تعريف البيان: البيان عبارة عن مجموعة من الخطوط المتصلة عن طريق نقاط أو دوائر تسمى بالقمم، ويعبر كل خط عن إختيار معين، وعليه فالبيان يتكون من مجموعتين من المحدادات:

–المجموعة X وتسمى بالقمم وهي عبارة عن نقاط أو دوائر صغيرة.

–المجموعة U عبارة عن خطوط أو أسطر تربط كل قمتين والشكل رقم 01 التالي يوضح ذلك



ويعبر عن البيان بالصيغة التالية $G=(X,U)$

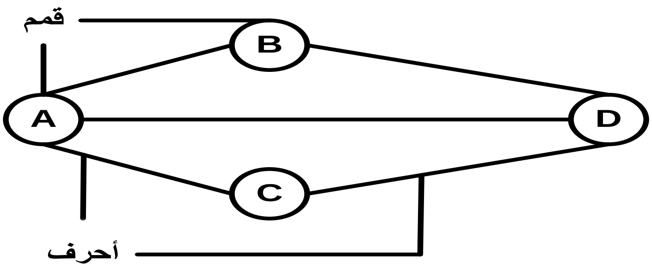
–إذا كانت مجموعة الخطوط أو الأسطر موجهة أي في شكل أسهم من القمة i الى القمة j أو العكس فإنها تسمى بالأقواس (ARCS) ويسمى البيان حينئذ بالبيان الموجه.

–أما إذا كانت مجموعة الخطوط غير موجهة فإن تلك الخطوط تسمى بالأحرف (ARETE) ويسمى البيان حينئذ بالبيان غير الموجه.

02–القمم: هي النقاط التي تنطلق منها أو تصل إليها الخطوط الموجهة (الأقواس) أو غير الموجهة (الأحرف)، فالنقاط A,B,C,D,E,F,G في الشكل السابق هي عبارة عن قمم للبيان ونكتب مجموعة القمم X كمايلي:

$$X=\{A,B,C,D,E,F,G\}$$

03-الأحرف (ARETE): هو خط غير موجه بين قمتين وهو يكافئ قوسين متعاكسين كما في الشكل التالي

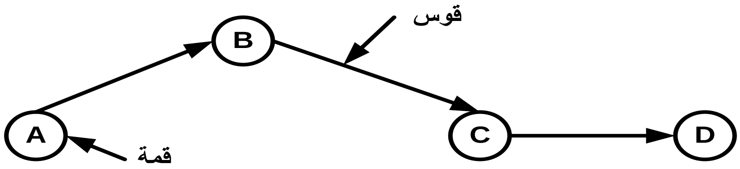


04-القوس(ARCS):عبارة عن خط موجه أو سهم يصل بين طرف إبتدائي (قمة الإنطلاق) وطرف نهائي (قمة الوصول) وقد يكون بين قمتين متتاليتين أو غير متتاليتين كما في الشكل التالي:

ونكتب مجموعة الأقواس للشكل السابق كما يلي

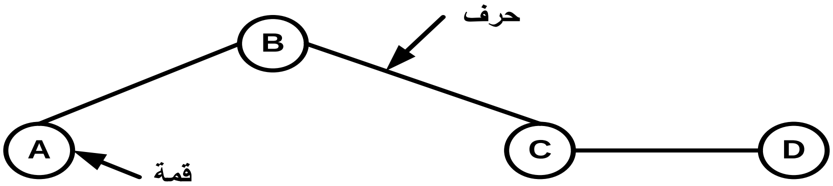
$$U=\{(A,B),(A,C),(A,D),(B,E),(B,D),(C,F),(D,F),(D,G),(E,G),(F,G)\}$$

05-المسار:مجموعة متتابعة من الأقواس يتكون فيها الطرف النهائي لكل قوس هو الطرف الإبتدائي للقوس الموالي باستثناء الطرف النهائي للقوس الأخير والشكل التالي يوضح ذلك

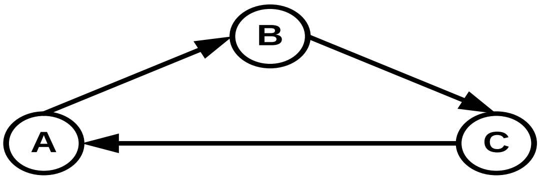


طول المسار هو عدد الأقواس التي يتكون منها، ويكون المسار بسيطا إذا كان لا يمر سوى مرة واحدة على الأقواس التي يتكون منها ويكون مسارا اوليا إذا كان لا يلتقي أكثر من مرة واحدة بكل قمة.

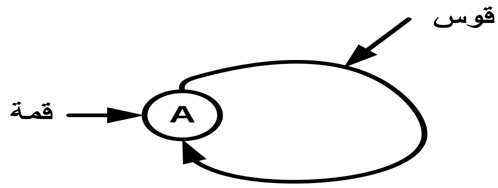
06-السلسلة: هو مجموعة متتابعة من الأحرف يكون فيها الطرف النهائي لكل حرف هو الطرف الإبتدائي للحرف الموالي بإستثناء الطرف النهائي للحرف الأخير كما يوضحه الشكل التالي:



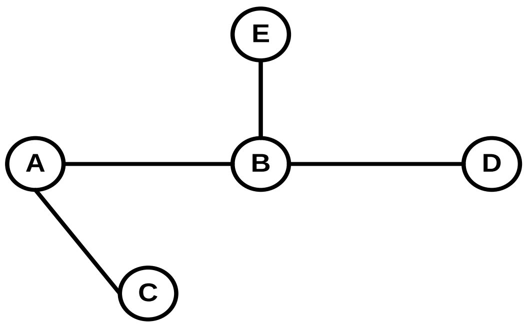
07-الدارة: مي مسار مغلق على نفسه يكون فيه الطرف النهائي للقوس الأخير متصل بالطرف الإبتدائي للقوس الأول كما يوضحه الشكل التالي:



08-العقدة: هي سهم طرفه الإبتدائي هو نفسه طرفه النهائي،أي يعود إلى نفس القمة التي ينطلق منها كما في الشكل التالي:

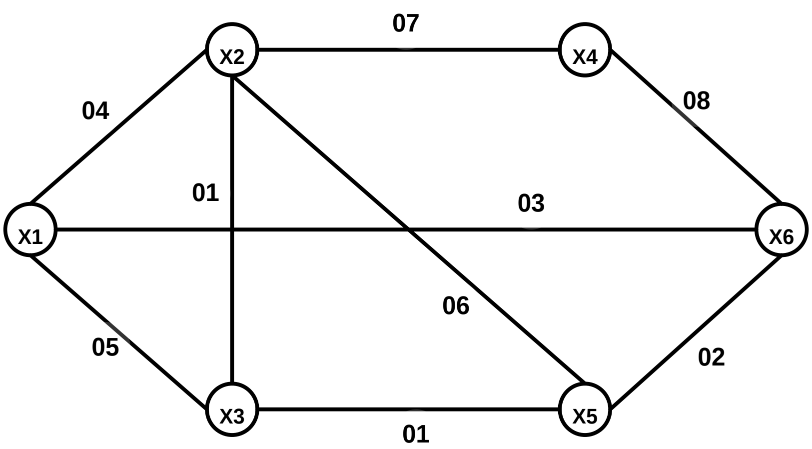


09-الشجرة: هي بيان مترابط بدون حلقة (دارة) يحتوي على N قمة و N-1 حرف كما يوضحه الشكل التالي:



10-مصفوفة السعة: تكون الشبكة مقيمة إذا كان كل قوس أو حرف منها يمثل كمية تعبر إما عن الطول أو الحجم أو التكلفة.....إلخ، وفي هذه الحالة يمكن أن نعبر عن الشبكة بمصفوفة تسمى مصفوفة السعة،حيث يمثل كل عنصر فيها حمولة القوس أو الحرف بين كل قمة وقمة اخرى، وإذا لم توجد علاقة بين قمتين فغنه يتم التعبير عن ذلك بالقيمة صفر.

مثال: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الخطوط للشبكة الكهربائية بين مجموعة من القرى

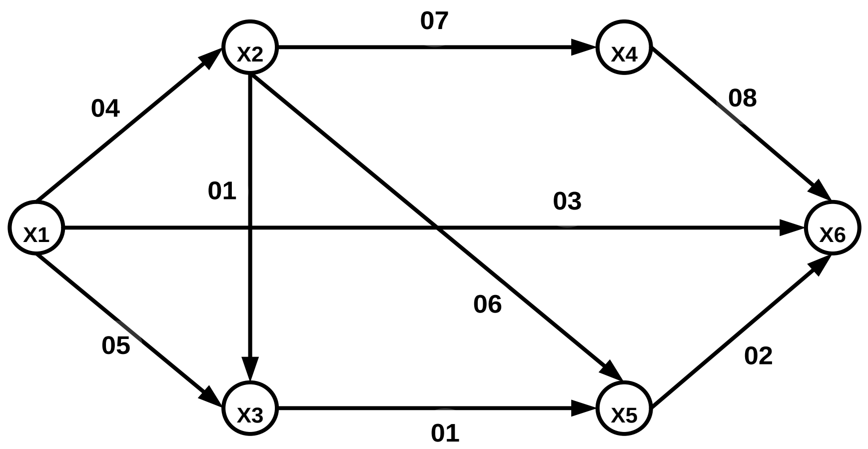


المطلوب:عبر عن الشبكة في الشكل السابق بمصفوفة السعة

الحل:الشبكة عبارة عن بيان غير موجه وبالتالي فإن كل حرف يؤخذ في الإتجاهين ذهابا وإيابيا لذلك فان مصفوفة السعة تكون على النحو التالي:

القمم	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	04	05	0	0	03
X_2	04	0	01	07	06	0
X_3	05	01	0	0	01	0
X_4	0	07	0	0	0	08
X_5	0	06	01	0	0	02
X_6	03	0	0	08	02	0

مثال: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الخطوط للشبكة الكهربائية بين مجموعة من القرى



المطلوب:عبر عن الشبكة في الشكل السابق بمصفوفة السعة

الحل:الشبكة عبارة عن بيان موجه وبالتالي فإن كل قوس يؤخذ في إتجاه واحد لذلك فان مصفوفة السعة تكون على النحو التالي:

القمم	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	04	05	0	0	03
X_2	0	0	01	07	06	0
X_3	0	0	0	0	01	0
X_4	0	0	0	0	0	08
X_5	0	0	0	0	0	02
X_6	0	0	0	0	0	0

ثانيا:إستخدامات نظرية البيان

تستخدم نظرية البيان في كثير من من المسائل الواقعية من مسائل بحوث العمليات،ومن المسائل التي سوف نستخدم فيها نظرية البيان مايلي:

–نظرية الشجرة المثلى في حالتي التدنية والتعظيم.

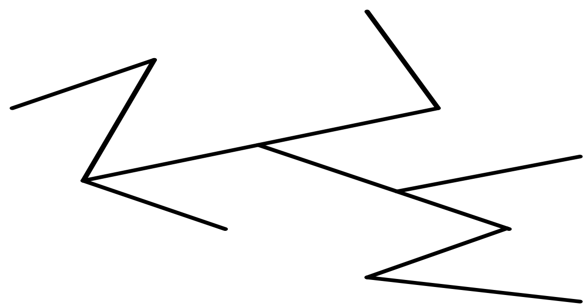
–نظرية المسارات المثلى في حالتي التدنية والتعظيم.

–نظرية التدفق الأعضمي.

–تحليل شبكات الأعمال الأنشطة (CPM,PERT).

–نظرية الشجرة المثلى

–مفهوم الشجرة: هو كل بيان غير موجه ومترابط ولا يحتوي على أي حلقة (دارة) يشكل ما يصطلح عليه شجرة،أي ان الشجرة عبارة عن مجموعة من الأحرف مترابطة بينها عبر مجموعة من القمم، دون أن تشكل دارة أو حلقة مع بعضها البعض كما يبينه الشكل التالي:



فإذا كان لدينا البيان $G=(X,U)$ به N قمة فإنه يمكننا تشكيل شجرة بعدد $N-1$ من الأحرف.

ثالثا: الشجرة المثلى

من كل بيان غير موجه يمكن الحصول على عدد من الشجيرات، والشجرة المثلى في البيان المقيم هي التي تعطي أقل تكلفة أو مسافة ....إلخ، او أعظم حمولة اي أعلى الرباح أو العوائد أو التدفقات.

ثالثا:حالة الشجرة الدنيا

الشجرة المثلى هي بيان غير موجه لا يحتوي على أية دارة يتم الحصول عليه من بيان يحتوي على إمكانات ربط متعددة بحيث أن مجموع حمولة هذه الأحرف يكون أصغر ما يمكن ويتم حل هذا النوع من المسائل بإستخدام خوارزميتين هما:

03-01 خوارزمية كريسكال (KRUSKAL):ظهرت هذه الخوارزمية سنة 1956م زهي جد بسيطة وتنسب لصاحبها كريسكال، وتتلخص في النقاط التالية

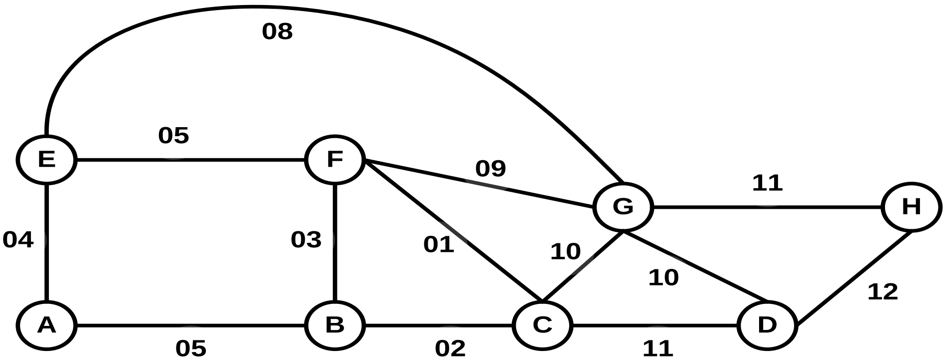
–نرتب الأحرف ترتيبا تصاعديا حسب حمولتها، وفي حالة تساوي حمولة عدد من الأحرف نمايز بينها بإضافة قيمة صغيرة $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$

–نأخذ الأحرف الأقل قيمة تصاعديا ونرسمها مع الحرص على عدم أخذ الحرف الذي يشكل لنا حلقة (دارة) مع الأحرف التي سبق رسمها.

–نستمر في العملية حتى نتحصل على شجرة عدد أحرفها هو $N-01$

–لحساب الحمولة الدنيا التي تعكس أقل تكلفة أو أقل مسافة نجمع حمولة الأحرف التي شكلت لنا الشجرة

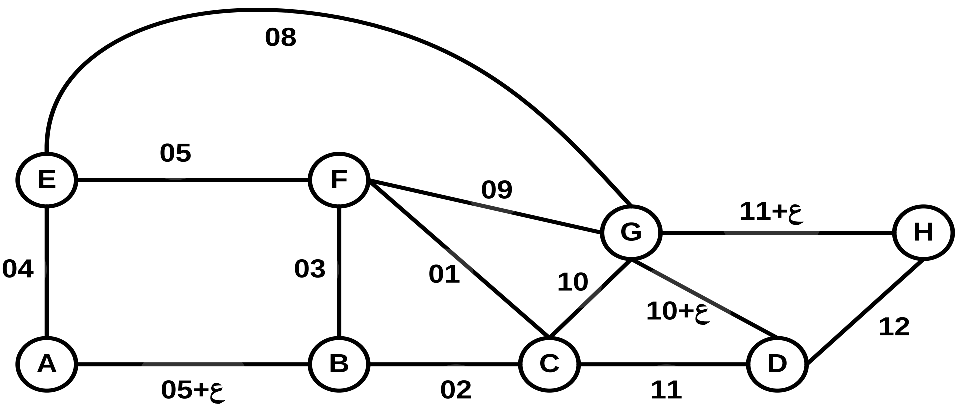
مثال: لتكن لدينا الشبكة التالية



المطلوب:رسم الشجرة حسب خوارزمية كريسكال

الحل:

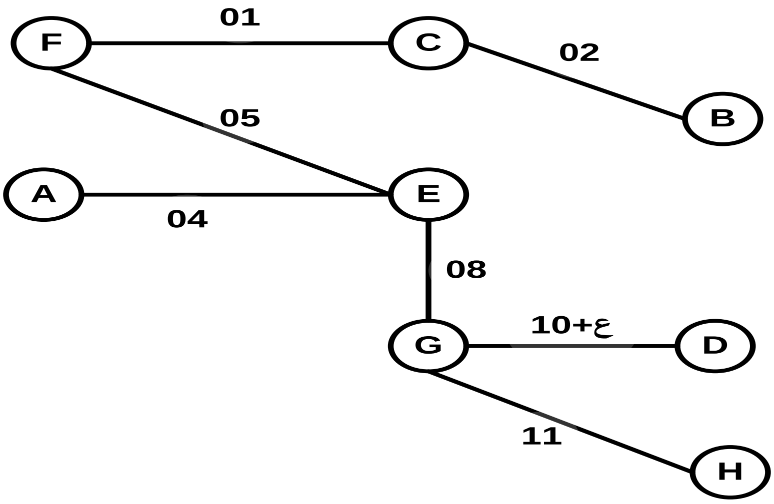
-نمايز بين الاحرف التي لها نفس الحمولة بإضافة قيمة صغيرة جدا هي $\varepsilon,2\varepsilon,3\varepsilon$، والشكل التالي يوضح ذلك



-نرتب حمولة الأحرف ترتيبا تصاعديا

الحرف	الحمولة	الحرف	الحمولة
FC	01	FG	09
BC	02	CG	10
FB	03	GD	10+ε
AE	04	CD	11
EF	05	GH	11+ε
AB	05+ε	DH	12
	08		

رسم الشجرة: نبدأ بأقل حمولة(FC=01) ونرسمها ثم ننتقل إلى الحرف الموالي من حيث القمة (BC=02) ونرسمه مع إهمال كل حرف يمكن ان يشكل لنا حلقة مع غيره من الحرف، بحيث أن الحرف التي تشكل لنا حلقةهي(FB=03)،(AB=05+ε)،(FG=09)،(CG=10)،(CD=11)،(DH=12) لذا يتم اسبعادها فنتحصل على الشجرة كما يوضحه الشكل التالي



نلاحظ أن عدد الحرف هو N−01 مما يعني أننا توصلنا إلى شجرة دنيا

أما حمولة او تكلفة فهي كالتالي

$$Z=01+02++05+04+08+10+\varepsilon+11=41+\varepsilon$$

$$= \mathbf{41um}$$

02-03 خوارزمية سولان (SOLLIN):ظهرت هذه الخوارزمية سنة 1961م وهي تنسب لصاحبها سولان، ولإيجاد الشجرة الدنيا باستخدام هذه الخواريزمية نتبع الخطوات التالية

−نمايز بين الأحرف التي لها نفس الحمولة بإضافة قيمة صغيرة جدا هي $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$

−نأخذ أي قمة ونفحص الحرف التي تتصل بها ونأخذ أقلها ونرسمه مع تفادي الحرف الذي يشكل لنا حلقة مع سابقيه.

−نعيد العملية من جديد دون فحص القمة التي سبق وأن أخذت.

−عند فحص جميع القمم تكن النتيجة المتحصل عليها شجرة تتصل بها جميع القمم، ونكون حينئذ أما الحل الأمثل.

−أما إذا فحصت جميع القمم لكننا حصلنا على عدد من الشجيرات (أي الفروع) فإن الحل الأمثل لم نصل إليه بعد، وعليه نبحث عن أقل الأحرف للربط بين هذه الشجيرات لنحصل على شجرة بقيمة دنيا.

−نجمع في النهاية حمولة الحرف التي تشكل الشجرة فنتحصل على التكلفة او المسافة الدنيا.

مثال: نفس المثال السابق

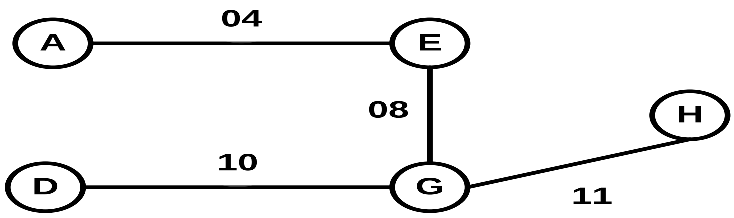
المطلوب: رسم الشجرة الدنيا باستخدام خوارزمية سولان

الحل:

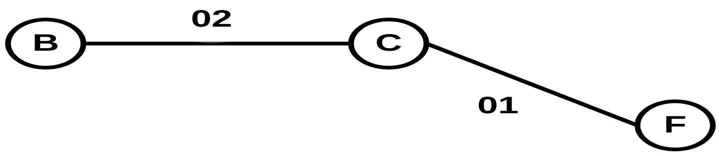
−نمايز بين الحرف التي لها نفس الحمولة من خلال الشكل السابق ونشكل الجدول التالي

القمة	الحرف المختار	القمة	الحرف المختار
A	AE=04	F	تم الإختيار
B	BC=02	G	GE=08
C	CF=01	H	HG=11
D	DG=10		
E	تم الإختيار		

بعد ذلك نرسم الأحرف المختارة فنتحصل على شجرتين كما يوضحه الشكل التالي



α



β

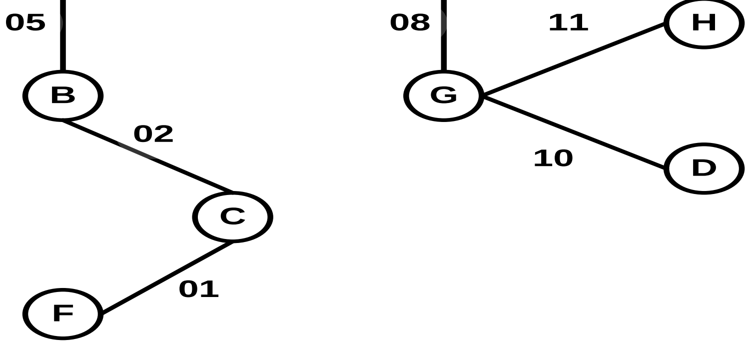
نلاحظ أننا تحصلنا على شجرتان الأولى تتكون من 05 قمم و 04 أحرف و الثانية تتكون من 03 قمم وحرفان، وبما ان الهدف هو إيجاد أدنى شجرة لذالك لابد من الربط بينهما بالحرف ذي الأقل حمولة لأجل ذلك نسمى الشجرة الأولى ب α والشجرة الثانية ب β ، ثم نقوم بفحص الأحرف التي يمكن أن تربط بين الشجرتان كالتالي

AB=05,DC=11,EF=05,GF=09,GC=10

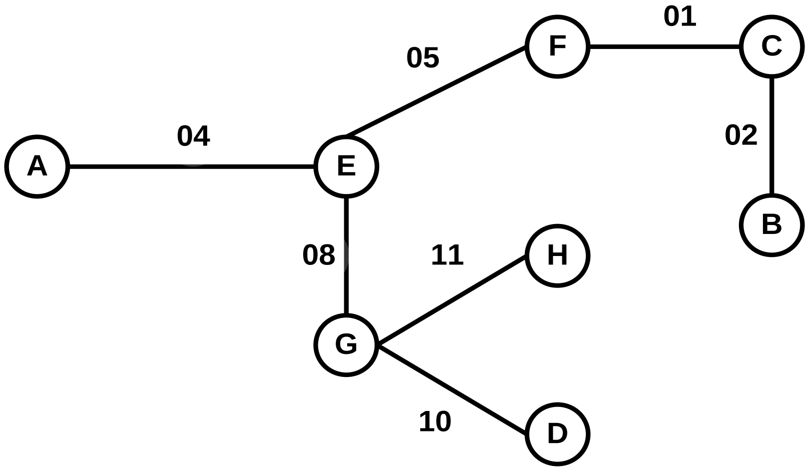
بعد تفحص الأحرف التي من خلالها يمكن الربط بين الشجرتين، نلاحظ أنه توجد لدينا طريقين للربط بينهما إما بAB=05 او EF=05

والشكل التالي يوضح رسم الشجرة بالطريقتين

الطريقة الأولى



الطريقة الثانية



-أما حمولة الأحرف المشكلة للشجرة فهي

Z=04+05+02+01+08+11+10=41um

رابعا: حالة الشجرة العظمى

قد تكون الإشكالية المطروحة أحيانا هي إيجاد أطول شجرة للربط بين مجموعة من القمم، وعمليا يمكن أن نصادف بعض المسائل التي تعطي فيها الأرباح أو العوائد التي يمكن أن تجنى عند الربط بين مجموعة من المناطق ويكون الهدف هو إيجاد الشجرة التي تعطي أعلى الرباح أو أعلى العوائد.

ويتم ذلك وفق خوارزميتين هما

01-04 خوارزمية كريسكال (KRUSKAL): تعتمد على النقاط التالية

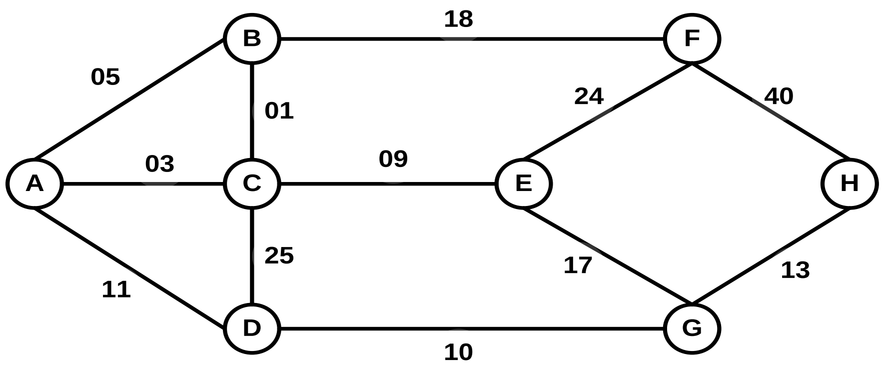
-ترتب الأحرف ترتيبا تنازليا حسب حمولتها، وفي حالة تساوي حمولتين أو اكثر نمايز بينهما بإضافة قيمة صغيرة $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$.

-ناخذ الأحرف الكبر قيمة تنازليا ونرسمه مع الحرص على عدم أخذ الحرف الذي يشكل لنا حلقة مع الحرف الذي يسبقه.

-نستمر في العملية حتى نتحصل على شجرة عدد أحرفها هو N-01

-نجمع حمولة الأحرف فنتحصل على أعظم ربح أو عائد.

مثال: لتكن لديك الشبكة التالية



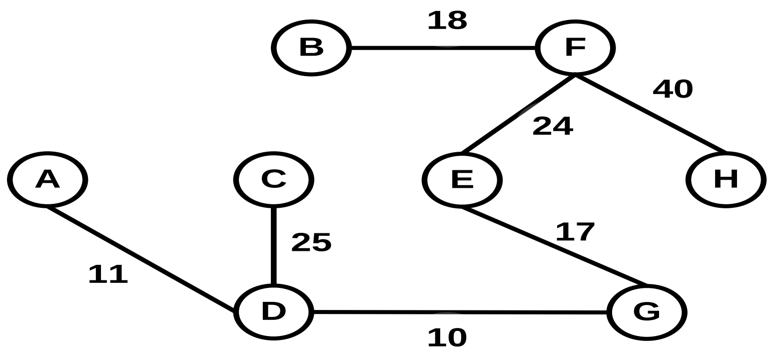
المطلوب:رسم الشجرة المثلى التي تعظم الارباح باستخدام خوارزمية كريسكال

الحل:

–نرتب حمولة الحرف ترتيبا تنازليا كما يوضحه الجدول التالي

الحرف	**الحمولة**	**الحرف**	**الحمولة**
FH	40	AD	11
CD	25	DG	10
EF	24	CE	09
BF	18	AB	05
EG	17	AC	03
GH	13	BC	01

– رسم الشجرة:نبدأ بأعلى حمولة(FH=40) ونرسمها ثم ننتقل إلى الحرف الموالي من حيث القمة (CD=25) ونرسمه مU إهمال كل حرف يمكن ان يشكل لنا حلقة مع غيره من الحرف، بحيث أن الأحرف التي تشكل لنا حلقة هي (GH=13)،(CE=09)،(AB=05)،(BC=01) لذا يتم اسبعادها فنتحصل على الشجرة كما يوضحه الشكل التالي



نلاحظ أن عدد الحرف هو N−01 مما يعني أننا توصلنا إلى شجرة عظمى

أما حمولة او التكلفة فهي كالتالي

Z=40+18+24+17+10+25+11=145um

02−04 خوارزمية سولان (SOLLIN):تعتمد هذه الخوارزمية على الخطوات التالية

–نمايز بين الاحرف التي لها نفس الحمولة باضافة قيمة صغيرة جدا هي $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon$.

–نأخذ أي قمة ونفحص الأحرف التي تتصل بها وناخذ أكبرها ونرسمه مع تفادي الحرف الذي يشكل لنا حلقة مع سابقيه.

–نعيد العملية من جديد دون فحص القمة التي سبق وأن فحصت.

–عند فحص جميع القمم وتكون النتيجة المتحصل عليها هي شجرة تتصل بها جميع القمم نكون حينئذ أمام الحل الأمثل.

-أما إذا فحصت جميع القمم لكننا تحصلنا على عدد من الشجيرات فإن الحل المثل لم نصل اليه بعد، وعليه نبحث عن أكبر الأحرف للربط بين هذه الشجيرات لنحصل في النهاية على شجرة بقيمة عظمى.

مثال: نفس المثال السابق

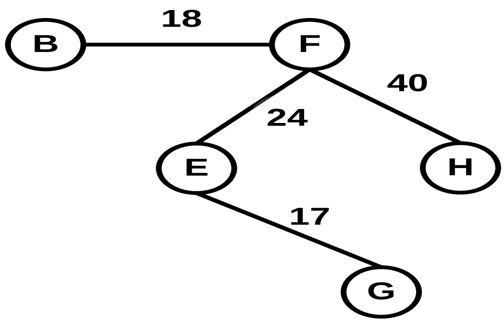
المطلوب: رسك الشجرة العظمى باستخدام خوارزمية سولان

الحل:

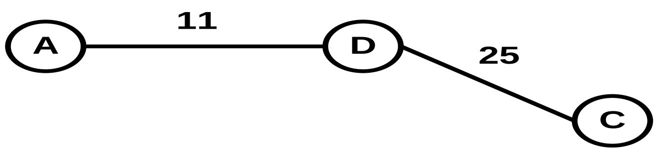
نفحص جميع القمم ونختار الحرف ذي الحمولة الكبرى والجدول التالي يوضح عملية الفحص

القمة	الحرف المختار	القمة	الحرف المختار
A	AD=11	E	EF=24
B	BF=18	F	FH=40
C	CD=25	G	GE=17
D	تم الإختيار	H	تم الإختيار

بعد ذلك نرسم الأحرف المختارة فنتحصل على شجرتين كما يوضحه الشكل التالي



α



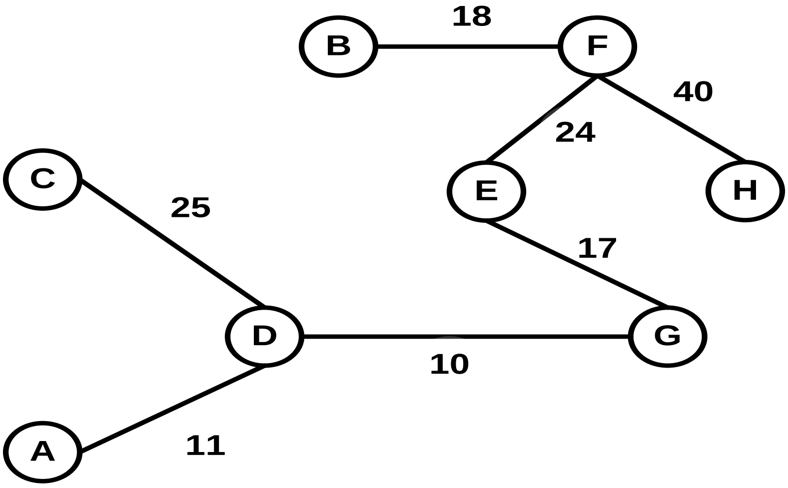
β

نلاحظ أننا تحصلنا على شجرتان الأولى تتكون من 05 قمم و 04 أحرف و الثانية تتكون من 03 قمم وحرفان، وبما ان الهدف هو إيجاد أعظم شجرة لذالك لابد من الربط بينهما بالحرف ذي الأكبر حمولة لأجل ذلك نسمى الشجرة الأولى ب α والشجرة الثانية ب β ، ثم تقوم بفحص الأحرف التي يمكن أن تربط بين الشجرتان كالتالي

AB=05,BC=01,EC=09,GD=10

بعد تفحص الأحرف التي من خلالها يمكن الربط بين الشجرتين، نلاحظ أنه توجد لدينا طريقة واحدة للربط بينهما وهي GD=10

والشكل التالي يوضح الشجرة



-أما حمولة الأحرف المشكلة للشجرة فهي

$Z=18+11+25+24+40+17+10=145um$

ثانيا:نظرية المسارات المثلى

إن مسائل تحديد المسارات ذات القيمة المثلى (الدنيا أو العظمى) كثيرا مانصادفها في بحوث العمليات ويتمثل الأمر في تحديد أقصر أو أعظم مسار بين رأسين ينتميان إلى شبكة ما:

وليكن لدينا شبكة ما $G(U,X)$ كل قوس هو $U(X_i,X_j)$ في هذه الشبكة ترافقه قيمة $L(X_i,X_j)$ تسمة بقيمة القوس أو القيمة المرافقة ونبحث عن مسار ما ينطلق من الرأس الإبتدائي وينتهي عند الرأس النهائي، بحيث أن القيمة الكلية لقيممه المرافقة تكون أقل أو أعظم ما يمكن $\sum L(U)=MAXMIN$

القيمة المرافقة للقوس $L(X_i,X_j)$ يمكن أن تكون تكلفة، مدة زمنية،طول مسافة .....إلخ.

ونحن نبحث عن المسار ذو المسافة الأقل ،ذو التكلفة الأقل،ذو المدة الزمنية الأقل أو غيرها وذلك حسب طبيعة المشكلة المعطاة ويمكن حل طريقة المسارات المثلى بالطرق التالية:

-طريقة مينتي Minty في حالة التدنية فقط.

-طريقة فورد Ford

-طريقة بيلمان Bellman

-طريقة دانزيغ Dantzig

-طريقة الجداول.

-طريقة الفحص التتابعي.

وسوق نتطرق الى هذه الطرق بالتفصيل كما يلي

2-1 طريقة مينتي Minty: تعتمد هذه الطريقة والتي تحمل إسم صاحبها على خوارزمية Minty مع الملاحظة أن إستعمالها يكون فقط في الشبكات التي لا تظهر فيها حلقات مغلقة.

-خطوات الحل: تعتمد على الخطوات التالية

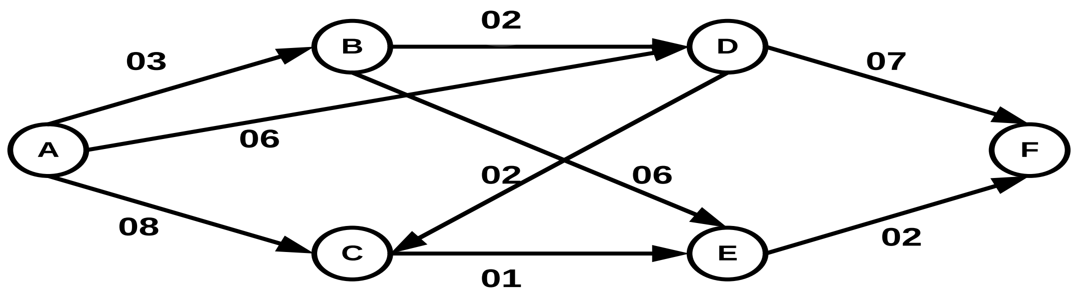
المرحلة الأولى: ترقم كل القمم ب X_i مع i متغير من 0 إلى n-1 علما أن n هو عدد القيم.

المرحلة الثانية: نعطي قيمة 0 للأصل ونضع هذه القيمة في مربع.

المرحلة الثالثة: نبحث عن القمة التي يكون لكل القمم السابقة لها مربع ونعطيها القيمة λ_j حيث $\lambda_j = \lambda_i + L(X_i, X_j)$ في حالة كان القوس ينتهي عند قمة واحدة، اما إذا كان أكثر من قوس يصل الى قمة واحدة فيتم تطبيق العلاقة التالية $\lambda_j = MIN\left[\lambda_i + L(X_i, X_j)\right]$

المرحلة الرابعة: لتحديد المسار الأقصر ننطلق من آخر قمة للشبكة ولا نحتفظ إلا بالقمم التي تضمن المعادلة التالية $\lambda_i = \left[\lambda_j - L(X_i, X_j)\right]$

مثال: لتكن لدينا الشبكة التالية

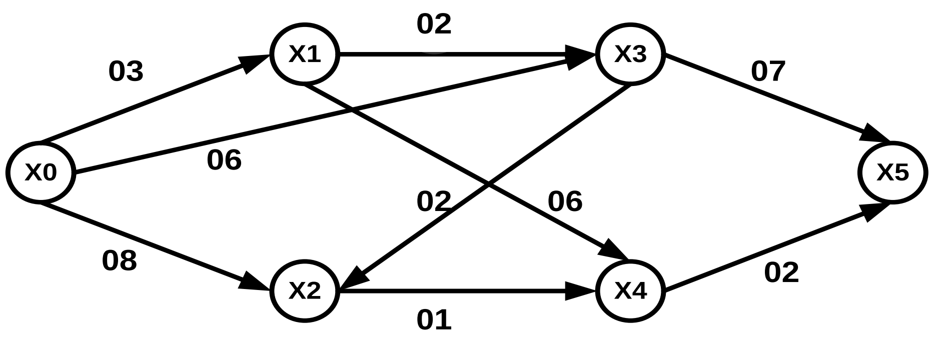


المطلوب:

تحديد أقصر مسار باستخدام طريقة مينتي Minty

الحل:

الخطوة الأولى: ترقيم جميع القمم من 0 إلى n−1



ثم نقوم بالحسابات الأمامية كما يلي

$$\lambda_0 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 + L(X_0, X_1) \Rightarrow \lambda_1 = 0 + 03 = 03$$

$$\lambda_3 = MIN\left[\lambda_0 + L(X_0, X_3), \lambda_1 + L(X_1, X_3)\right] \Rightarrow \lambda_3 = MIN\left[0 + 06, 03 + 02\right]$$

$$\lambda_3 = MIN\left[06, 05\right] \Rightarrow \lambda_3 = 05$$

$$\lambda_2 = MIN\left[\lambda_0 + L(X_0, X_2), \lambda_3 + L(X_3, X_2)\right] \Rightarrow \lambda_2 = MIN\left[0 + 08, 05 + 02\right]$$

$$\lambda_2 = MIN\left[08, 07\right] \Rightarrow \lambda_2 = 07$$

$$\lambda_4 = MIN\left[\lambda_1 + L(X_1, X_4), \lambda_2 + L(X_2, X_4)\right] \Rightarrow \lambda_4 = MIN\left[03+06, 07+01\right]$$

$$\lambda_4 = MIN\left[09, 08\right] \Rightarrow \lambda_4 = 08$$

$$\lambda_5 = MIN\left[\lambda_3 + L(X_3, X_5), \lambda_4 + L(X_4, X_5)\right] \Rightarrow \lambda_5 = MIN\left[05+07, 08+02\right]$$

$$\lambda_5 = MIN\left[12, 10\right] \Rightarrow \lambda_5 = 10$$

الحسابات الخلفية

$$\lambda_5 = 10$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 - L(X_5, X_4) \Rightarrow \lambda_4 = 10 - 02 = 08$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 - L(X_4, X_2) \Rightarrow \lambda_2 = 08 - 01 = 07$$

$$\lambda_3 = \left[\lambda_5 - L(X_5, X_3), \lambda_2 - L(X_3, X_2)\right] \Rightarrow \lambda_3 = [10 - 07, 07 - 02]$$

$$\lambda_3 = [03, 05] \Rightarrow \lambda_3 = 05$$

$$\lambda_1 = \left[\lambda_3 - L(X_3, X_1), \lambda_4 - L(X_4, X_1)\right] \Rightarrow \lambda_1 = [05 - 02, 08 - 06]$$

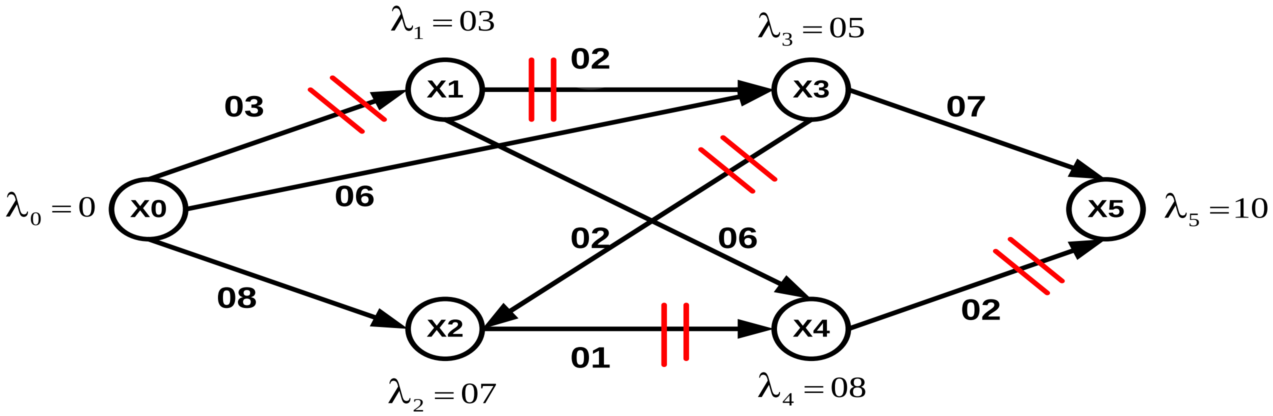
$$\lambda_1 = [03, 02] \Rightarrow \lambda_1 = 03$$

$$\lambda_0 = \left[\lambda_1 - L(X_0, X_1), \lambda_2 - L(X_0, X_2), \lambda_3 - L(X_0, X_3)\right] \Rightarrow \lambda_0 = [03 - 03, 07 - 08, 05 - 06]$$

$$\lambda_0 = [0, -01, -01] \Rightarrow \lambda_0 = 0$$

المسار الأقصر هو $X_0 - X_1 - X_3 - X_2 - X_4 - X_5$

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشبكة التالية:



02-02 طريقة فورد FORD: سميت بهذا الإسم نسبة إلى أول من إستعملها، وسيتم إستخدامها سواء في حالة البحث عن أقصر مسار أو عن أطول مسار.

02-02-01 البحث عن أقصر مسار:لأجل ذلك نتبع الخطوات التالية

-نعيد تسمية قمم البيان على النحو التالي، قمة الإنطلاق X_0 والقمة الموالية X_1 وهكذا حتى قمة الوصول إلى النهاية تكون X_{n-1} حيث أن العدد الكلي للقمم هو n.

-بجانب القمة X_0 نضع $\lambda_0 = 0$، بجانب بقية القمم X_i حيث $i \neq 0$ نضع القيمة $\lambda_i = \infty$

-نفترض أن $L\left(X_i, X_j\right)$ هي حمولة القوس

-مرحلة الذهاب

-في كل قمة X_j تكون فيها $\left(\lambda_j - \lambda_i\right) > L\left(X_i, X_j\right)$، إذا تحقق الشرط نعوض ب λ_j كمايلي

$$\lambda_j = \lambda_i + L\left(X_i, X_j\right)$$

-نستمر بالعملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_j

-أما إذا كانت $\left(\lambda_j - \lambda_i\right) < L\left(X_i, X_j\right)$ فإن قيمة λ_j تبقى كما كانت سابقا.

وإذا كان دليل الطرف الأيمن للسهم هو (i) أكبر من دليل الطرف النهائي (j) أي i>j فيجب وضع (i=j) وإعادة الحساب من قيمة i

-مرحلة الإياب

من أجل تحديد المسار ذو القيمة الدنيا يكفي أن نحدد إنطلاقا من نهاية الشبكة السهم الذي يكون الفرق بين قيم رؤوسه $\left(\lambda_j - \lambda_i\right)$ وطول القيمة المرافقة $L\left(X_i, X_j\right)$ متساويان.

مثال: نفس المثال الساق

المطلوب: تحديد أقصر طريق بإستخدام خوارزمية فورد FORED

الحل:

-مرحلة الذهاب

الأقواس التي تنطلق من X_0 هي $\left(X_0, X_1\right), \left(X_0, X_2\right), \left(X_0, X_3\right)$

عند القمة X_1 نجد

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \infty - 0 = \infty > 03$$
$$\lambda_1 = \lambda_0 + L\left(X_0, X_1\right) \Rightarrow \lambda_1 = 0 + 03 = 03$$

عند القمة X_2 نجد

$$\lambda_2 - \lambda_0 = \infty - 0 = \infty > 08$$
$$\lambda_2 = \lambda_0 + L\left(X_0, X_1\right) \Rightarrow \lambda_2 = 0 + 08 = 08$$

عند القمة X_3 نجد

$$\lambda_3 - \lambda_0 = \infty - 0 = \infty > 06$$
$$\lambda_3 = \lambda_0 + L\left(X_0, X_1\right) \Rightarrow \lambda_3 = 0 + 06 = 06$$

الأقواس التي تنطلق من X_1 هي $(X_1, X_3), (X_1, X_4)$

عند القمة X_3 نجد

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 06 - 03 = 03 > 02$$
$$\lambda_3 = \lambda_1 + L(X_1, X_3) \Rightarrow \lambda_3 = 03 + 02 = 05$$

عند القمة X_4 نجد

$$\lambda_4 - \lambda_1 = \infty - 03 = \infty > 06$$
$$\lambda_4 = \lambda_1 + L(X_1, X_4) \Rightarrow \lambda_4 = 03 + 06 = 09$$

الأقواس التي تنطلق من X_2 هي (X_2, X_4)

عند القمة X_4 نجد

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 09 - 08 = 01 = 01$$

لا يوجد تغيير

الأقواس التي تنطلق من X_3 هي $(X_3, X_5), (X_3, X_2)$

عند القمة X_2 نجد $i = 02, j = 03$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 08 - 05 = 03 > 02$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 + L(X_2, X_3) \Rightarrow \lambda_2 = 05 + 02 = 07$$

وبما أن $(i > j)$ نضع $(i = j = X_2)$ ثم نعيد حساب λ_j من جديد أي من الرأس X_2

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 09 - 07 = 02 > 01$$
$$\lambda_4 = \lambda_2 + L(X_2, X_4) \Rightarrow \lambda_4 = 07 + 01 = 08$$

عند القمة X_5 نجد

$$\lambda_5 - \lambda_3 = \infty - 05 = \infty > 07$$
$$\lambda_5 = \lambda_3 + L(X_3, X_5) \Rightarrow \lambda_5 = 05 + 07 = 12$$

عند القمة X_4 نجد

$$\lambda_5 - \lambda_4 = 12 - 08 = 04 > 02$$
$$\lambda_5 = \lambda_4 + L(X_4, X_5) \Rightarrow \lambda_5 = 08 + 02 = 10$$

-مرحلة الإياب

عند القمة X_5

$$\lambda_5 = 10$$

$$\lambda_5-\lambda_4=10-08=02\in(X_4,X_5)$$
$$\lambda_5-\lambda_3=10-05=05\notin(X_3,X_5)$$

عند القمة X_4

$$\lambda_4-\lambda_1=08-03=05\notin(X_4,X_1)$$
$$\lambda_4-\lambda_2=08-07=01\in(X_4,X_2)$$

عند القمة X_3

$$\lambda_3-\lambda_1=05-03=02\in(X_3,X_1)$$
$$\lambda_3-\lambda_0=05-0=05\notin(X_3,X_0)$$

عند القمة X_2

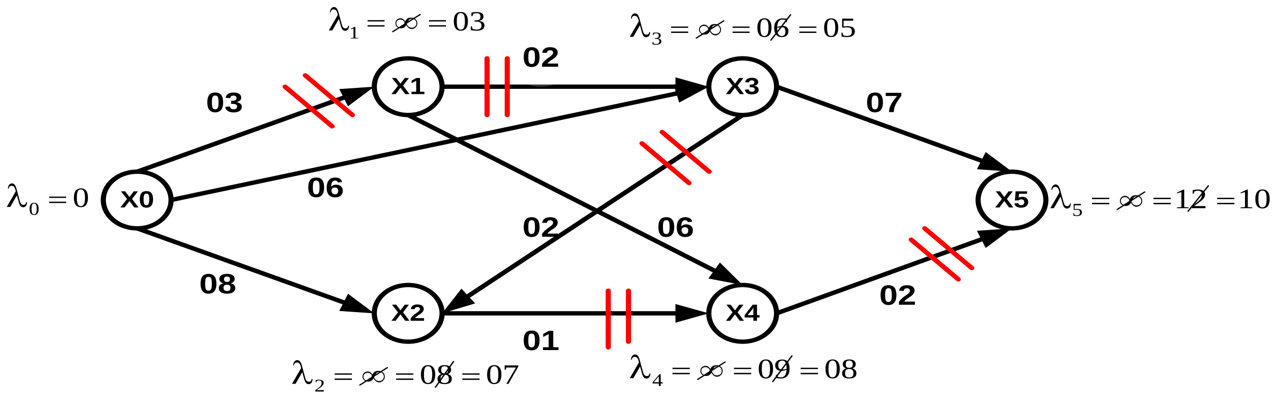
$$\lambda_2-\lambda_3=07-05=02\in(X_2,X_3)$$
$$\lambda_2-\lambda_0=07-0=07\notin(X_2,X_0)$$

عند القمة X_1

$$\lambda_1-\lambda_0=03-0=03\in(X_0,X_1)$$

وعليه فإن أقصر مسار هو $X_0-X_1-X_3-X_2-X_4-X_5$

ويمكن توضيح جميع الحسابات السابقة والنتائج المتوصل اليها من خلال الشبكة التالية:



02-02-02 البحث عن أطول مسار: من أجل إيجاد المسار ذي القيمة العظمى عبر الشبكة بإستخدام طريقة فورد نتبع الخطوات التالية:

-نعيد تسمية قمم البيان على النحو التالي، قمة الإنطلاق X_0 والقمة الموالية X_1 وهكذا حتى قمة الوصول إلى النهاية تكون X_{n-1} حيث أن العدد الكلي للقمم هو n.

-بجانب القمة X_0 نضع $\lambda_0=0$، بجانب بقية القمم X_i حيث $i\neq 0$ نضع القيمة $\lambda_i=0$

-نفترض أن $L(X_i,X_j)$ هي حمولة القوس

-مرحلة الذهاب

-في كل قمة X_j تكون فيها $\left(\lambda_j-\lambda_i\right)<L\left(X_i,X_j\right)$، إذا تحقق الشرط نعوض ب λ_j كمايلي

$$\lambda_j=\lambda_i+L\left(X_i,X_j\right)$$

-نستمر بالعملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_j

-أما إذا كانت $\left(\lambda_j-\lambda_i\right)>L\left(X_i,X_j\right)$ فإن قيمة λ_j تبقى كما كانت سابقا.

وإذا كان دليل الطرف الأيمن للسهم هو (i) أكبر من دليل الطرف النهائي (j) أي i>j فيجب وضع (i=j) وإعادة الحساب من قيمة i

-مرحلة الإياب

من أجل تحديد المسار ذو القيمة العظمى الذي يبدأ من X_0 وينتهي عند X_{n-1} يكفي أن نحدد إنطلاقا من نهاية الشبكة السهم الذي يكون الفرق بين قيم رؤوسه $\left(\lambda_j-\lambda_i\right)$ وطول القيمة المرافقة $L\left(X_i,X_j\right)$ متساويان.

مثال:نفس المثال السابق

المطلوب: تحديد أطول مسار في الشبكة باستخدام طريقة فورد FORD

الحل:

-مرحلة الذهاب

الأقواس التي تنطلق من X_0 هي $\left(X_0,X_1\right),\left(X_0,X_2\right),\left(X_0,X_3\right)$

عند القمة X_1 نجد

$$\lambda_1-\lambda_0=0-0=0<03$$
$$\lambda_1=\lambda_0+L\left(X_0,X_1\right)\Rightarrow\lambda_1=0+03=03$$

عند القمة X_2 نجد

$$\lambda_2-\lambda_0=0-0=0<08$$
$$\lambda_2=\lambda_0+L\left(X_0,X_1\right)\Rightarrow\lambda_2=0+08=08$$

عند القمة X_3 نجد

$$\lambda_3-\lambda_0=0-0=0<06$$
$$\lambda_3=\lambda_0+L\left(X_0,X_1\right)\Rightarrow\lambda_3=0+06=06$$

الأقواس التي تنطلق من X_1 هي $\left(X_1,X_4\right),\left(X_1,X_3\right)$

عند القمة X_3 نجد

$$\lambda_3-\lambda_1=06-03=03>02$$

لا تتغير

عند القمة X_4 نجد

$$\lambda_4 - \lambda_1 = 0 - 03 = -03 < 06$$
$$\lambda_4 = \lambda_1 + L(X_1, X_4) \Rightarrow \lambda_4 = 03 + 06 = 09$$

الأقواس التي تنطلق من X_2 هي (X_2, X_4)

عند القمة X_4 نجد

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 09 - 08 = 01 = 01$$

لا يوجد تغيير

الأقواس التي تنطلق من X_3 هي $(X_3, X_2), (X_3, X_5)$

عند القمة X_2 نجد $i = 02, j = 03$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 08 - 06 = 02 = 02$$

وبما أن $(i > j)$ نضع $(i = j = X_2)$ ثم نعيد حساب λ_j من جديد أي من الرأس X_2

$$\lambda_4 - \lambda_2 = 09 - 08 = 01 = 01$$

إذن تبقى بدون تغيير $\lambda_4 = 09$

عند القمة X_3 نجد

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 08 - 06 = 02 = 02$$
$$\lambda_2 = 08$$

عند القمة X_5 نجد

$$\lambda_5 - \lambda_3 = 0 - 06 = -06 < 07$$
$$\lambda_5 = \lambda_3 + L(X_3, X_5) \Rightarrow \lambda_5 = 06 + 07 = 13$$

عند القمة X_4 نجد

$$\lambda_5 - \lambda_4 = 13 - 09 = 04 > 02$$

تبقى دون تغيير $\lambda_5 = 13$

-مرحلة الإياب

عند القمة X_5

$$\lambda_5 = 13$$
$$\lambda_5 - \lambda_4 = 13 - 09 = 04 \notin (X_4, X_5)$$

$$\lambda_5-\lambda_3=13-06=07\in(X_3,X_5)$$

عند القمة X_4

$$\lambda_4-\lambda_1=09-03=06\notin(X_4,X_1)$$
$$\lambda_4-\lambda_2=09-08=01\in(X_4,X_2)$$

عند القمة X_3

$$\lambda_3-\lambda_1=06-03=03\notin(X_3,X_1)$$
$$\lambda_3-\lambda_0=06-0=06\in(X_3,X_0)$$

عند القمة X_2

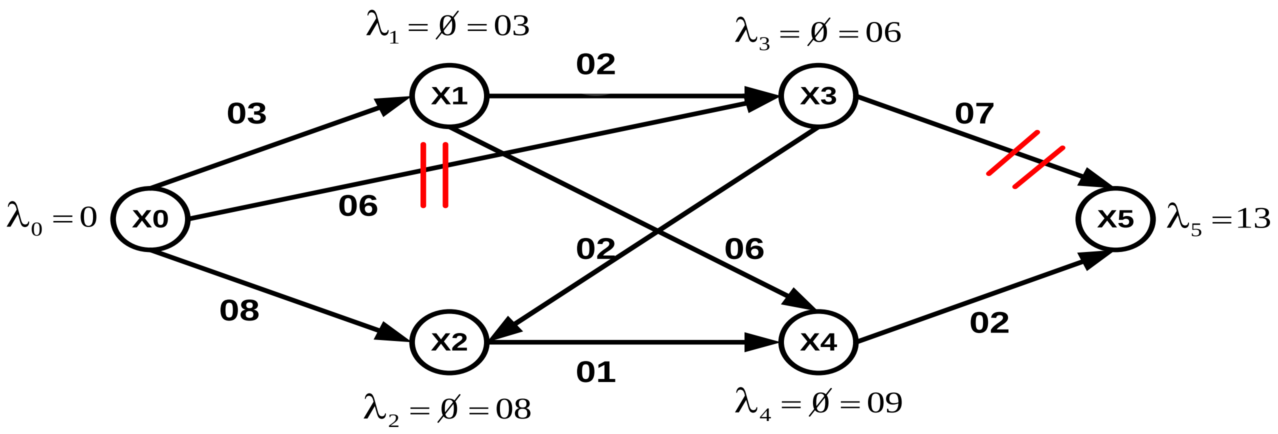
$$\lambda_2-\lambda_3=08-06=02\in(X_2,X_3)$$
$$\lambda_2-\lambda_0=08-0=08\in(X_2,X_0)$$

عند القمة X_1

$$\lambda_1-\lambda_0=03-0=03\in(X_0,X_1)$$

وعليه فإن أطول مسار هو $X_0-X_3-X_5$

ويمكن توضيح جميع الحسابات السابقة والنتائج المتوصل اليها من خلال الشبكة التالية:



03-02 طريقة بيلمان BELLMAN: سميت بهذا الإسم نسبة إلى أول من إستعملها، وسيتم إستخدامها سواء في حالة البحث عن أقصر مسار أو عن أطول مسار

01-03-02 البحث عن أقصر مسار: لإيجاد أقصر مسار في الشبكة نتبع الخطوات التالية

-نرقم رؤوس الشبكة ترقيما تسلسليا معينا من 01 الى n.

-نضع على رؤوس الشبكة القيم λ_j

-نبدأحساب قيم λ_i إبتداءا من الخلف من نهاية الشبكة كالتالي:

قيمة λ_i تساوي أدنى قيم λ_j الموجودة عند رؤوس (X_j) التي تنتهي عندها الأسهم التي تنطلق من الرأس (X_i)

مضافا إليها القيم المرافقة لهذه الأسهم أي $\lambda_i = \left(\begin{matrix} MIN \\ j=1...n \end{matrix}\right)\left(\lambda_j + L\left(X_i, X_j\right)\right)$

-نعطي ل λ_n القيمة 0 $\left(\lambda_n = 0\right)$

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب: أوجد أقصر مسار في الشبكة بإستخدام طريقة بيلمان BELLMAN

الحل:

$$\lambda_6 = 0$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 + L\left(X_5, X_6\right) \Rightarrow \lambda_5 = 0 + 02 = 02$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 + L\left(X_3, X_5\right) \Rightarrow \lambda_3 = 02 + 01 = 03$$

$$\lambda_4 = \left(\begin{matrix} Min \\ j=3,6 \end{matrix}\right)\left(\lambda_3 + L\left(X_4, X_3\right), \lambda_6 + L\left(X_4, X_6\right)\right) \Rightarrow \lambda_4 = Min\left(03+02, 0+07\right)$$

$$\lambda_4 = 05$$

$$\lambda_2 = \left(\begin{matrix} Min \\ j=4,5 \end{matrix}\right)\left(\lambda_4 + L\left(X_2, X_4\right), \lambda_5 + L\left(X_2, X_5\right)\right) \Rightarrow \lambda_2 = Min\left(05+02, 02+06\right)$$

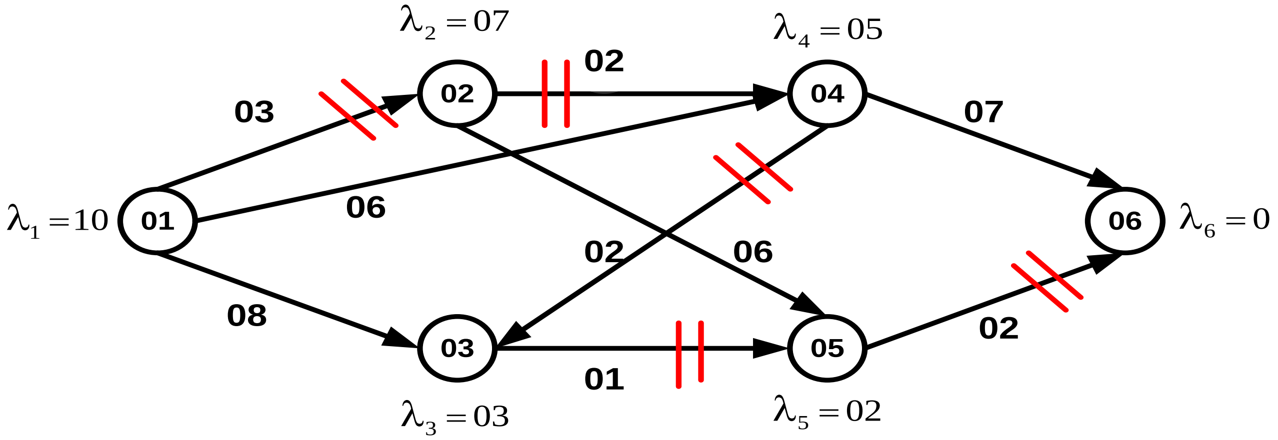
$$\lambda_4 = 07$$

$$\lambda_1 = \left(\begin{matrix} Min \\ j=2,3,4 \end{matrix}\right)\left(\lambda_2 + L\left(X_1, X_2\right), \lambda_3 + L\left(X_1, X_3\right), \lambda_4 + L\left(X_1, X_4\right)\right)$$

$$\lambda_1 = Min\left(07+03, 03+08, 05+06\right) \Rightarrow \lambda_1 = 10$$

وعليه أقصر مسار هو 01-02-04-03-05-06

ويمكن توضيح جميع الحسابات السابقة والنتائج المتوصل اليها من خلال الشبكة التالية:



02-03-02 البحث عن أطول مسار:من أجل تحديد أطول مسار نتبع نفس الخطوات السابقة كما في حالة التدنية مع الفارق المتمثل في أخذ القيم العليا وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\lambda_i = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ j=1...n \end{matrix}\right)\left(\lambda_j + L\left(X_i, X_j\right)\right)$$

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب: أوجد أطول مسار في الشبكة بإستخدام طريقة بيلمان BELLMAN

الحل:

$$\lambda_6 = 0$$

$$\lambda_5 = \lambda_6 + L\left(X_5, X_6\right) \Rightarrow \lambda_5 = 0 + 02 = 02$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 + L\left(X_3, X_5\right) \Rightarrow \lambda_3 = 02 + 01 = 03$$

$$\lambda_4 = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ j=3,6 \end{matrix}\right)\left(\lambda_3 + L\left(X_4, X_3\right), \lambda_6 + L\left(X_4, X_6\right)\right) \Rightarrow \lambda_4 = \text{Max}\left(03+02, 0+07\right)$$

$$\lambda_4 = 07$$

$$\lambda_2 = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ j=4,5 \end{matrix}\right)\left(\lambda_4 + L\left(X_2, X_4\right), \lambda_5 + L\left(X_2, X_5\right)\right) \Rightarrow \lambda_2 = \text{Max}\left(07+02, 02+06\right)$$

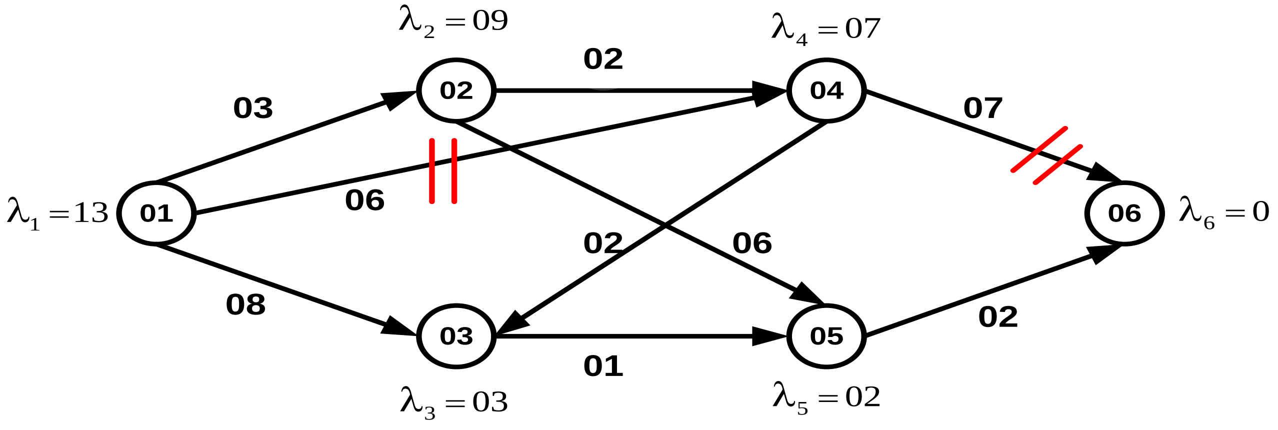
$$\lambda_4 = 09$$

$$\lambda_1 = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ j=2,3,4 \end{matrix}\right)\left(\lambda_2 + L\left(X_1, X_2\right), \lambda_3 + L\left(X_1, X_3\right), \lambda_4 + L\left(X_1, X_4\right)\right)$$

$$\lambda_1 = \text{Max}\left(09+03, 03+08, 07+06\right) \Rightarrow \lambda_1 = 13$$

وعليه أطول مسار هو 01-04-06

ويمكن توضيح جميع الحسابات السابقة والنتائج المتوصل اليها من خلال الشبكة التالية:



02-04 طريقة دانزيغ DANTZIG: سميت بهذا الإسم نسبة إلى أول من إستعملها، وسيتم إستخدامها سواء في حالة البحث عن أقصر مسار أو عن أطول مسار.

02-04-01 البحث عن أقصر مسار:لإيجاد المسار ذو القيمة الدنيا في الشبكة نتبع الخطوات التالية:

–نرقم رؤوس الشبكة ترقيما تسلسليا معينا من 01 إلى غاية n.

–نضع على رؤوس الشبكة القيم λ_i

–نبدأ حساب قيم λ_i إبتداءا من الأمام (من بداية الشبكة) كالتالي:

–قيمة λ_j تساوي أدنى قيمة ل λ_i الموجودة عند الرؤوس والتي تنطلق منها الأسهم والتي تصب في الرأس X_J مضافا إليها القيم المرافقة لهذه الأسهم، والتي تعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$\lambda_j = \begin{pmatrix} \text{Min} \\ i=1...n \end{pmatrix} \left(\lambda_i + L\left(X_i, X_j\right)\right)$$

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب: أوجد أقصر مسار في الشبكة بإستخدام طريقة دانتزيغ DANTZIG

الحل:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 + L\left(X_1, X_2\right) \Rightarrow \lambda_2 = 0 + 03 = 03$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} \text{Min} \\ i=1,2 \end{pmatrix} \left(\lambda_2 + L\left(X_2, X_4\right), \lambda_1 + L\left(X_1, X_4\right)\right) \Rightarrow \lambda_4 = \text{Min}\left(03+02, 0+06\right)$$

$$\lambda_4 = 05$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} \text{Min} \\ i=1,4 \end{pmatrix} \left(\lambda_1 + L\left(X_1, X_3\right), \lambda_4 + L\left(X_4, X_3\right)\right) \Rightarrow \lambda_3 = \text{Min}\left(0+08, 05+02\right)$$

$$\lambda_4 = 07$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} \text{Min} \\ i=2,3 \end{pmatrix} \left(\lambda_2 + L\left(X_2, X_5\right), \lambda_3 + L\left(X_3, X_5\right)\right) \Rightarrow \lambda_5 = \text{Min}\left(03+06, 07+01\right)$$

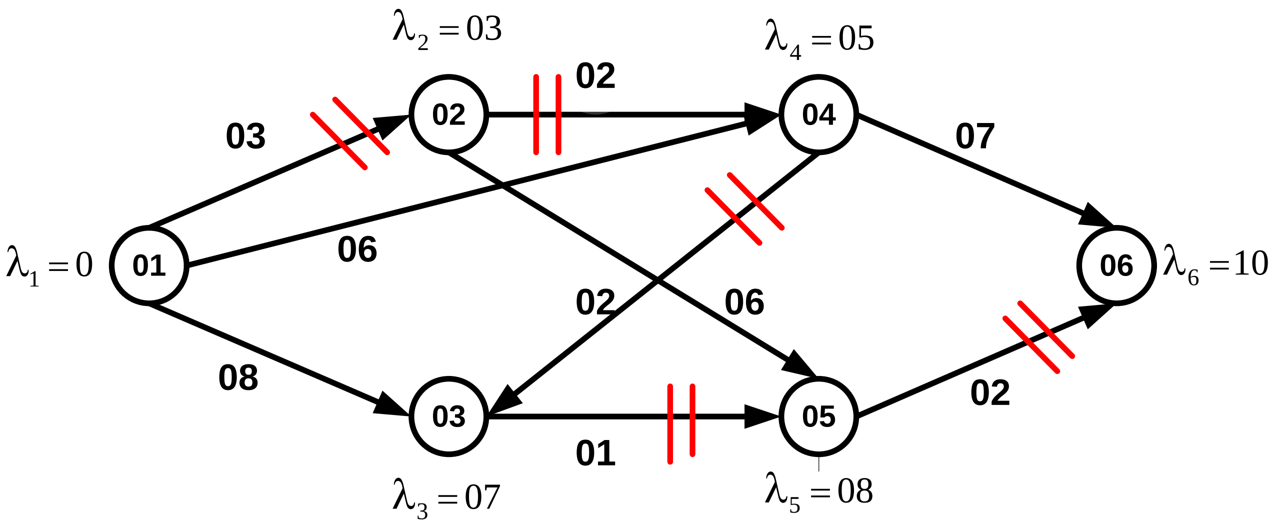
$$\lambda_4 = 08$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} \text{Min} \\ i=4,5 \end{pmatrix} \left(\lambda_4 + L\left(X_4, X_6\right), \lambda_5 + L\left(X_5, X_6\right)\right) \Rightarrow \lambda_6 = \text{Min}\left(05+07, 08+02\right)$$

$$\lambda_6 = 10$$

وعليه أقصر مسار هو 01–02–04–03–05–06

ويمكن توضيح جميع الحسابات السابقة والنتائج المتوصل اليها من خلال الشبكة التالية:



02-04-02 البحث عن أطول مسار:لإيجاد المسار ذو القيمة العظمى في شبكة ما بإستخدام طريقة دانزيغ DANTZIG نتبع نفس الخطوات السابقة كما في حالة التدنية ماعدا معيار الأمثلية فيجب أخذه بالقيمة العظمى MAX وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\lambda_j = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ i=1\ldots n \end{matrix}\right)\left(\lambda_i + L\left(X_i, X_j\right)\right)$$

مثال: نفس المثال السابق

المطلوب: أوجد أطول مسار في الشبكة بإستخدام طريقة دانتزيغ DANTZIG

الحل:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \lambda_0 + L\left(X_1, X_2\right) \Rightarrow \lambda_2 = 0 + 03 = 03$$

$$\lambda_4 = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ i=1,2 \end{matrix}\right)\left(\lambda_2 + L\left(X_2, X_4\right), \lambda_1 + L\left(X_1, X_4\right)\right) \Rightarrow \lambda_4 = \text{Max}\left(03+02, 0+06\right)$$

$$\lambda_4 = 06$$

$$\lambda_3 = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ i=1,4 \end{matrix}\right)\left(\lambda_1 + L\left(X_1, X_3\right), \lambda_4 + L\left(X_4, X_3\right)\right) \Rightarrow \lambda_3 = \text{Max}\left(0+08, 06+02\right)$$

$$\lambda_4 = 08$$

$$\lambda_5 = \left(\begin{matrix} \text{Max} \\ i=2,3 \end{matrix}\right)\left(\lambda_2 + L\left(X_2, X_5\right), \lambda_3 + L\left(X_3, X_5\right)\right) \Rightarrow \lambda_5 = \text{Max}\left(03+06, 08+01\right)$$

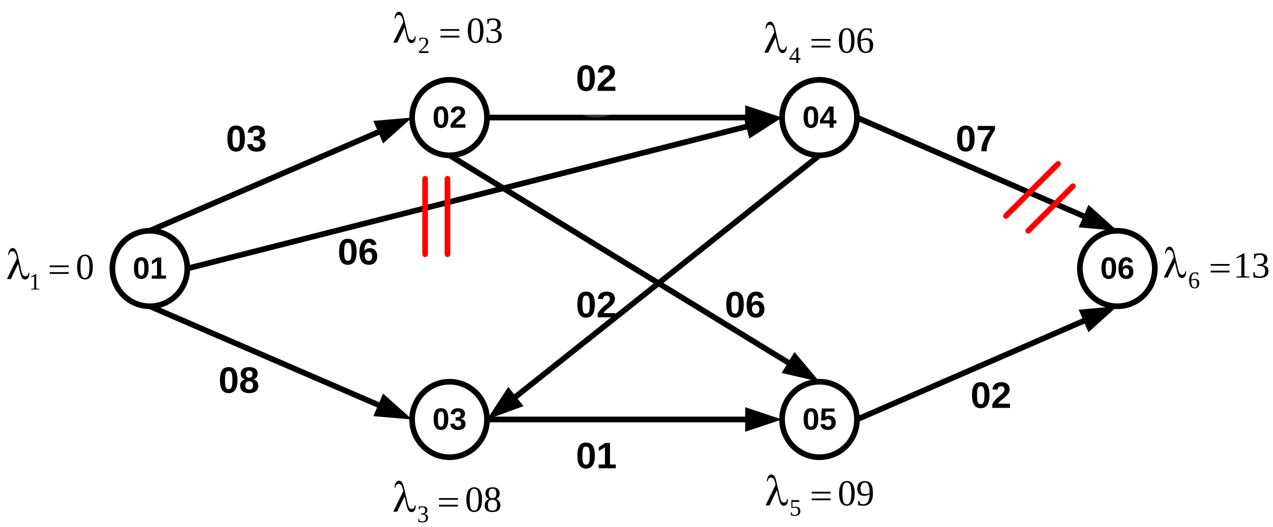
$$\lambda_4 = 09$$

$$\lambda_6=\left(\begin{matrix}Max\\ i=4,5\end{matrix}\right)\left(\lambda_4+L(X_4,X_6),\lambda_5+L(X_5,X_6)\right)\Rightarrow\lambda_6=Max(06+07,09+02)$$

$$\lambda_6=13$$

وعليه أطول مسار هو 01−04−06

ويمكن توضيح جميع الحسابات السابقة والنتائج المتوصل اليها من خلال الشبكة التالية:



ثالثا:شبكة الأعمال الأنشطة (CPM,PERT)

شبكات الأعمال: هي أحد أساليب بحوث العمليات التي تستخدم في مجال التخطيط والرقابة على الأداء ، وأن عملية التخطيط والرقابة تؤدي دورا مهما و بارزا في إنجاح المشاريع ، بكونها ذات طابع هندسي يعتمد على الأشكال والرسومات البيانية والهندسية كأساس لتطبيق العلاقات الرياضية التي تربط بين متغيرات التخطيط والرقابة المختلفة ومنها الوقت والكلفة ، الموارد المادية وما إلى ذلك.

أولا: مفهوم الشبكات

إن شبكات العمل تعتبر أحد أساليب المنهج الكمي في إدارة الأعمال التي تستخدم في مجال التخطيط والرقابة لتنفيذ المشاريع ألإنتاجية، والخدمة، سوا ء كانت المتوسطة والكبيرة الحجم منها وهو أحد الأساليب الكمية لبحوث العمليات.

إن الشبكات هي تلك الأشكال البيانية والهندسية التي تعبر عن مشكلة معينة في واقع الحال،ويتم تصميم الشبكات على الأغلب من خلال الأسهم وتعرف بالنشاط، ونقاط التعارف أو ما يعرف ب الأحداث، وتستخدم هذه الشبكات في مختلف المجالات في الواقع العملي، سواء كانت ألإنشائية منها أو ألإنتاجية أو العلمية أو الخدمية وغير ذلك ،إذ أن تصميم ودراسة المشاريع الكبيرة والمعقدة التي تتصف بمرحلية التنفيذ تتطلب وضع خرائط ودراسات تمهيدية تشرح تطور المشروع من ناحية تسلسل العمل الإنشائي أو الإنتاجي، بما يتناسب مع

المراحل الزمنية المقترحة والملائمة للعمل، إذ تنصب فكرة المفهوم الاقتصادي لشبكات العمل حول كيفية استخدام الموارد النادرة أو المحددة لتحقيق أهداف المنظمات المختلفة.

إن شبكات الأعمال يمكن التعبير عنها من خلال صيغ وأساليب ونماذج مختلفة يمكن توضيحها على النحو التالي:

- **نماذج أقصر الطرق:** تستخدم هذه النماذج عندما يكون المطلوب هو تحديد أقصر طريق بين نقطتين أو أقصر طريق بين نقطة معينة وجميع النقاط الأخرى في شبكة الأعمال أو أقصر طريق بين كل نقطتين في شبكة الأعمال.
- **نماذج أقصى تدفق:** إن هذا النوع من النماذج مشابه لما هو وارد في النموذج الأول إلا أنها تستخدم في تحديد أقصى تدفق من الأرباح أو الموارد المالية التي يمكن تحقيقها من خلال تطبيق شبكات الأعمال.
- **نماذج شبكات الأعمال(الأزمنة):** إن هذه النماذج تهدف إلى تحديد الأزمنة المتتابعة والمتوازية للمشاريع المختلفة، وكذلك تحديد الوقت لكل نشاط والتعرف على المسارات الحرجة في شبكة أعمال المشروع، وبالنظر لأهمية هذه الأنواع من النماذج وكونها مرتبطة بشكل مباشر بموضوع إدارة المشاريع مع التأكد على دورها في التخطيط والرقابة ، وبشكل عام تقسم هذه النماذج إلى مايلي:
  - ✓ أسلوب أو مخطط جانت GANTT CHART
  - ✓ أسلوب المسار الحرج CPM(critical path méthod)
  - ✓ أسلوب مراجعة وتقييم البرامج PERT(program évaluation review and technique)
  - ✓ الأسلوب البياني لتقييم البرامج GERT(graphical évaluation review and technique)

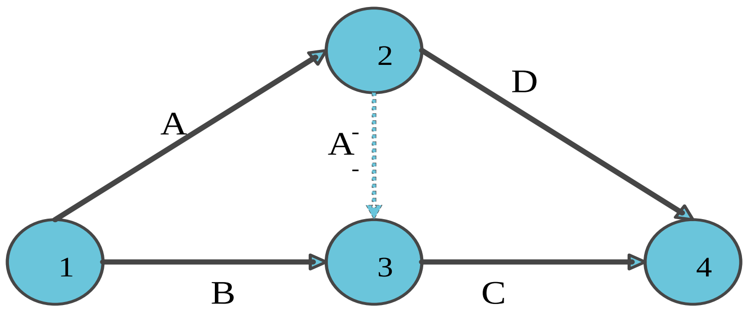
ثانيا: المفاهيم الأساسية للمخططات الشبكية

❖ **الحدث:** هي عبارة عن لحظة من الزمن تدل على إنجاز بعض الأزمنة وبداية الأزمنة الأخرى، حيث أن البداية والنهاية لكل نشاط يعبر عنهما بحدثين أحدهما يعرف بحدث البداية، ولآخر حدث النهاية، وتوصف الأحداث أيضا بأنها لحظة محددة من الزمن وليست مدة منه، وهي لا تحتاج إلى وقت أو موارد أو جهد، ويكن تمثيلها بشكل هندسي كالدائرة أو المربع أو المثلث وما إلى ذلك.

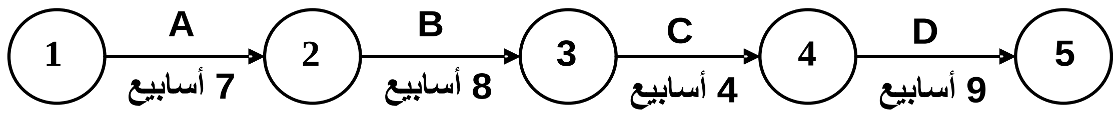
❖ **الأزمنة:** هي إحدى عناصر المشروع التي يجب إنجازها وتقع بين حدثين الأول يعرف باسم الحدث السابق والثاني الحدث اللاحق ،فالنشاطات التي هي حصيلة مجموعة أحداث لا يمكن البدء بها إلا إذا أنجزت النشاطات السابقة لها بالكامل وتمتاز بأنها تحتاج إلى وقت و موارد مالية ويتم تمثيلها في الرسم بسهم واتجاه السهم يبين حدوث الأحداث أما طول السهم فإنه لا يمثل أي شئ ، وأما وقت الإنجاز فيمكن كتابته أسفل أو أعلى السهم علما بأن كل سهم يمثل نشاطا مستقلا أي نشاط واحد فقط ، وتنقسم الأزمنة إلى:

- **أنشطة حقيقة:** وهي تعبر عن المهام و الأعمال الواجب تنفيذها للانتقال من حدث معين إلى آخر في إطار شبكة متكاملة من المهام أو النشاطات ، حيث يعبر عن هذه الأزمنة من خلال الأسهم التي يتجه رأسها إلى الأمام وبالتحديد انطلاقا من حدث البداية باتجاه حدث النهاية ، وقد تكون هذه الأزمنة عادية–حرجة

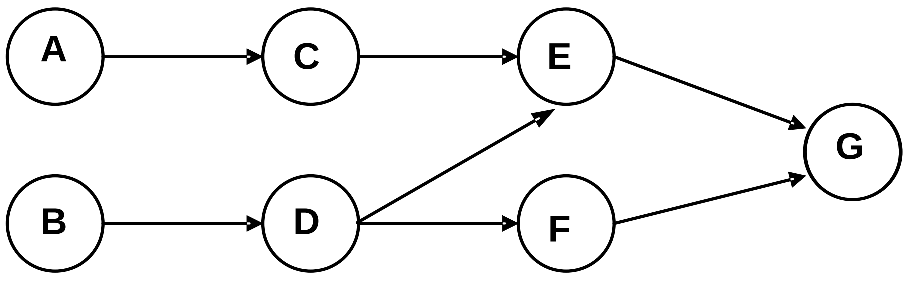
➢ **أنشطة وهمية:** وهي أنشطة ذات دور تنسيقي في شبكة الأعمال، وعادة تمثل في هيئة سهم متقطع (---) وليس لها أي وجود في الواقع العملي لذلك فهي لا تستلزم أي موارد لإنجازها وأن وقت استغراقها يساوي صفرا.
والشكل التالي يوضح ذلك



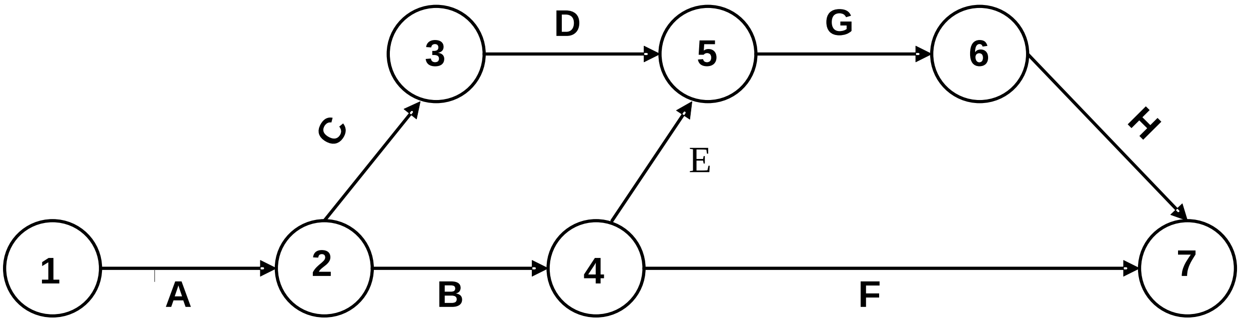
➢ **أنشطة متتابعة أو متعاقبة أو لاحقة:** وهي الأزمنة التي تحدث بتسلسل وتتابع وتعاقب محدد ويوضح الشكل 2.3، أنه لا يمكن البدء بتنفيذ النشاط(D) إلا بعد إنهاء النشاط (C) وحدوث الحدث 4 ولا يمكن حدوث الحدث 4 قبل إنهاء النشاط (C) ولا يمكن البدء في النشاط (C) إلا بعد انتهاء النشاط (B) وحدوث الحدث 3 ، ولا يمكن حدوث الحدث 2 قبل إنهاء النشاط(A) ولا يمكن تنفيذ النشاط (A) قبل حدوث أو تحديد لحظة بداية المشروع أو حدوث الحدث 1 وهكذا.



➢ **الأزمنة السابقة:** تتعلق هذه القاعدة ب الأزمنة التي لا يمكن البدء بإنجازها إلا بعد الإنتهاء من إنجاز الأزمنة التي تسبقها وتعتمد عليها، لذلك يجب توفير المعلومات المتعلقة بتسلسل وقوع الحوادث كي يتم وصف ألاعتماد المتبادل بين أنشطة المشروع المختلفة وبدقة.
والشكل التالي يوضح ذلك:



➢ **الأزمنة المتوازية:** وهي أنشطة يتم تنفيذها في نفس الوقت الذي تنفذ فيه أنشطة أخرى حيث يظهر الشكل الموالي الأزمنة المتوازية (G;D;C) التي يمكن تنفيذها أثناء تنفيذ النشاطين(F;B) ويلاحظ بأن شبكة الأعمال تشتمل على أنشطة متتابعة وأنشطة متوازنة ف الأزمنة (A;C;D;G;H) تمثل أنشطة متتابعة وكذلك الأزمنة(A;B) وتمثل أنشطة متتابعة ، إلا انه يمكن تنفيذ الأزمنة (C;D;G;H) في نفس الوقت الذي ينفذ فيه النشاطان (B;F) باعتبارها أنشطة متوازية. كما يوضح الشكل التالي



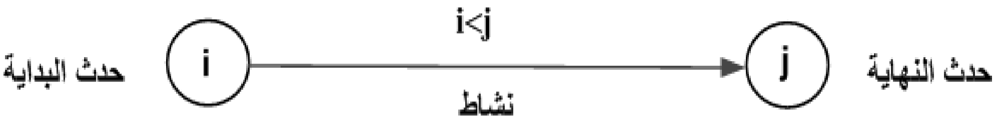
ويلاحظ من الشبكة أن الحدث 2 يمثل لحظة بداية أكثر من نشاط هما النشاطين (B;C) كما قد يمثل الحدث لحظة انتهاء أكثر من نشاط مثل الحدث 7 بالشبكة حيث يمثل لحظة انتهاء النشاطين (H;F) كما يلاحظ أنه لا يمكن البدء في النشاط(G) إلا بعد الإنتهاء من الأزمنة السابقة(A;C;B;D;E) وحدوث الحدث 5 ،كما لا يجوز البدء في تنفيذ النشاط(F) إلا بعد الإنتهاء من تنفيذ الأزمنة (A;B) لكن لا يوجد ما يمنع من تنفيذ النشاطين(E;F) في آن واحد باعتبارهما أنشطة متوازية، ويتوقف البدء في تنفيذهما على حدوث الحدث 4 أي الإنتهاء من النشاط السابق (B)

- ❖ **الشبكة:** وهي المخططات التي تعرض تدفق الأزمنة ذات الترابط والتزامن، المنطقي بالإضافة إلى إظهار العلاقات المتبادلة بينهما
- ❖ **التبعية:** أي نشاط داخل الشبكة يقال أنه يتبع نشاط آخر إذا كانت بداية هذا النشاط تلي نهاية النشاط الآخر.
- ❖ **المسار:** هو سلسلة من الأزمنة تربط حدث البداية بأي حدث آخر.
- ❖ **المسار الحرج:** هو عبارة عن سلسلة مستمرة من الأزمنة الحرجة التي تربط بين نقطة البدء ونقطة إتمام المشروع، وهي أطول المسارات على الشبكة وتعطي أقل وقت لازم لإتمام المشروع، ومن الممكن أن يكون للمشروع الواحد أكثر من مسار حرج.
- ❖ **النشاط الحرج:** هو النشاط الذي سوف يترتب على تأخيره تأخير في وقت إتمام المشروع بالكام ل, وغالبا ما يوجد أكثر من نشاط حرج واحد على الشبكة.
- ❖ **الزمن العادي:** وهو مقدار الزمن المقدر والمتوقع لإنجاز النشاط بالموارد العادية.
- ❖ **الزمن المختزل(المعجل):** وهو مقدار الزمن(ويسمى أيضا الزمن العائم) الذي يمكن اختزاله من زمن النشاط العادي دون ألتأثير سلبيا على الزمن الكلي لإنجاز المشروع، ويستخدم عادة هذا الزمن في اختزال الزمن الكلي للمشروع.
- ❖ **التكلفة العادية:** وهي مجموع النفقات المستخدمة في تنفيذ النشاط العادي.
- ❖ **التكلفة المختزلة:** وهي تكلفة الزمن المختصر وتزداد كلما زاد الزمن والعكس صحيح.

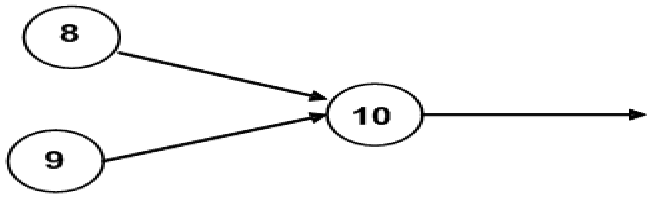
ثالثا: القواعد المتبعة في بناء الشبكات

هناك أعراف مراعاتها عند رسم المخططات الشبكية من أهمها:

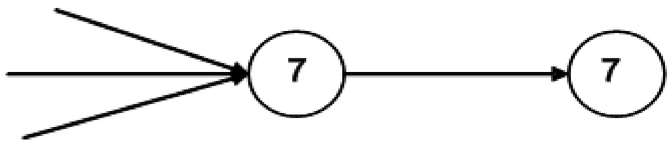
- إن لكل مخطط هناك حدث évent بداية واحد وآخر حدث نهاية



- قبل البدء بأي نشاط(activity) فإن جميع الأزمنة السابقة لابد أن تكون قد استكملت فالنشاط 10 لا يمكن البدء به قبل الإنتهاء من النشاطين(8،9)

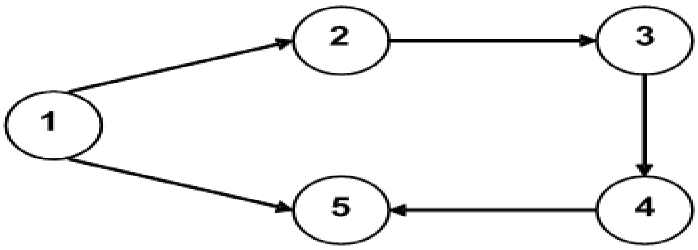


- لا يمكن تكرار الأحداث في المخطط الشبكي

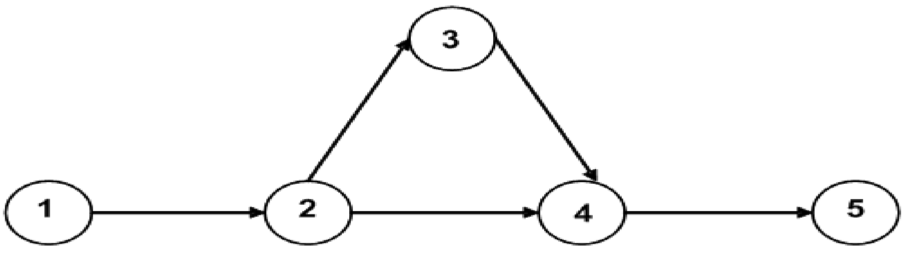


- إن الأسهم التي تمثل الأزمنة يجب أن تأخذ اتجاها محددا من حدث البداية للمشروع إلى حدث النهاية ، ولا يجوز في هذه الحالة العودة إلى الوراء أو إتباع أسلوب الدوران

حالة العودة إلى الوراء

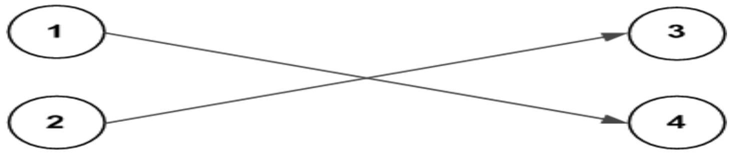


حالة الدوران

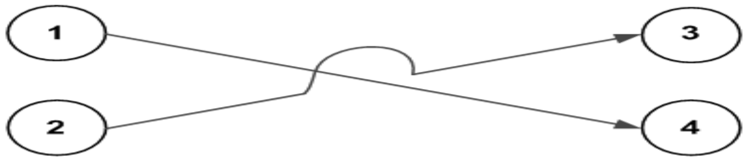


- كل نشاط داخل الشبكة يمثل بسهم واحد فقط.

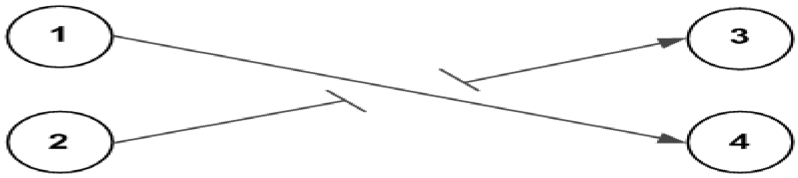
- لشبكة الشروع نقطة بداية لحدث واحد فقط، ولا يسبق البداية شيء، كما أن للشبكة نقطة نهاية(حدث) واحد فقط، ولا يتبع النهاية شيء آخر، وقد يطلق على الأول نقطة المنبع والثاني نقطة المصب.
- تجنب تقاطع الأسهم داخل الشبكة.



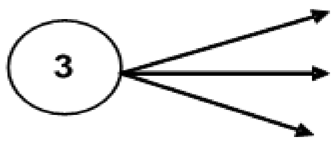
ويمكن معالجة ذالك إما باستخدام رسم الأنابيب



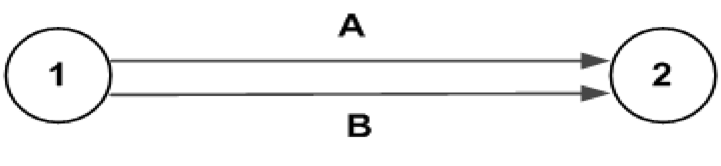
أو باستخدام رسم تقاطع الأزمنة



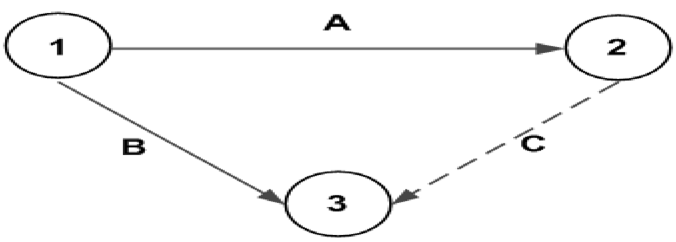
- لكل حدث يمكن أن يخرج منه أكثر من نشاط واحد



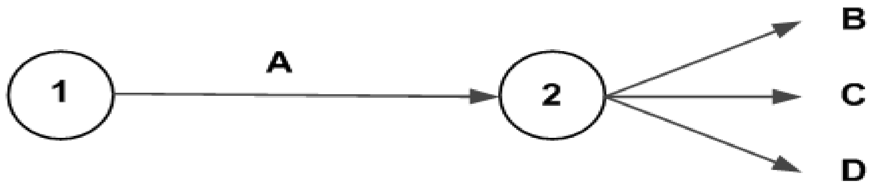
- يمكن إعطاء أرقام داخل الحدث بتسلسل منطقي من 1 إلى n من الأحداث.
- لا يجوز الرجوع من حدث مبكر إلى آخر تم سابقا إلا في حالة استخدام الأزمنة الوهمية.
- لا يمكن أن يبدأ أكثر من نشاط واحد من حدث واحد وينتهي في حدث واحد كما هو موضح



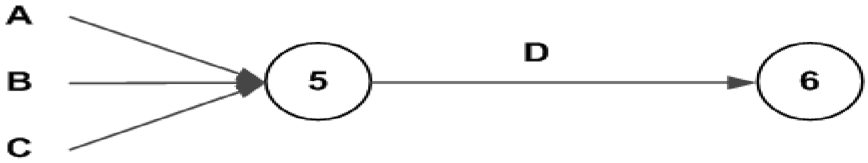
ويفترض أن يعالج هذا الأمر من خلال إدخال نشاط ثالث وسيط يعرف بالنشاط الوهمي ،كمايلي:



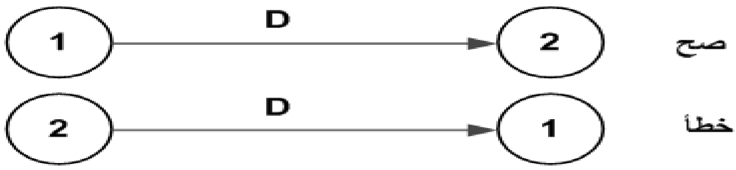
➢ يمكن أن يكون حدث النهاية لأحدى الأزمنة هو بمثابة حدث لأنشطة أخرى كما هو موضح:



➢ يمكن أن يكون حدث النهاية لمجموع الأزمنة هو حدث بداية لنشاط آخر كما هو موضح:



إن اتجاه الرسم يكون على أساس قاعدة البدء من الحدث الصغير لغاية الحدث الكبير وليس العكس

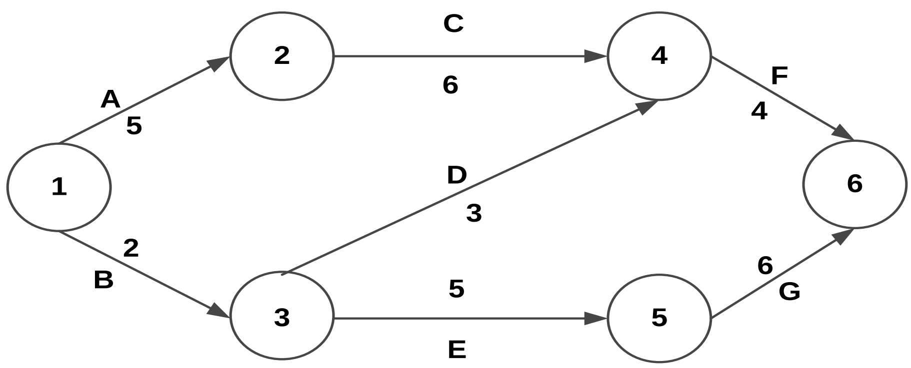


مثال01: ليكن لديك أنشطة مشروع ما كما هو موضح في الجدول التالي

النشاط اللاحق	النشاط السابق	الوقت(يوم)
A	---------	5
B	---------	2
C	A	6
D	B	3
E	B	5
F	C; D	4
G	E	6

المطلوب: رسم شبكة المشروع

الحل:



رابعا:أساليب التحليل الشبكي

تعتبر طريقة المخطط الشبكي إحدى الطرق الحديثة نسبيا في إدارة المشاريع ،والتي ظهرت نتيجة لحاجات عجزت عن تلبيتها الطريقة التي سبقتها ، ونخص بالذكر طريقة جانت.

لذلك ظهرت في نهاية الخمسينات مجموعة من أساليب شبكات الأعمال وأهمهما أسلوبي **CPM/PERT** ويهدف كل من الأسلوبين إلى تقديم مدخل بياني لجدولة وتخطيط المشاريع، يساعد مدير المشروع في تصور الأزمنة اللازمة والوقت المتوقع لإنجازها وتحديد العلاقات الفنية بينها، وبالتالي تقدير الوقت المتوقع للانتهاء من المشروع ،كذلك فإن كل منهما يمكن من متابعة تقدم التنفيذ في الأزمنة للتعرف على سير الأداء والكشف عن الانحرافات واتخاذ الإجراءات اللازمة لضمان حسن سير الأداء.

كما وقد ظهر أسلوب آخر هو أسلوب **GERT** وهو نموذج معدل من الأسلوبين السابقين**CPM/PERT** .

خامسا: أسلوب المسار الحرج CPM

إن أسلوب **CPM** هو أحد أساليب التحليل الشبكي المهمة التي تستخدم لأغراض التخطيط والمتابعة ، ولقد تم استنباط ألاسم العلمي " **critical path méthod**" حيث الرمز **CPM** هو الحرف الأول من كل واحد من الكلمات الواردة في المصطلح المذكور، ويستخدم هذا الأسلوب لمعرفة الفترة الزمنية التي يستغرقها تنفيذ المشروع بكامله.

05-01: التطور التاريخي لCPM

ظهر هذا الأسلوب في عام 1957 على يد كل من **(j.E.Kelly)** في شركة **(Remington-Rand)** و**(M.R.Walker)** في شركة **(Du pont)** بغرض المساعدة في جدولة عمليات التعطل بسبب الصيانة في مصانع المواد الكيماوية ، وقد ذاع صيت هذا الأسلوب الذي أطلق عليه أسلوب المسار الحرج **CPM** بسبب المزايا التي تحققت من استخدامه ،فقد أدى استخدام هذا الأسلوب في أحد مصانع شركة **(Du pont)** في مدينة **(Louisville)** بالولايات المتحدة الأمريكية إلى تخفيض وقت الأعطال أللازمة لعمل برنامج الصيانة من 125 ساعة إلى 78 ساعة.

إن أسلوب المسار الحرج الذي تم تطويره لا يستخدم الاحتمالات في تقدير الزمن المتوقع لكل نشاط وقد أستخدم هذا الأسلوب في المشروعات الصناعية ذات الحالات المتكررة والتي يمكن من خلالها تقدير الوقت بدقة معقولة كما حدث في استخدامه في صناعة الكيماويات في شركة **(Du pont)** والمشروعات ذات الصيانة المتكررة والدورية ، وفي الوقت الحاضر فإن أسلوب المسار الحرج **CPM** يشترك بشكل فعال مع أنظمة رقابة تكاليف المشروعات الأخرى كالخرائط الرقابية وغيرها، إذ أن هذه الخرائط ذات رقابة كلية **(macro control)** تشترك

مع أسلوب **CPM** ذي الرقابة الجزئية (**micro control**) لتزويد الإدارة بالمعلومات وتفاصيل دقيقة في المجال الرقابي.

05-02: تعريف أسلوب المسار الحرج CPM

تعتبر تقنية المسار الحرج من الطرق الهامة في استخدامها للأدوات الكمية ،إذ تساعد هذه التقنية مدراء المشاريع على اتخاذ القرارا ت سواء في تحليلهم أو تخطيطهم أو جدولتهم للمشاريع الموكلة إليهم ، وخاصة المشاريع الكبيرة والمعقدة.

ويقوم المدير أو المخطط في هذا الأسلوب إلى تدنية تكاليف المشروع كما يمكن تخفيض مدة أغلب الأزمنة وبالمقابل يتم تحمل موارد إضافية والمتمثل ة في (آلات ،أيدي عاملة ،رأس مال.......الخ) هذا التخفيض في الأزمنة ينجم عنه زيادة في التكلفة الكلية للمشروع.

وفي هذا الأسلوب تظهر اهتمامات إدارة الوقت التي يتم حسابها والمناور ة بها، وهذه الأوقات هي الوقت النهائي للمشروع، و الأزمنة الحرجة مع الأوقات المبكرة والمتأخرة لإنجاز الأزمنة، مع العلم أن حسابات هذه الأوقات تهدف في النهاية إلى إيجاد آخر وقت مسموح به لإنجاز المشروع، إن أسلوب المسار الحرج قائم على أساس تحديد مجموعة من نشاطات المشروع ذات العلاقة المتعاقبة فيما بينها، والمكونة للسلسلة الحرجة للأنشطة بحيث أن مجموع الوقت الكلي لهذه الأزمنة يمثل آخر وقت مسموح به لإنجاز المشروع، ويستلزم **تطبيق أسلوب المسار الحرج** الخطوات التالية:

- رسم شبكة العمل طبقا للتتابع الأعمال (الأزمنة) وتداخلها.
- تحديد الزمن النهائي لإنجاز المشروع والمعروف باسم زمن المسار الحرج.
- احتساب زمن البداية المبكرة والنهاية المبكرة لإنجاز الأزمنة.
- احتساب زمن البداية المتأخرة والنهاية المتأخرة لإنجاز الأزمنة.
- تحديد الزمن الفائض (slak) لكل نشاط.

05-03 آلية عمل المسار الحرج CPM: يتطلب تنفيذ مخطط **CPM** إتباع الخطوات التالية

- القيام بإجراء تحليل المشروع إلى فعاليات (أنشطة) متعددة يستوجب تعريفها بدقة من خلال إعطاء رموزا خاصة (رقم-حرف) لكل نشاط.
- يتم تحديد التسلسل لإنجاز كل الأزمنة التي يتكون منها المشروع، بمعنى أنه يجب تحديد الأزمنة التي يجب أن تتم قبل البدء في نشاط أو أنشطة سابقة أخرى ، وكذلك الأزمنة التي يمكن أن يبدأ العمل فيها معا ، وبعبارة أخرى يجب تحديد العلاقات بين الأزمنة المختلفة التي يتكون منها المشروع، بحيث لا يبدأ في الأزمنة أللاحقة إلا بعد أن يتم الانتهاء من الأزمنة السابقة التي يعتمد عليها.

➢ وضع هذه العلاقات بين الأزمنة في شكل شبكة لها بداية ونهاية، وتتكون الشبكة من عدة دوائر،كل دائرة تعبر عن نشاط ويربط فيما بينها أسهم تعبر عن اتجاه الأزمنة،ويجوز في هذه الحالة تقاطع الأسهم للدلالة على معنى التتابع في الشبكة ،وحتى نتجنب أية مشاكل في عمليات الحساب ،ويجب أن يكون للمشروع ككل نقطة بداية واحدة ونقطة نهاية واحدة ،ويعني ذلك أن الأزمنة التي ليس لها أي نشاط يسبقها يوضع قبلها نشاط افتراضي أسمه " **بدء**" وكذلك الأزمنة التي لا تليها أنشطة أخرى يجب أن يوضع بعدها نشاط افتراضي اسمه "**إتمام**" وبالطبع فإن وقتي نشاطي البدء والإتمام هو صفر ولكنهما يضافا لتسهيل تصور المشروع ككل، وغني عن الذكر أيضا أنه في حالة وجود نشاط واحد في بداية المشروع ونشاط واحد في نهاية المشروع، تعد هذه بداية ونهاية طبيعية ، ويمكن في هذه الحالة ألاستغناء كلية عن فكرة حدثي "**بدء**" و "**إتمام**

➢ تحديد الوقت اللازم لكل نشاط، وعادة ما يوضع هذا الرقم داخل دائرة تدل على النشاط بالإضافة إلى رقم النشاط.

05-04: أزمنة المسار الحرج

للوصول إلى تقدير دقيق للزمن يتوجب معرفة أزمنة الأحداث وأزمنة الفعاليات، ويتمي ز كل نشاط في المخطط الشبكي بأربعة أوقات، وهذه الأوقات يمكن الحصول عليها من خلال عمليات حسابية سنوردها لاحقا بعد ذكر هذه الأوقات كما يوضحه الرسم الموالي:

حيث:

i: رقم لحدث البداية ، **j**: رقم لحدث النهاية

t_{i-j}: وقت استغراق النشاط الواقع بين الحدث **i** والحدث **j**

ES_i: الوقت المبكر لوقوع حدث البداية (i)

EF_j: الوقت المبكر لوقوع حدث النهاية (j)

LF_j: الوقت المتأخر لوقوع حدث النهاية (j)

LS_i: الوقت المتأخر لوقوع حدث البداية (i)

❖ **أزمنة الأحداث:** تخضع الأحداث لنوعين من الحسابات هما الحسابات الأمامية و الحسابات الخلفية.

➢ **الحسابات الزمنية الأمامية:**

✓ **الزمن المبكر للحدث:** هو لحظة الزمن المبكرة التي تبدأ منها أو تخرج منها الفعاليات ففي الحدث الأول يأخذ الزمن المبكر(ES_i) للحدث القيمة صفر لأنها بداية انطلاق المشروع ،أما بداية الأحداث اللاحقة فيستوجب أن يضاف إليها الوقت اللازم (D_{i-j}) لإنجاز الفعالية وتستمر هذه الحالة بالنسبة للأحداث اللاحقة الأخرى.

ولأجل تسهيل عملية حساب الوقت المبكر بافتراض أن الأزمنة المختلفة تكون مرقمة حسب التسلسل التصاعدي للنشاط **(i;j)** أي التسلسل التصاعدي للحدث **i** حيث:

i=0;1;2;3..n-1

ومن ثم التسلسل التصاعدي للحدث **j** حيث :

j =1 ;2; 3 .... n

أما الصيغة الرياضية التي تحسب بموجبها الأوقات المبكرة ES_j وخاصة إذا كان الحدث **j** يرتبط بأكثر من نشاط واحد لجميع قيم **i** و **j**

$$EF_j = MAX\left[ES_i + D_{i-j}\right]$$

لهذا سميت بمرحلة الاتجاه الأمامي لاحتساب الأوقات المبكرة للأنشطة.

➢ **الحسابات الزمنية الخلفية**

✓ **الزمن المتأخر للحدث:** إن حساب الزمن المتأخر (LS) للحدث يأخذ عادة اتجاها عكسيا لسير المخطط الشبكي ، وبإتباع أسلوب الخطوة إلى الوراء وهذه الخطوة تبدأ عادة من الحدث الأخير، لانتهاء المشروع بالرجوع إلى الحدث الأول أي حدث البداية الذي لا بد أن يكون مساويا للزمن المبكر لبداية المشروع ، ولتحديد الزمن المتأخر لحدث ما يستوجب أن يطرح منه زمن إنجاز الفعالية (D_{i-j}) وفي حالة وجود أكثر من فعالية تصل أو تخرج من أحد الأحداث فيتم اختيار أطول الفعاليات بحيث نستطيع الوصول إلى الزمن المتأخر للحدث.

لذا فالمعادلة الرياضية لحساب LS_i إذا كان الحدث **i** يرتبط بأكثر من نشاط هي :

$$LS_i = MIN\left[LF_j - D_{i-j}\right]$$

أزمنة الفعاليات: هناك أربعة أزمنة للفعاليات ولكل فعالية زمن محدد، يتوقع أن تنجز فيه الأعمال والموارد البشرية والمادية المطلوبة تنفيذها خلال هذا الزمن (D_{i-j}) وهذه الفترة الزمنية محددة بين حدث بداية وحدث نهاية للفعالية.

➢ **وقت البداية المبكرة (earliest star time):** وهو أبكر وقت لابتداء نشاط ما بدون مخالفة متطلبات، النشاطات التي تسبقه ولا يمكن للنشاط أن يبدأ قبل هذا الوقت.

➢ **وقت النهاية المبكرة (earliest finish time):** وهو أبكر وقت يمكن أن ينتهي عنده النشاط إذا بدأ في وقت البداية المبكرة، لا يمكن أن ينتهي هذا النشاط قبل هذا التاريخ وهو يحسب وفق العلاقة التالية:

$$EF_j = ES_i + D_{i-j}$$

➢ **وقت النهاية المتأخرة (latest finish time):** وهو آخر وقت يمكن أن ينتهي عنده النشاط دون أن يؤدي إلى تأخير المشروع ككل عن المدة المحددة.

➢ **وقت البداية المتأخر (latest star time)**: وهو آخر وقت يمكن لأي نشاط أن يبدأ دون تأخير المشروع ككل، وهو ناتج طرح مدة النشاط من وقت النهاية المتأخرة ويعطى هذا الوقت وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$LS_i = LF_j - D_{i-j}$$

في الحسابات الأمامية ولغرض تحديد عدد الأزمنة المرتبطة بالحدث (j) يؤخذ بنظر الاعتبار راس السهم، أما في الحسابات الخلفية ولغرض تحديد عدد الأزمنة المرتبطة بالحدث (i) فإنه يؤخذ بنظر الاعتبار قاعدة السهم.

مثال02: فيما يلي مجموعة الأزمنة اللازمة لإتمام مشروع معين، و تتابعها الفني, وكذلك الوقت اللازم لإتمام النشاط كما هو موضح في الجدول التالي:

الترتيب	النشاط	النشاط السابق غير المباشر	الوقت اللازم (الأشهر)
1	A	--------------	1
2	B	A	4
3	C	A	2
4	D	B	6
5	E	C	2
6	F	D ; E	1

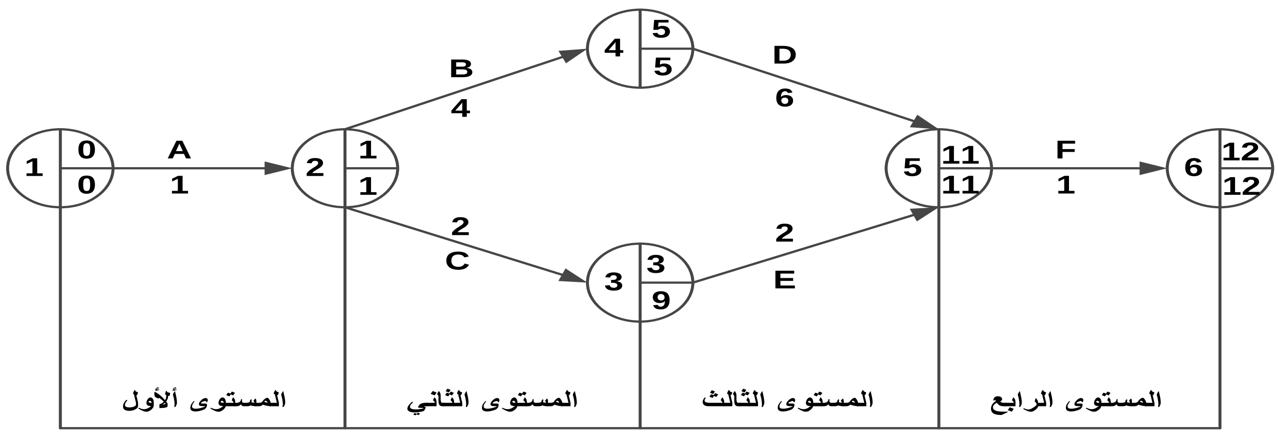
المطلوب:

1- رسم الشبكة.

2- حساب مختلف الأزمنة.

الحل:

1 -رسم الشبكة: الشبكة موضحة في الشكل التالي



تنجز الشبكة خلال ستة (6) مراحل وفي 12 شهر وعبر4 مستويات

2-توضيح مختلف الأزمنة ($ES_i;LS_i;EF_j;LF_j$) من خلال الجدول التالي:

الأزمنة	زمن الأزمنة	الأزمنة المبكرة		الأزمنة المتأخرة	
		ES_i	EF_j	LF_j	LS_i
A	1	0	1	1	0
B	4	1	5	5	1
C	2	1	3	9	7
D	6	5	11	11	5
E	2	3	5	11	9
F	1	11	12	12	11

05-05: المرونات

❖ **مرونة الحدث (event slack time)**: نتحصل على مرونة الحدث من طرح الزمن المبكر(ES_i) من الزمن المتأخر (LS_i) بالنسبة للنشاط (i) ،أومن طرح الزمن المبكر(EF_j) من الزمن المتأخر (LF_j) بالنسبة للنشاط (j) أي:

$$S = LS_i - ES_i = LF_j - EF_j$$

❖ **مرونة الفعاليات** : المرونة تعني الفائض في الوقت بين الفترة التي خطط لها تنفيذ الفعالية والفترة الفعلية وقياسها يعتمد على طريقة احتساب الفترة الفعلية، لأن الفترة المخططة قد لا تأخذ بنظر الاعتبار التسلسل المنطقي للفعاليات والعلاقات المترابطة فيما بينها.

والمرونة تأخذ إما قيمة موجبة أو صفرية ،فالقيمة الموجبة تعني أن هناك إمكانية لتأخير تنفيذ الفعالية في حدود تلك المرونة ، أما الصفرية فهي التي لا يمكن أن تتحمل أي تأخير في التنفيذ أو حتى في بداية تنفيذ الفعالية، والمرونات أنواع أهمها:

➢ **الوقت المرن الكلي (Total slack)**: وهي عبارة عن الفرق بين أقصى زمن متاح لإنجاز النشاط وبين ما يتطلبه النشاط فعلا من زمن ، يعني أكبر وقت يمكن تأجيل المباشرة في تنفيذ النشاط وبدون تأخير على وقت إنجاز المشروع ويمكن حساب الوقت المرن الكلي كمايلي:

$$TS = LF_j - ES_i - D_{i-j}$$

$$TS = LF_j - EF_j$$

$$TS = LS_i - ES$$

لأن

$$EF_j = ES_i + D_{i-j}$$
$$LS_i = LF_j - D_{i-j}$$

➢ **المرونة الحرة(Free float)**: إن الوقت المرن الحر **Free float** والذي يرمز له بالرمز FF_{ij} للنشاط (i;j) وهو عبارة عن أكبر وقت يمكن تأجيل المباشرة بتنفيذ النشاط ما إذا ابتدأت كافة الأزمنة الباقية في الأوقات

المبكرة لها ،ففي هذه الحالة فإن FF_{ij} للنشاط $(i;j)$ هو عبارة عن الزيادة في الزمن المتاح (EF_j-ES_i) فوق زمن ألاستغراق D_{i-j} الذي يتطلبه إنجاز المشروع ، وإن الوقت المرن الحر يحسب كالآتي:

- **المرونة المتداخلة(Interfering Float)**: وهي الفترة الزمنية التي يمكن تأخير البدء في النشاط بمقدارها دون التأخير في موعد إنهاء المشروع ، علما بأنها ستؤدي إلى تأخير البدء في بعض النشاطات التي تليها وهي تساوي المرونة الكلية مطروح منها المرونة الحرة وتعطى وفق الصيغة التالية:

$$INTF_{ij} = TS - FF$$
$$INTF_{ij} = \left(LF_j - ES_i - D_{ij}\right) - \left(EF_j - ES_i - D_{ij}\right)$$
$$INTF_{ij} = LF_j - \cancel{ES_i} - \cancel{D_{ij}} - EF_j + \cancel{ES_i} + \cancel{D_{ij}}$$
$$INTF_{ij} = LF_j - EF_j$$

ومن الجدير بالذكر أن قيمة المرونة المتداخلة دائما أقل أو تساوي المرونة الكلية.

- **المرونة المستقلة(Independent Float)**: وهي الفترة التي يمكن تأخير البدء في النشاط بمقدارها، دون التأخير في موعد إنهاء المشروع أو موعد بداية أي نشاط لاحق أو دون أن يتأخر النشاط المعني نتيجة أي تأخير في أي نشاط سابق ضمن حدوده، بمعنى أنه ينتهي عند أو قبل وقت النهاية المتأخرة، وتعطى صيغته الرياضية بالشكل التالي:

$$INDF_{ij} = EF_j - LS_i - D_{ij}$$

مثال 03: في منشأة مختصة لصناعة الأحذية، وتوفرت ليك المعلومات التالية المبينة في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق	وصف العملية	زمن النشاط
1−2	----------	**تحضير المستلزمات المطلوبة للجزء الأول**	**5**
1−3	----------	**تحضير المستلزمات المطلوبة للجزء الثاني**	**6**
2−4	**(1−2)**	**بداية عمل الجزء الأول**	**12**
3−4	**(1−3)**	**بداية عمل الجزء الثاني**	**10**
3−5	**(1−3)**	**تجميع منتجات الجزء الثاني**	**8**
4−5	**(2−4)(3−4)**	**تجميع منتجات الجزء الأول**	**9**
5−6	**(3−5)(4−5)**	**اختيار المنتج النهائي**	**7**

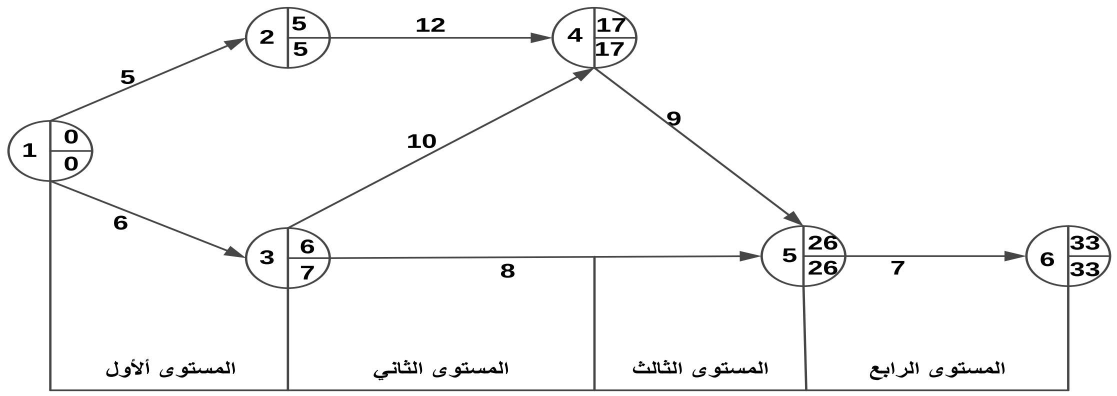
المطلوب:

1− رسم الشبكة.

2− حساب مختلف الأزمنة والمرونات.

الحل:

1− رسم الشبكة



2− حساب مختلف الأزمنة: مختلف الأزمنة موضحة من خلال الجدول التالي:

النشاط	زمن النشاط	الأزمنة المبكرة		الأزمنة المتأخرة		المرونات				
		ES_i	EF_j	LF_j	LS_i	ES	TS_{ij}	FF_{ij}	$INTF_{ij}$	$INDF_{ij}$
1−2	5	0	5	5	0	0	0	0	0	0
1−3	6	0	6	7	1	1	1	0	1	−1
2−4	12	5	17	17	5	0	0	0	0	0
3−4	10	6	16	17	7	1	1	0	1	1
3−5	8	6	14	26	18	12	12	0	12	−12
4−5	9	17	26	26	17	0	0	0	0	0
5−6	7	26	33	33	26	0	0	0	0	0

05−06: تحديد المسار الحرج

إن طريقة تحديد المسار الحرج تمر بمرحلتين:

المرحلة الأولى وهي الحسابات الأمامية والتي تحدد وقت الإبتداء المبكر للنشاط والمرحلة الثانية وهي مرحلة الحسابات العكسية والتي تحدد وقت الإنجاز المتأخر.

وندعو المسار الحرج (**CPM**) إذا كان يشكل أطول الطرق بين الحادثة الابتدائية والحادثة النهائية، بحيث يمر بعدد من الحوادث المتتالية والتي تتصل فيما بينها بعدد من الأسهم والنشاطات.

ويمكن أن نوضح مجموعة من الملاحظات على المسار الحرج وذلك كما يلي:

- ترتب الأزمنة الحرجة على المسار الحرج الذي يعني ماهو التسلسل الذي ينبغي أن تكون عليه

الأزمنة الحرجة، بحيث أن زمن تنفيذ المشروع ككل يكون أقل ما يمكن.

- إن معرفة الأزمنة الحرجة و الأزمنة لخاصة بها تشمل عملية التخطيط وإدارة الوقت وتنشيط عملية تنفيذ المشروع ، وأن تجاوز الوقت المحدد لأي نشاط حرج سوف يؤدي إلى تأخير المشروع بشكل عام.
- بقية النشاطات غير الحرجة لها اعتبارات خاصة بالنسبة للإحتياطات الزمنية.

نقول عن النشاط (i;j) أنه يقع على المسار الحرج إذا تحققت الشروط التالية:

$$ES_i = LS_j$$

$$EF_j = LF_j$$

$$EF_j - ES_i = LF_j - LS_i = D_{ij}$$

إذا تحققت هذه الشروط الثلاثة على النشاط الواحد يعني ذلك أن النشاط الحرج **(critical)** ويمكن وضع علامة(=) المساواة عليه لتميزه عن الأزمنة السابقة أو وضع المسار الحرج مخالف عن بقية الأزمنة.

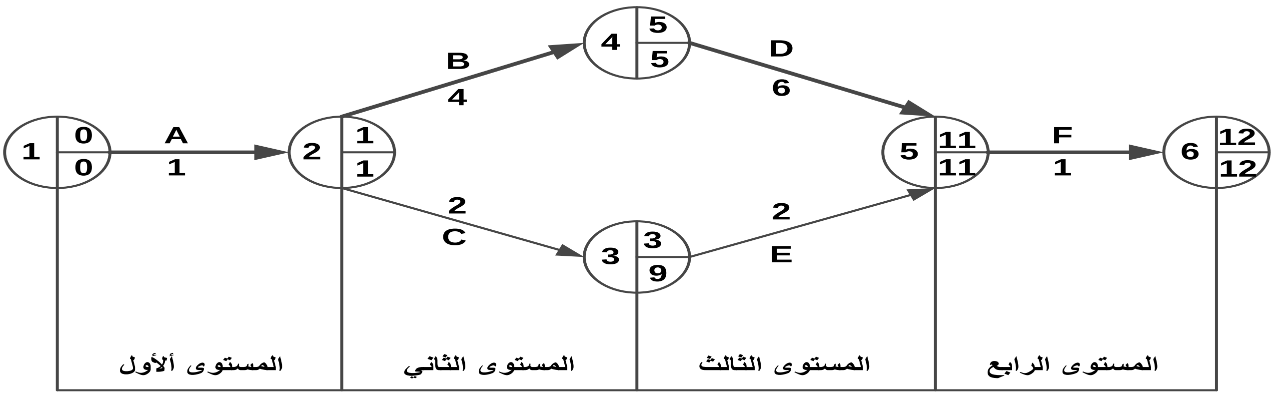
يمكن أن يظهر في عملية حساب النشاطات أكثر من مسار حرج واحد ، إلا أنه يؤخذ بنظرالإعتبار أطول المسارات أو بعبارة أخرى يؤخذ بنظر الاعتبار ذلك المسار الحرج الذي يكون فيه الوقت مساويا لما هو موجود في الحدث الأخير في المخطط الشبكي من الأزمنة.

مثال04: بالعودة إلى معطيات المثال رقم 02

المطلوب:تحديد المسار الحرج؟

الحل:

تحديد المسار الحرج



يتضح من خلال الشبكة أن هناك مسارين هما:

المسار الأول: 12=1+4+6+1 ⇔ A-B-D-F

المسار الثاني: 06=1+2+2+1 ⇔ A-C-E-F

مما يتضح أن المسار الأول هو أطول المسارات وهو الذي يعبر عن المسار الحرج المطلوب ويمثل آخر مدة زمنية مسموح بها لإنجاز المشروع حيث بعدها يعتبر المشروع متأخرا.

سادسا: أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (PERT)

يقوم مبدأ عمل طريقة **(PERT)** على أساس طريقة المسار الحرج **(CPM)** ففي طريقة المسار الحرج **(CPM)** ، لقد تم تحديد المسار الحرج على أساس وقت واحد لكل نشاط وكان هذا الوقت مؤكد وثابت ، بمعنى آخر تتعامل طريقة المسار الحرج مع المشاريع التي يتوفر عنها معلومات مسبقة كاملة ودقيقة عن الأزمنة التي يستغرقها إنجاز الأزمنة الخاصة بالمشروع ، إلا أن هذا الحال لا ينطبق على جميع المشروعات حيث أن بعضها يتصف بعدم الثبات والتأكد مما يتطلب التخطيط لها في ضل عدم التأكد ولتخطيط وجدولة ومراقبة هذا النوع من المشروعات التي تتصف بعدم التأكد و التغيير من فترة إلى أخرى ، فإننا سوف نقوم باستخدام أسلوب بيرت **(PERT)**.

06-01: التطور التاريخي لأسلوب بيرت (PERT)

في ذات الوقت الذي ظهر فيه أسلوب المسار الحرج **(CPM)**، كانت هناك مجموعة أخرى تعمل بشكل مستقل للوصول إلى أسلوب مشابه أطلق عليه فيما بعد بأسلوب تقييم ومراجعة البرامج، والذي يعرف اختصارا ب**(PERT)**.

فقد تم تقدير هذ ا الأسلوب في عام 1958 بواسطة **"Hamilton; Allen; Booz"** وهي إحدى الشركات المتخصصة في تقديم الاستثمارات الإدارية، وذلك بالإشراك مع مكتب المشروعات الخاصة بالبحرية الأمريكية ، كما وشارك أيضا في هذه الأبحاث قسم الصواريخ بشركة لوكهيد" **Lockheed** "كبرى شركات تنفيذ أعمال وزارة الدفاع الأمريكية.

وقد كان الهدف الأساسي من هذا الأسلوب هو تصميم طريقة يتم بها تخطيط مشروع إنتاج الصواريخ **"Polaris"** بشكل يمكن من إحكام الرقابة على التنفيذ ، حتى يتم إنجاز المشروع في موعده المحدد ، ويمكن أن ندرك أهمية مثل هذا الأسلوب حينما نعلم أنه قد أستخدم في جدولة عمل حوالي 3000 جهة خارجية مستقلة ، اشتركت جميعها في هذا المشروع ، وأوضحت نتائج التطبيق أن استخدام أسلوب **(PERT)** في هذا المشروع قد أدى تخفيض فترة إتمام المشروع المقدرة أصلا بواسطة المهندسين بحوالي عامين كاملين فقد تم إنجاز هذا المشروع في أربعة سنوات بعد أن كان التقدير المبدئي هو ستة سنوات.

06-02:تعريف أسلوب بيرت (PERT)

تستخدم طريقة بيرت **(PERT)** في عمليات تخطيط وجدولة الأزمنة الخاصة بالمشاريع وبهدف الوصول إلى المسار الحرج للشبكة من خلال أسلوب تقييم ومراجعة البرامج (**Program Évaluation Review**

Technique) والذي تشتق منه التسمية **(PERT)** ،وتعتمد طريقة بيرت كما هو الحال في أسلوب المسار الحرج على عنصر الوقت في إنجاز النشاطات وعلى الفرضية الاحتمالية لتقدير فترة إنجاز نشاطات المشروع وخاصة للمشاريع التي تتصف بعشوائية التقدير للإنجاز فإذا فرضنا أن التقدير يتبع التوزيع الاحتمالي المعروف بتوزيع بيتا **(Béta)**، وذلك نظرا لخصائص هذا التوزيع الذي يتناسب مع هذه الحالات، ولإمكانية أخذه أشكالا مختلفة لها نهايات محددة، حيث أن التوزيعات الأخرى وخاصة التوزيع الطبيعي، لا يحقق هاتين الخاصيتين فهو دائما ناقوسي لا التواء فيه ، وكذلك فهو توزيع مستمر(+∞ ،−∞) وليس له نهايات,إضافة لإمكانية تقدير الوقت المتوقع من خلال توزيع بيتا **(Béta)** وبدرجات ثقة مختلفة حسب الطلب وذلك بعد تقدير الوقت الفرضي من خلال ثلاث تقديرات هي:

- تقدير الزمن المتفائل**(optimistic time)**.
- تقدير الزمن الأكثر احتمالا**(Most likely time)**.
- وتقدير الزمن المتشائم **(Pessimistic time)** لكل نشاط.

أسلوب **(PERT)** يتم إنشائه من أجل الربط ومراقبة أنشطة المشروع التي لا يجب أن نتجاوزها ، كما أنه يبين لنا الأزمنة الحرجة التي لا يجب أن يتأخر إنجازها ،لأنه في حالة تأخرها فإنها سوف تؤثر على المدة الزمنية الإجمالية للمشروع.

ومن أجل تطبيق أسلوب بيرت **(PERT)** يجب معرفة نوعين من المعلومات:

- المعلومات التي تخص العلاقة التي تربط بين الأزمنة.
- تقدير الوقت اللازم الذي يتطلبه كل نشاط.

06-03: آلية عمل (PERT)

- إن النقطة الأساسية التي تميز أسلوب بيرت **(PERT)** عن أسلوب المسار الحرج **(CPM)** هي كون الأول يستند إلى مفهوم الاحتمالية في تحديد الأوقات للزمن الذي تستغرقه الأزمنة ، في حين أن أسلوب المسار الحرج **(CPM)** يقوم على أساس زمن مقرر ومؤكد للأنشطة ولوقت المشروع ككل.

إن أسلوب بيرت **(PERT)** يقوم على أساس التوزيع الاحتمالي لقيم المتغير العشوائي التي يجب أن يكون في مجموعها النهائي الواحد الصحيح.

- إن وجود الفروض الاحتمالية في أسلوب **(PERT)** يعني وجود ظاهرة عدم التأكد في تحديد

الفترة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع، بالرغم من أن هناك رغبة في إنجاز المشروع بأقل وقت ممكن.

وارتباطا بموضوع الاحتمالية، فإن أسلوب **(PERT)** يقوم على أساس وضع تقديرات زمنية متباينة تنعكس في حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة للأحداث.

➢ تستخدم لأغراض التوزيع الاحتمالي معادلات بسيطة لاستخراج الوسط الحسابي وكذلك الانحراف المعياري استنادا لتوزيع بيتا (**Béta**) حيث يقوم بوضع ثلاث أوقات محتملة للزمن المقدر للانتهاء من الأزمنة.

04-06: أزمنة (PERT)

إن أسلوب بيرت (**PERT**) يأخذ بنظر الاعتبار ثلاثة أنواع من الإحتمالات التخمينية للزمن اللازم لتنفيذ المشاريع المختلفة وهي:

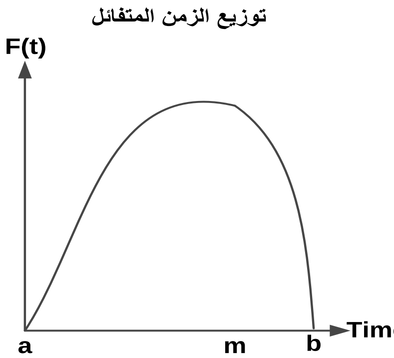
أولا: تقدير الزمن المتفائل (a) (optimistic time): وهو أقل تقدير زمني يتم من خلاله الانتهاء من إنجاز النشاط على افتراض أن الظروف والعوامل المؤثرة الخارجية والداخلية جيدة ومناسبة ولن يحدث ما يعوق سير تنفيذ النشاط.

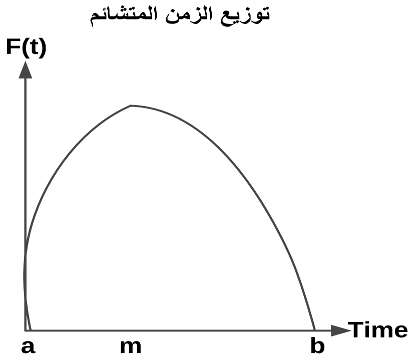
ثانيا: تقدير الزمن المتشائم (b) (Pessimistic time): وهو أطول تقدير زمني يتم من خلاله الانتهاء من إنجاز النشاط ،مع الأخذ بنظر الاعتبار أسوء ظروف عمل ومؤثرات خارجية وداخلية غير ملائمة تؤدي إلى حدوث صعوبات ومعوقات عمل غير متوقعة.

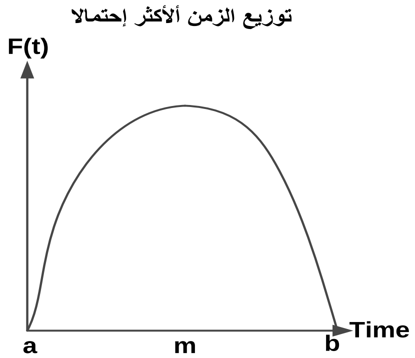
ثالثا: تقدير الزمن الأكثر احتمالا(m) (Most likely time): وهو التقدير الزمني المتوسط والمحتمل حدوثه في الظروف العادية والتي سبق وأن تحققت في الحالات المماثلة للنشاط نفسه, علما أن

$$a \leq m \leq b$$

إن التقديرات الثلاثة للمدد الزمنية اللازمة لتنفيذ كل نشاط تتبع التوزيع الاحتمالي المعروف باسم (**Béta**) ذات الصفات الاحتمالية، حيث تكون نقطة التحدب الوحيدة عند (m) وأن نقاط النهاية تكون عند النقطتين (b،a) كما هو موضح في الشكل التالي







وقد تم اختيار التوزيع الطبيعي لأنه يعتبر من أكثر التوزيعات الاحتمالية أهمية و ذلك بسبب إمكانية تقريب معظم التوزيعات الاحتمالية إلى التوزيع الطبيعي حسب نظرية الحد المركزية.

بسبب وجود ثلاثة أزمنة (m, b,a) فإنه يصعب جدولة المشاريع، لذلك يتم إيجاد معدل متوسط بين الزمن التفاؤلي والتشاؤمي $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ أما بالنسبة للزمن الأكثر احتمالا يمكن أن تقع إلى يمين أو يسار هذا المتوسط.

من البديهي ملاحظة أن المدة الزمنية لكل نشاط يمكن أن تكون موزعة توزيع بيتا **(Béta)** ونقطة تحديدها الوحيدة هي النقطة (m) وأن نقاط نهايتها تكون عند النقطتين (b,a) كما هو موضح في الشكل السابق.

وبسبب هذه الأنواع الثلاثة من الحالات يتم اللجوء إلى حساب المعدل المتوسط والذي يرمز له ب(t_e) وكذلك نحسب التباين لتوزيع بيتا **(Béta)**.

وبما أن توزيع بيتا **(Béta)**هو وحيد العقد بقيمة قصوى وحيدة (وأن هذا التوزيع أقرب إلى التوزيعات الاحتمالية) ، وله قيم نهاية محدودة ، وإضافة لذلك أن توزيع بيتا **(Béta)** يمكن تغيير مقاييسه ليكون متماثلا ،أوملتويا إلى اليمين أو ملتويا إلى اليسار أم ا معادلة إيجاد المتوسط للأزمنة الثلاثة والتي تسمى بالزمن المتوقع (t_e) للإنجاز لكل نشاط على حدة فهي تتم بموجب هذه الصيغة التالية:

$$t_e = \frac{\frac{a+b}{2} + 2m}{3} \Leftrightarrow t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

حيث:

a : الزمن التفاؤلي.

b : الزمن التشاؤمي.

m : الزمن الأكثر احتمالا.

t_e : الزمن المتوقع للإنجاز لكل نشاط (i;j) من الأزمنة.

من واقع التقديرات الثلاثة للأزمنة فإننا نستنتج أن الزمن المتوقع هو

الزمن المتوقع(t_e) = المتوسط الحسابي المرجح بالأوزان لتقديرات الأوقات الثلاثة

إن حساب المعدل الزمني لإنجاز كل نشاط من الأزمنة في الشبكة لا يكفي لإعطاء صورة واضحة عن طبيعة البيانات التي حسب لها المعدل الزمني وعليه لإعطاء وضوح أكثر لبيانات الأزمنة فإنه يجب

حساب ومعرفة مقدار تفاوت واختلاف أزمنة كل الأزمنة عن معدلها الزمني t_{ij},فإن هذا التفاوت يمثله التباين $\left(\sigma^2\right)$ وتعطى الصيغة العامة له بالشكل التالي:

$$\sigma^2_{ij} = \left(\frac{b-a}{6}\right)^2$$

تعتمد هذه المعادلة على المفهوم الإحصائي القائل بأن هناك (6) ستة انحرافات معيارية مابين نهايتي توزيع بيتا (Béta) (±3 انحرافات معيارية من الوسط)

05–06: تحديد المسار الحرج في (PERT)

إن الفرق بين شبكة (CPM) و (PERT) هو تحديد زمن إنجاز النشاط إذ أن مدة النشاط D_{ij} هو زمن محدد في (CPM) وبالتالي فإن المسار الحرج في (CPM) يأخذ قيمة محددة تساوي مجموع قيم D_{ij} للأنشطة الحرجة الداخلة فيه, بانحراف معياري يساوي الصفر.

أما في شبكة بيرت (PERT) فإنه توجد ثلاثة تقديرات لزمن إنجاز النشاط (m, b,a) وبالتالي فإنه لحساب قيمة المسار الحرج وتحديد الأزمنة الحرجة نتبع نفس الأسلوب ولاكن نأخذ بعين الاعتبار بدلا عن D_{ij} القيمة المتوقعة (t_e) لزمن إنجاز النشاط (i;j) وبالتالي فإن الحسابات في شبكة بيرت (PERT) تتحدد وفق العلاقتين التاليتين:

1 –**الحسابات الأمامية:** $$EF_j = MAX\left(ES_i + t_e\right)$$

مع الأخذ بعين الإعتبارأن $ES_0=0$

2 –الحسابات الخلفية: $$LF_J = MIN\left(LS_i - t_e\right)$$

مع الأخذ بعين الإعتبارأن $LS_n=LF_n$

أما المسار الحرج فيتحدد وفق العلاقة التالية:

$$ES_i = LS_i$$
$$EF_j = LF_j$$
$$EF_j - ES_i = LF_j - LS_i = t_e$$

بحيث أن (t_e) هو الزمن المتوقع ويساوي: $$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

وبناء على ذلك فإن المسار الحرج في شبكة (**PERT**) يساوي إلى مجموع القيم المتوقعة للأنشطة الحرجة الداخلة في المسار أما الانحراف المعياري للمسار الحرج في (**PERT**) فيحسب باستخدام العلاقة التالية:

$$\sigma_{PE} = \sqrt{\sum \sigma^2_{ij}}$$

σ_{ij} للأنشطة الحرجة فقط

06-06: الاحتمالات الأخرى (PERT)

بسبب كون شبكة بيرت (**PERT**) تخضع لقوانين الاحتمال فإنه بالإمكان الحصول على خواص أخرى غير المسار الحرج ، تلعب دورا هاما في إنجاز المشاريع واتخاذ القرار المتعلق بتنفيذ إنجاز المشاريع ومن بين هذه الخصائص.

- تحديد احتمال إنجاز المشروع في وقت محدد: إذا فرضنا أن μ_i تمثل الوقت المبكر للحدث **i** فإن μ_i يعتبر متغيرا عشوائيا ويفرض أن كل الأنشطة في الشبكة مستقلة من ناحية إحصائية.

فإن المعدل الزمني التجميعي المتوقع هو:

$$E(\mu_i) = ES_i = \sum_{i=1}^{n} E_{ij}$$

أما التباين التجميعي $\sigma^2(\mu_i)$ المتوقع هو :

$$\sigma^2(\mu_i) = \sum_{i}^{n} \sigma_K$$

و أن K يمثل أطول نشاط للمسار في الشبكة.

إن الغرض من حساب هذين المقياسين(المعدل الزمني التجميعي والتباين الزمني التجميعي) هو لكي يلجأ إلى استخدام التوزيع الاحتمالي لإيجاد الاحتمال الزمني لإنجاز أنشطة المشروع لأي أزمنة ST_i يتم تحديدها من قبل إدارة المشروع.

فإذا فرضنا أن μ_i يمثل وقت البدء المبكر للحدث (i) ، وبما أن مجموع الأوقات اللازمة لتنفيذ الأزمنة لغاية الحدث (i) هو متغير عشوائي ، فإن μ_i متغير عشوائي ، وطبقا لنظرية الحدود المركزية فإنه يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $E(\mu_i)$ وتباين $\sigma^2(\mu_i)$ وبما أن μ_i يمثل وقت الإنجاز للنشاط السابق للحدث (i) فإنه يجب أن يقابله μ_i زمن مجدول يرمز له ب ST_i وباحتمال:

$$P(\mu_i \le ST_i) = P\left[\frac{\mu_i - E(\mu_i)}{\sqrt{\sigma^2(\mu_i)}} \le \frac{ST_i - E(\mu_i)}{\sqrt{\sigma^2(\mu_i)}}\right]$$

$$P(\mu_i \le ST_i) = p(Z_i \le K_i)$$

إذ أن:

$$K_i = \frac{ST_i - E(\mu_i)}{\sqrt{\sigma^2(\mu_i)}}$$

وعلى افتراض أن جميع الأزمنة في الشبكة مستقلة إحصائيا عن بعضها فإننا نستطيع حساب الوسط الحسابي والتباين ل μ_i كما يلي:

– إذا كان هناك مسار واحد فقد يؤدي من حدث الإبتداء إلى الحدث (i) فإن $E\left(\mu_i\right)$ يساوي مجموع الأوقات الطبيعية t_{ij} للأنشطة التي تكون هذا المسار،وأن التباين $\sigma^2\left(\mu_i\right)$ هو مجموع متباينات نفس الأزمنة ،أما إذا كان هناك أكثر من مسار واح د فإننا نعتمد على المسار الذي يربط حدث البدء بالحدث (i) ويمتلك أكبر مجموع من الأوقات الطبيعية ومن ثم نقوم بحساب $E\left(\mu_i\right)$ و $\sigma^2\left(\mu_i\right)$ للأنشطة المكونة لهذا المسار كما في الحالة السابقة ،أما إذا تساوى مسارين أو أكثر في مجموع الأوقات الطبيعية لهما فإننا نأخذ المسار الذي يعطي أعلى تباين.

بعد إيجاد قيم Z من المعادلة السابقة لجميع أحداث الشبكة (i) نستخرج الاحتمال المقابل لهذه القيم $P(Z_i)$.

من جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي z^* وهذا الإحتمال الزمني لإنجاز تنفيذ نشاطات المشروع يوفر لإدارة المشروع وسيلة لتقييم ومراجعة أزمنة تنفيذ أنشطة المشروع وإعادة الجدولة الزمنية للأنشطة.

- **تحديد الزمن:** يتم تحديد الزمن T الذي تكون فيه الإدارة على ثقة من إنجاز المشروع بمستوى معنوية α=5% أي بدرجة ثقة تعادل0.95 =$(1-\alpha)$ ويتم ذلك بإيجاده من جدول التوزيع الطبيعي المعياري العدد المقابل للاحتمال 0.95 والذي يساوي 1.65 وعندئذ الزمن يحسب من العلاقة التالية:

$$T = EF + 1.65\sigma_{PE}$$

مثال05: الجدول التالي يبين الأوقات المقدرة للأنشطة المرافقة والتي يمثل إحدى شبكات الأعمال.

b	m	a	النشاط
3	2	1	1–0
8	2	2	2–0
3	2	1	3–1
11	1.5	1	3–2
7.5	1	0.5	4–2
7	2.5	1	5–3
3	2	1	4–3
8	7	6	5–4
11	4	3	6–4
8	6	4	6–5

المطلوب:

1- حساب الزمن المتوقع والتباين.

2- رسم الشبكة.

3- تحديد المسار الحرج

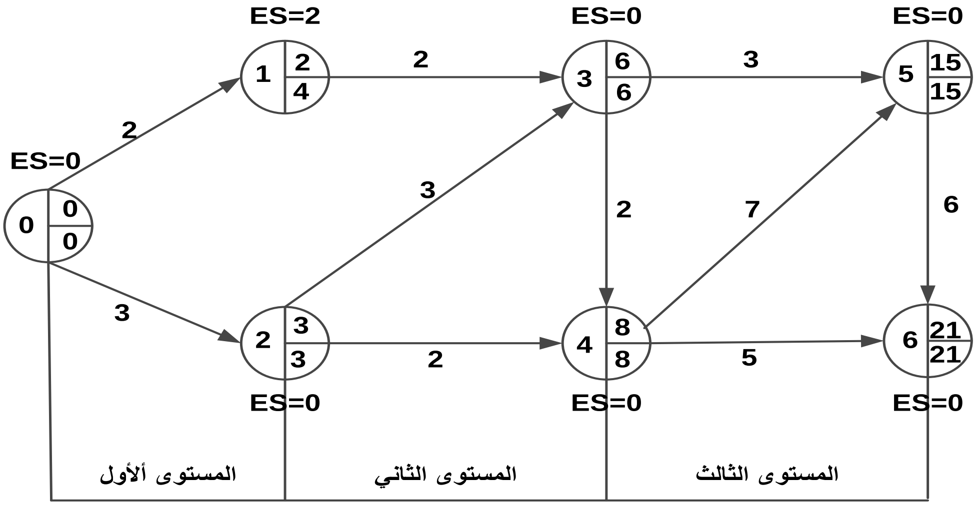
الحل:

1 -حساب الزمن المتوقع والتباين

النشاط	a	m	b	t_e	(σ^2)	الأزمنة المبكرة		الأزمنة المتأخرة		المرونات	
						ES_I	EF_j	LF_j	LS_i	TS_{ij}	FF_{ij}
1−0	**1**	**2**	**3**	**2**	**0.11**	**0**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**
2−0	**2**	**2**	**8**	**3**	**1.00**	**0**	**3**	**3**	**0**	**0**	**0**
3−1	**1**	**2**	**3**	**2**	**0.11**	**2**	**4**	**6**	**4**	**2**	**0**
3−2	**1**	**1.5**	**11**	**3**	**2.78**	**3**	**6**	**6**	**3**	**0**	**0**
4−2	**0.5**	**1**	**7.5**	**2**	**1.36**	**3**	**5**	**8**	**6**	**3**	**0**
5−3	**1**	**2.5**	**7**	**3**	**1.00**	**6**	**9**	**15**	**12**	**6**	**0**
4−3	**1**	**2**	**3**	**2**	**0.11**	**6**	**8**	**8**	**6**	**0**	**0**
5−4	**6**	**7**	**8**	**7**	**0.11**	**8**	**15**	**15**	**8**	**0**	**0**
6−4	**3**	**4**	**11**	**5**	**1.78**	**8**	**13**	**21**	**16**	**8**	**0**
6−5	**4**	**6**	**8**	**6**	**0.44**	**15**	**21**	**21**	**15**	**0**	**0**

2- رسم الشبكة

رسم الشبكة موضح في الشكل التالي



بعد حساب المعدلات الزمنية المتوقعة لجميع الأزمنة نحدد أطول المسارات في بداية الشبكة وإلى نهايتها لكي نحدد الحدث التي تقع عليه ومن ثم يتسنى لنا حسابات المعدل الزمني التجميعي $E\left(\mu_i\right)$ والتباين σ^2_{ij} والزمن المتوقع ST_i لتلك الأحداث التي تقع على أطول مسار.

بالعودة إلى رسم الشبكة نلاحظ أنه لدينا المسارات التالية:

المسار الأول:0، 1، 3، 4، 6 بطول زمني 11 يوم

المسار الثاني:0، 1، 3، 5، 6 بطول زمني 13 يوم

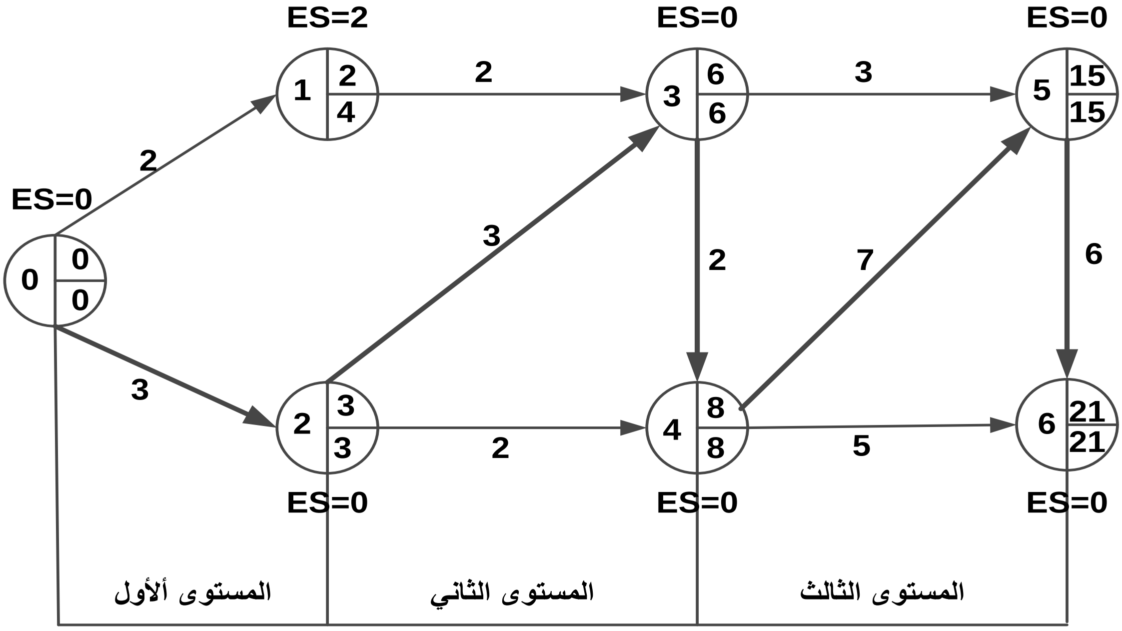
المسار الثالث:0، 1، 3، 4، 5، 6 بطول زمني 19 يوم

المسار الرابع:0، 2، 4، 6 بطول زمني10 يوم

المسار الخامس: 0، 2، 4، 5، 6 بطول زمني 19 يوم

المسار السادس:0، 2، 3، 4، 5، 6 بطول زمني 21 يوم

نلاحظ أن المسار السادس هو أطول المسارات من حيث الزمن والمتمثل في 21 يوم وهو يمثل المسار الحرج للشبكة بأسلوب (CPM)


ES=2
ES=0
ES=0
ES=0
ES=0
ES=0
ES=0
المستوى ألأول
المستوى الثاني
المستوى الثالث

نظرية المخزون

مقدمة:تعتبر الرقابة واحدة من أهم الوظائف التي تقوم بها المؤسسة لتحقيق أهدافها والت تمكن المسير من التأكد أن ما تم أو يتم مطابق لما أريد إتمامه، حيث تعتبر وظيفة التأكد من أن الأنشطة توفر النتائج المرغوبة، وللرقابة عدة مجالات وأنواع.

أولا:مفهوم الرقابة على المخزون

توجد عدة تعاريف للرقابة على المخزون أهمها ما يلي:

–هي الوسيلة التي يمكن بها تدبير كميات المواد المناسبة وفقا للمواصفات المعينة في الوقت المناسب والمكان؛ المناسب وبأقل تكلفة ممكنة.

–هي أداة تجعل تنفيذ الخطط والبرامج الخاصة بإدارة المخزون تجري بصورة سليمة طبقا للسياسة التنفيذية، المحددة لها .

– يقصد بالرقابة على المخزون تلك الوسيلة التي تتبعها إدارة المخازن للتأكد من توفير الكميات المناسبة من المواد في الوقت المناسب وحسب احتياجات المشروع مع مراعاة ما يمكن توفيره في السوق، وتحقيق أفضل عائد على المال المستثمر ، وتشمل الرقابة على المخزون :المواد الأولية والمواد النصف المصنعة والسلع الجاهزة.

من خلال التعاريف السابقة نستنتج أن الرقابة على المخزون هي الوسيلة التي تمكن المخازن من ضمان الاحتفاظ بكميات متوازنة من مختلف الأصناف بحيث تفي بذلك احتياجات الأنشطة المختلفة للمؤسسة دون أن تمثل عبئا استثماريا ضخما على عاتقها، إذن فبواسطة الرقابة على المخزون نضمن توفير الكميات المناسبة في الوقت المناسب حسب احتياجات المؤسسة مما يمكن تحقيق أكبر عائد ممكن.

ويتلخص مفهوم الرقابة كوظيفة إدارية في قياس نتائج التنفيذ الفعلي للخطة و مقارنة تلك النتائج بالمعايير أو الأهداف المحددة مسبقا، ثم اتخاذ الإجراءات اللازمة لمعالجة الأخطاء أو الانحرافات إن وجدت، والعمل على منع تكرارها مستقبلا.

ثانيا: مجلات الرقابة على المخزون

•الرقابة على عناصر الإنتاج مثل المواد الأولية، وغيرها من المواد التي تدخل في إنتاج السلع.

•الرقابة على المواد المساعدة للإنتاج مثل الوقود وقطع الغيار والزيوت وغيرها.

•الرقابة على المواد نصف المصنعة، وتشمل هذه المواد تلك التي يتم شرائها من أجل إعادة تصنيعها ومن ثم بيعها.

• الرقابة على الأجزاء المصنعة، أي تلك المواد التي يتم شرائها كاملة التصنيع دون وجود حاجة لإحداث أي تغيير عليها وتخزينها لحين الحاجة لاستخدامها.

•الرقابة على السلع التامة الصنع.

•الرقابة على كفاءة وظيفة التخزين وما يتعلق بها من أعمال.

وبصفة عامة يمكن القول أن مجال عملية الرقابة على المخزون يشمل مراقبة كل الأصناف التي يحتويها المخزن، إضافة إلى مراقبة وظيفة التخزين وهذا ليس بهدف تشخيص حجم الانحرافات فقط، بل تتعداه إلى معرفة تلك الانحرافات ومعالجتها لضمان عدم تكرارها.

ومن خلال هذا الطرح تتبين لنا النواحي الأساسية التي يستخدمها نظام الرقابة على المخزونات ، حيث يشمل الأمور التالية:

– تقدير الأصناف والأنواع الواجب تخزينها أي الرقابة على الأصناف والأنواع من المواد المخزنة.

–تحديد الكميات الواجب تخزينها من كل نوع من المواد على حدى ، وكذلك المجموع الإجمالي أو السلعة النهائية من المواد التي يجب تخزينها.

–تنظيم استلام المواد الداخلة إلى المخازن وإضافتها إلى الرصيد السابق.

–تنظيم العمليات الخاصة بصرف أو سحب المواد من المخازن.

ثالثا:أهمية الرقابة على المخزون

1– تفادي استثمار كميات كبيرة من رأس المال في المخزون السلعي وخاصة المواد بطيئة الحركة.

2– تحاشي الازدواج في المواد المخزونة.

3– يساعد على وضع برامج سليمة للإنتاج والتخزين.

4– يساعد في المحافظة على رؤوس أموال المؤسسة من خلال مراقبة مستويات التخزين و إبقائها عند حدود عملية تخطيط الإنتاج والمخزون.

5– يساعد على معرفة المواد و الكميات المخزونة و المواد والكميات التي وردت و التي سحبت من المخزن.

6– يساعد على تحديد الطرق الملائمة التي يتم من خلالها صرف المواد من المخازن.

7– يساعد على إجراءات عمليات الجرد المختلفة بنجاح.

8– كونه يشكل أداة للمحافظة على رؤوس الأموال في المؤسسة .

وتنبع أهمية الرقابة من كونها الإدارة الفعالة التي يمكن من خلالها متابعة أعمال الآخرين وضبطها وتقويمها ومعالجة الظواهر السلبية كالسرقة و الإختلاس و الإسراف في استخدام المواد، وتصحيح الأخطاء التي قد يقع الإنسان العادي فيها أثناء العمل و المساعدة في تحقيق الأهداف من خلال ضبط الجهود وتحديد مسارها

ومعالجة مختلف أشكال التسيب و الانحرافات التي قد تعرقل وتثبط الهمم وتنشر التراخي بين العاملين، وتوفير البدائل والأساليب الحديثة لحل المشاكل القائمة وتفادي المشاكل المتوقع حدوثها وضمان سلامة إتخاذ القرارات وتنفيذها بأفضل صورة ممكنة والتأكد من أنها محل إحترام الجميع هذا بالإضافة إلى ما للرقابة من دور في إكتشاف الحاجة لتطوير العمل أو الأفراد أو الإمكانات المتعلقة بالنشاط المخزني.

رابعا:أنواع الرقابة على المخزون

نظام الرقابة الداخلية يقوم بوظائف عديدة ومتنوعة بجانب الوظائف المحاسبية، وهو يهتم بدقة وملائمة وموثوقية المعلومات المحاسبية، ويهدف للتأكد من الفهم الكامل لنطاق نظام الرقابة الداخلية ، ولكي يتم الوصول إلى درجة التحكم والضبط الجيد بنظام الرقابة الداخلية يجب أن يتم من خلال اشتماله على جزأين رئيسيين هما:

1-الرقابة الإدارية :وهي تعرف بأنها تحتوي على هيكل المنظمة وجميع الإجراءات والمستندات المستخدمة في أنشطة اتخاذ القرارات الإدارية، وتؤدي إلى أنشطة و معاملات مصرح بها.

2-الرقابة المحاسبية :وهي تعرف بأنها تلك الضوابط المعنية بالحفاظ على أصول المؤسسة، واختبار دقة البيانات المحاسبية المسجلة وضمان موثوقية السجلات المحاسبية.

تتعدد أنواع الرقابة على المخزون وفقاً لما تهدف إليه الرقابة فمثلاً تصنف الرقابة على أساس الزمن إلى رقابة قبلية أو وقائية ورقابة أثناء التنفيذ ورقابة بعد التنفيذ، وعلى أساس المصدر إلى رقابة داخلية ورقابة خارجية، وعلى أساس الأهداف إلى رقابة سلبية ورقابة إيجابية، وعلى أساس مجال الرقابة إلى رقابة إدارية ورقابة مالية ورقابة فنية ،الرقابة النوعية، والرقابة الكمية، ورقابة التكلفة، والرقابة الزمانية .

3-الرقابة النوعية :يهدف هذا النوع من الرقابة إلى التأكد من أنواع ومواصفات الأصناف التي يتم إستلامها أو صرفها أو حفظها في المخازن ومدى مطابقتها للمواصفات التي يتم الإتفاق عليها والمحددة في العقود ومحاضر الفحص، وعادة ما يتم ترميز الأصناف وتبسيطها وتنميطها بغرض ضبط النوع ومراقبته وتتم عملية رقابة النوع من خلال الفحص الفعلي والتأكد من عدم الخطأ أثناء الإستلام أو حدوث تلف أو إستبدال أو إختلاط أو خطأ أثناء الحفظ أو من وجود أصناف كاسدة أو راكدة أو منتهية الصلاحية أو لا تصلح للإنتاج أو منخفضة الجودة لا تصلح لإنتاج سلعة أو خدمة منافسة في السوق.

الرقابة الكمية :يشمل هذا النوع كل من الرقابة المباشرة على مقدار الوحدات المستلمة أو المخزنة من كل نوع وذلك من خلال إما عقد التوريد في حالة الإستلام أو بطاقة الصنف أو السجلات المخزنية في حالة الجرد والرقابة الدفترية الشاملة لمقادير الأصناف المخزنة والرقابة من خلال الجرد، ورقابة الإدارة العليا دورياً أو حسب الظروف والتأكد من مقادير وقيم المخزون من الأصناف المختلفة ومدى مطابقتها لمستويات التخزين المحددة والأرصدة الدفترية مع ما هو متاح في الواقع العملي من الأصناف المختلفة وما تم توريده للمخازن أو صرفه

منها ومن خلال هذا النوع من الرقابة يمكن إكتشاف أي ركود أو إختلاف أو نقص في عدد الوحدات سواء أثناء استلام المواد أو أثناء حفظها ثم معالجة ذلك وتلافي حدوثه في المستقبل.

4-رقابة التكلفة:يركز هذا النوع من الرقابة على التكلفة والعائد الخاص بكل صنف من المخزون حيث يهدف هذا النوع إلى ضبط عملية الإستثمار في المخزون وتخفيض تكاليف الشراء والمناولة والتأمين والنقل و الإستلام والفحص والتالف والعادم، والتكاليف الناتجة عن عدم توفر المواد وما ينجم عن ذلك من خسائر مادية ومعنوية للمؤسسة ويتم ذلك من خلال التعرف على حجم الإستثمار والتكاليف المختلفة المتعلقة بالمواد المخزنة ومدى إتفاق التكاليف الفعلية مع ما حدد مسبقاً ومنع أي إنحراف يحدث في هذا المجال.

5-الرقابة الزمانية:عادة ما تحدد فترة لإعادة الشراء و زمن التخزين للصنف حتى لا يتلف بمضي المدة وزمن إستخدام الأصناف ومواعيد الجرد وزمن إنجاز كل عنصر من عناصر العمل والذي يترجم على شكل برنامج زمني، حيث تمثل هذه الفترات الأساس الذي يتم على ضوئه متابعة سير العمل في المخازن وتلافي تأخير الشراء وتقادم المواد أو إنتهاء صلاحيتها أو تجاوز الفترة المحددة لإستخدامها وبالتالي تجنيب المؤسسة المشاكل الناجمة عن ذلك.

خامسا:المفاهيم والنماذج المختلفة للمخزون

إن الهدف الأساسي لإدارة المخزون هو الاحتفاظ بالمواد لتلبية طلبات الزبائن مع ضرورة اخذ التكاليف بنظر الاهتمام، إذ تمثل تكلفة المخزون نسبة كبيرة من تكاليف أية مؤسسة، ومن خلال هذا المبحث سوف نتطرق إلى المفاهيم الخاصة بنماذج المخزون، والنماذج المختلفة للمخزون الأكيدة والاحتمالية.

05-01: المفاهيم الخاصة بنماذج المخزون

هناك بعض المفاهيم الاقتصادية الخاصة بنماذج المخزون من الضروري التعرض لها قبل صياغة نماذج المخزون وهي:

01-حجم الطلبية: وهي عبارة عن عدد الوحدات المطلوبة من المادة المخزونة والتي يتطلب استلامها ووضعها في المخزون.

02-دورة الطلب: وتعرف بأنها الفترة الزمنية بين استلام طلبيتين للسلعة نفسها وتقاس هذه الفترة بالوحدات الزمنية (كالساعات، والأيام، أو الأشهر،أو السنين....) ويرمز لها بالرمز T

03-فترة التوريد: وهي الفترة الزمنية مابين إصدار أمر شراء الطلبية وبين استلامها من المجهز.

04-نقطة إعادة الطلب: وتشير إلى الحالة التي يتوجب إصدار أمر الشراء للطلبية الجديدة لسد العجز في كمية سلعة معينة.

05-مخزون الأمان: وهو عبارة عن الكميات الإضافية من المخزون الاحتياطي تحسبا لظروف غير اعتيادية كالرقابة ضد احتمال نفاذ المخزون.

06-كلفة وضع الطلب: وتشمل كافة التكاليف التي تتحملها المنشاة عند إعداد طلب شراء المادة وليست هذه الكلفة ملائمة لكمية المادة التي سيتم شرائها.

07-كلفة الشراء: وتتمثل هذه الكلفة في سعر المادة المشتراة أي سعر الوحدة الواحدة مضروبا في عدد الوحدات.

08-المخزون الاحتياطي: وهي عدد الوحدات أو كمية المادة التي تحتفظ بها المنشاة من فترة زمنية إلى أخرى تحسبا للظروف السياسية أو الاقتصادية فضلا عن الأسباب المتعلقة بعض المواد المخزونة كقابليتها على التلف والاندثار خلال وجودها في المخزن.

09-كلفة الطلبية: وهي الكلفة المترافقة مع وضع الطلبية واستلامها وتتضمن كلفة إعداد الطلبية،نماذج الاستمارات المستخدمة، المكالمات الهاتفية، فحص السلع من الناحية الكمية والجودة عند استيلامها، حركة السلع عند الخزن المؤقت وغيرها، وعادة يعبر عنها بمقدار ثابت بغض النظر عن حجم الطلبية لهذا فان زيادة كمية الطلبية (Q) يؤدي إلى انخفاض عدد الطلبيات في السنة وكذلك إلى انخفاض كلفة الطلبية الكلية.

10-كلفة الاحتفاظ: وهذه الكلفة تتضمن كلفة الخزن لكل وحدة من المادة المخزونة في السنة، والتبريد، والتلف والتقادم التكنولوجي الذي يخفض من قيمة المخزون، وكلفة استثمار رأس المال في المخزون وعدم استخدامه في استثمارات أخرى (أي كلفة الفرصة البديلة)، وتحدد عادة كلفة الاحتفاظ كنسبة من سعر الوحدة أو كنسبة من قيمة العملة لمتوسط المخزون وتحسب كلفة الاحتفاظ الكلية (في السنة) كناتج لكلفة الاحتفاظ بالوحدة في السنة مضروبا في متوسط المخزون، ومتوسط المخزون في السنة (هو نفسه متوسط المخزون في كل فترة من فترات الطلبية) ويحسب كمتوسط الحد الأعلى للمخزون (هذا يكون عند استلام الطلبية) والحد الأدنى للمخزون (عند استهلاك الطلبية كلها) حيث أن الحد الأدنى في حالة عدم استخدام مخزون الأمان يساوي صفرا، إذن يمكن التعبير عن متوسط المخزن كالتالي

$$I_{ave} = \frac{I_{MAX} + I_{MIN}}{02}$$

02-05: النماذج المحددة للمخزون

المؤسسة بصورة عامة تقسم إلى قسمين هما أن تكون شرائية أو إنتاجية وفي كلتا الحالتين هناك مشكلة للسيطرة على المخزون ولذلك سيتم استعراض للنماذج المخزون **لعملية الشراء ولعملية الإنتاج** أي في حالة الشراء سيكون:

أ–التجهيز فوريا: أي أن المادة تصل إلى المستفيد دفعة واحدة أو صفقة واحدة لتعزيز المخزون.

ب–التجهيز تدريجيا: وفيه تصل الشحنة أو الصفقة على شكل شحنات صغيرة و لا كن متساوية ولفترات زمنية متقاربة ومتساوية، وهو الذي يعبر عنه بمعدل الإنتاج أي استخدامه في نماذج الإنتاج.

ويمكن تقسيم نماذج المخزون استنادا إلى الطلب على السلعة إلى

أ–النماذج المحددة.

ب–النماذج الاحتمالية.

من الصعب جدا صياغة نموذج رياضي عام وحيد للمخزون يأخذ بنظر الاعتبار جميع التغيرات التي تحصل في النظام الحقيقي، وحتى إذا أمكن التوصل لمثل هذا النموذج فانه من الصعب أن نستخرج تحليليا حلا لهذا النموذج.

إن نماذج المخزون تصاغ عادة على وفق حالات محددة وفي هذا المطلب سوف نتطرق للحالات التي فيها يكون الطلب ثابتا ومعروف بالكامل والنماذج لمثل هذه الحالات تعتمد على ما يسمى بحجم الطلبية الاقتصادية، وهي كمية ثابتة تطلب في كل مرة، كذلك تحديد نقطة إعادة الطلبية التي تخبرنا متى تصدر الطلبية الجديدة، ولتسهيل تحليل مثل هذه النماذج فإننا سوف نفترض التالي:

01–الطلب ثابت ومستمر.

02–الكمية المستلمة تكون دفعة واحدة.

03–فترة التوريد تكون ثابتة.

04–جميع التكاليف تكون ثابتة.

وسوف نستخدم الرموز التالية من اجل صياغة معادلة حجم الطلبية الاقتصادية:

Q: عبارة عن حجم الطلبية (عدد الوحدات التي تطلب في كل مرة).

T: الفترة الزمنية بين وصول طلبية ووصول الطلبية اللاحقة.

B: معدل الطلب في وحدة الزمن.

L: فترة التوريد Lead time وهي الفترة منذ إصدار الطلبية لحين وصولها.

C:عبارة عن تكلفة شراء الوحدة الواحدة من المادة لفترة كاملة.

K: عبارة عن تكلفة إصدار الطلبية.

h: عبارة عن تكلفة الاحتفاظ بوحدة واحدة من المادة لفترة معينة.

TC:الكلفة الكلية للمخزون.

R:نقطة إعادة الطلبية.

01-نموذج الشراء بدون عجز: يهدف هذا النموذج إلى تدنيه التكاليف الكلية للمخزون بمعنى آخر تحقيق اقل كلفة ممكنة لمجموع تكاليف إصدار الطلبية والاحتفاظ بالمخزون وذلك في ضوء الفرضيات التالية:

01-إن معدل الاستهلاك من الوحدات المخزونة معلوم ومحدد مسبقا خلال الفترة الزمنية تحت الدراسة ويرمز له ب B.

02-إن كافة مستلزمات عملية الخزن متيسرة أي معدل الإحلال غير محدد (كالمخزون والإداريين وغيرها...).

03-فترة التوريد مساوية للصفر حيث يتم استلام الطلبيات في مواعيدها المقرة دون تأخير.

04-الحجم الأقصى للطلبية الواحدة بحيث أن لا يتجاوز حجم الاستهلاك السنوي للمخزون.

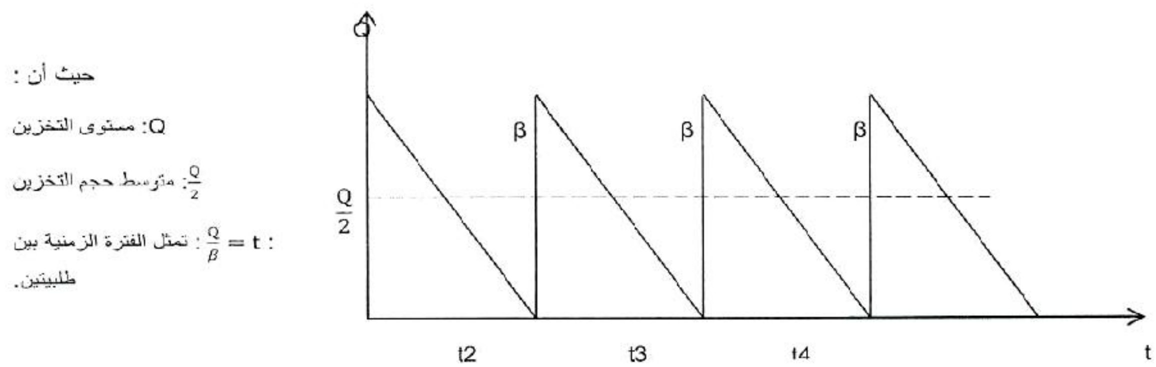
05-إن كلفة الشراء للوحدة الواحدة من المادة المخزنة ثابت لا يتغير خلال الفترة الزمنية تحت الدراسة ويرمز لها بالرمز C.

06-تكاليف إصدار الطلبية ثابت لا يتغير خلال الفترة تحت الدراسة مهما اختلفت حجم الطلبية ويرمز لها بالرمزK.

07-كلفة المخزون ثابتة خلال الفترة الزمنية تحت الدراسة ويرمز لها بالرمزh .

08-غير مسموح بإحداث عجز في المخزن.

ويمكن توضيح هذا النموذج من خلال الشكل التالي:



من الشكل السابق نلاحظ أن تذبذب المخزون خلال فترة زمنية معينة فيشير إلى انه عند استلام الطلبية الجديدة سيكون هناك حجم معين من المخزون مساويا إلىQ (حجم الطلبية) وعند نفاذ هذه الكمية يكون حجم المخزون مساويا إلى الصفر،عندئذ تصل الطلبية الجديدة حالا فيصل المخزون إلى Q وهي كمية ثابتة خلال الفترة الزمنية.

ومن باب التأكيد ليس إلا أن هذا النموذج يستخدم لسلعة واحدة والطلب هنا يكون محددا أو ثابتا لوحدة الزمن والتجهيز للكمية فوري والعجز هنا غير مسموح به، وبعض الأحيان يسمى بنموذج الشراء الفوري ولذلك تكون الكلفة الكلية للمخزون لهذا النموذج ولكل دورة مخزنية كالتالي:

01-الكلفة الكلية/ وحدة الزمن=كلفة الشراء/وحدة الزمن+ كلفة الطلبية/وحدة الزمن لإصدار الطلبية الواحدة+ كلفة الاحتفاظ بالمخزون/وحدة الزمن

وتكون صياغتها بالرموز الرياضية كالتالي:

$$TC / cycle = C \times Q + K + ht..................(01)$$

وبما أن h هي كلفة الاحتفاظ بالمخزون وتحسب لكل وحدة ولكل وحدة وقت فيجب أن تضرب (h) بالكمية المخزونة ومقدار الوقت، والكمية المخزونة اتفق أن يؤخذ معدلها والذي هو

$$Q' = \frac{Q_0 + Q_n}{02} \Rightarrow Q' = \frac{Q}{02}$$

لتصبح المعادلة (01) كالتالي

$$TC / cycle = C \times Q + K + ht \times \frac{Q}{02}..................(02)$$

والمفيد في نماذج المخزون هو استخراج الكلفة الكلية في وحدة الوقت والتي تساوي

$$\text{Total Inventory cost per unit time} = \frac{TC / cycle}{t}.......................(03)$$

ودائما يتم التعويض عن $t = \frac{Q}{B}$

لتصبح المعادلة رقم (02) في شكلها النهائي كالتالي:

$$T.C / \text{unit time } (Z) = C \times B + \frac{K \times B}{Q} + h \times \frac{Q}{02}..................(04)$$

ولتحقيق اقل تكلفة بغية إيجاد الكمية المطلوبة المثلى علينا تحديد التغير الحاصل في Q لاستبعاده، وذلك عن طريق إيجاد المشتقة الأولى للمعادلة (04) ومن ثم مساواة المشتقة (التي تمثل التغير) بالصفر وكما يأتي:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = -\frac{K \times B}{Q^2} + \frac{h}{02} \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -\frac{K \times B}{Q^2} + \frac{h}{02} = 0$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{02 \times K \times B}{h}}$$

وتمثل Q^* الكمية المثلى المطلوبة أو بما يسمى بالمقدار الاقتصادي للكمية.

كما يمكن تحديد عدد مرات الطلب خلال الفترة الزمنية N بالمعادلة التالية: $N = \frac{B}{Q}$

كما أن الزمن بين الطلبيات t يستخرج بالمعادلة التالية: $t = \frac{01}{N} = \frac{Q}{B}$

والكلفة الكلية السنوية للمخزون TC تعطى بالمعادلة التالية:

$$TC = \sqrt{02 \times K \times B \times h}$$

مثال01: إحدى شركات العلف تريد تقدير حجم الطلبية الاقتصادية لنوع معين من أنواع العلف للدواجن فإذا كان معدل متوسط الطلب الأسبوعي 80 طن، وتقدر كلفة إصدار الطلبية الواحدة ب60 وحدة نقدية لكل طلبية بينما كلفة الاحتفاظ بالكيس الواحد لمدة أسبوع هي 0.30 وحدة نقدية.

المطلوب: إيجاد التالي

01-حجم الطبية الاقتصادية.

02-الكلفة الكلية.

03-الفتة الزمنية بين طلبيه وأخرى.

الحل: لدينا من المعطيات

0.30=h،60=B،80=K

01-إيجاد حجم الطلبية الاقتصادية: لدينا مما سبق

$$Q^* = \sqrt{\frac{02 \times K \times B}{h}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{02 \times 60 \times 80}{0.30}} = 80 \times \sqrt{05} \simeq 179$$

02-إيجاد الكلفة الكلية: لدينا مما سبق

$$TC = \sqrt{02 \times K \times B \times h} \Rightarrow TC = \sqrt{02 \times 60 \times 80 \times 0.30} = 24 \times \sqrt{05} \simeq 54$$

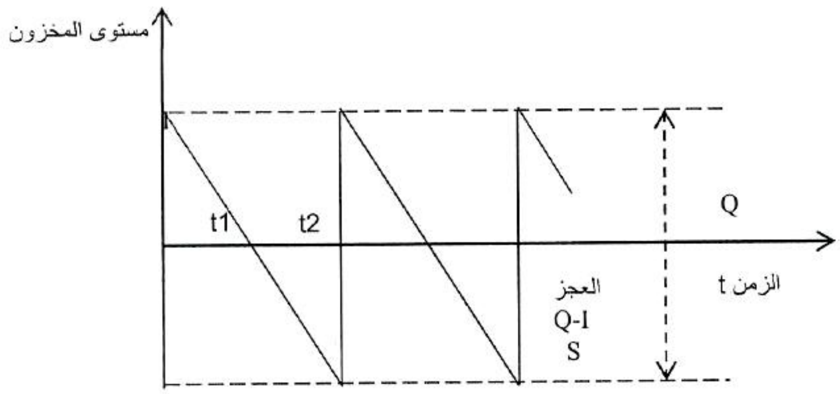
03-إيجاد الفترة الزمنية بين طلبية وأخرى: لدينا مما سبق

$$t = \frac{01}{N} = \frac{Q}{B} \Rightarrow t = \frac{179}{60} \simeq 03$$

02- نموذج الشراء مع السماح بوجود العجز: يفترض هذا النموذج وجود عجز في المواد المخزنة بمعنى أن المواد المخزنة نافذة مما يدي إلى عدم تلبية طلبات المستهلكين والتي تستلبي عند وصول المواد إلى المجهز إن وجود العجز سيكلف المنشأ المعينة تكاليف تتناسب مع طول الفترة الزمنية التي لا يمكن تحقيق الطلب خلالها.

وإن هدف هذا النموذج هو تحديد الحجم الاقتصادي للطلبية وعدد الوحدات التي لم تسدد (العجز) بحيث تكون مجموع التكاليف الكلية أقل ما يمكن:

ولتوضيح هذا النموذج نفترض الشكل التالي:



من خلال الشكل السابق نلاحظ ما يلي:

S: تمثل كمية العجز.

t_1 : تمثل الفترة الزمنية التي تكون فيها السلعة المخزونة متاحة وبالإمكان تحقيق الطلب عليها حال وقوعه.

t_2 : عبارة عن الفترة الزمنية التي يكون فيها عجز عن تسديد الطلب.

T:تمثل الفترة الزمنية بين استلام طلبيتين.

Q:الكمية الاقتصادية للمخزون خلال الفترة T.

(Q−S):كمية المخزون التي تفي باحتياجات الفترة الزمنية t_1 على فرض أن S هي كمية العجز.

يتضح من الشكل السابق ن المخزون خلال الفترة t_1 موجب، أما خلال الفترة t_2 فان المخزون مساويا ل S مع الاستمرار في وجود طلب وبصيغة أخرى وجود عجز في المخزون فعند تسلم المؤسسة الكمية الاقتصادية Q خلال الفترة T فان هذه الكمية تكفي لسد احتياجات الفترة t_1 وعندها يصبح المخزون($Q-S$) وبذلك فان صياغة النموذج ستكون:

الكلفة الكلية (Z)= الكلفة الكلية للطلبية الواحدة× عدد الطلبيات

الكلفة الكلية للطلبية الواحدة= كلفة الشراء+كلفة الطلبية+ كلفة المخزون+كلفة العجز

لتصبح معادلة الكلفة الكلية للوحدة الواحدة بالشكل التالي:

$$TC/\text{per cycl} = K + h\times\frac{(Q-S)}{02}\times t_1 + P\times\frac{S}{02}\times t_2 ....(01)$$

بحيث ان

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{Q-S}{B} \\ t_2 = \dfrac{S}{B} \end{cases}$$

وبالتعويض عن قيمتي t_1 و t_2 في المعادلة رقم (01) نجد:

$$TC/\text{per cycl} = K + h\times\frac{(Q-S)^2}{02\times B} + P\times\frac{S^2}{02\times B} ....(02)$$

ويجدر بنا استخراج الكلفة الكلية للمخزون ولكل وحدة وقت وذلك لعموم فائدتها كما يلي

$$TC/\text{per unit time (Z)} = \frac{TC/\text{cycle}}{t} ....(03)$$

مع العلم ان $t = \dfrac{Q}{B}$

لتصبح المعادلة الجديدة كما يلي

$$Z = \frac{K\times B}{Q} + h\times\frac{(Q-S)^2}{02\times K} + P\times\frac{S^2}{02\times Q} ....(04)$$

ولاستخراج الكمية المثلى للمخزون يجب تحديد التغير في معادلة الكلفة الكلية للمخزون بالنسبة للكمية، وبعد ذلك نساويها بالصفر من اجل إيجاد الكمية المثلى كالتالي:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q}=0\Rightarrow\frac{K\times B}{Q^2}+P\times\frac{S^2}{02\times Q^2}=\frac{h}{02\times Q^2}\left[02\times Q^2-02\times Q\times S-Q^2+02\times Q\times S-S^2\right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Q}=0\Rightarrow\frac{K\times B}{Q^2}+P\times\frac{S^2}{02\times Q^2}=\frac{h}{02\times Q^2}\left[Q^2-S^2\right]$$

$$\frac{K\times B}{Q^2}+\frac{P\times S^2}{02\times Q^2}=\frac{h}{02}-\frac{h\times S^2}{02\times Q^2}$$

$$02\times K\times B+P\times S^2=h\times Q^2-h\times S^2$$

$$02\times K\times B+P\times S^2+h\times S^2=h\times Q^2$$

$$02\times K\times B+S^2\left[P+h\right]=h\times Q^2\text{..................................}(05)$$

وبعد ذلك يتم الاشتقاق معادلة الكلفة الكلية للمخزون ولكل وحدة وقت بالنسبة إلى كمية العجز كما يلي:

$$\frac{\partial Z}{\partial S}=\frac{h}{02\times Q}\left[02(Q-S)(-01)\right]+\frac{02\times P\times S}{02\times Q}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S}=\frac{h}{02\times Q}\left[-02\times Q+02\times S\right]+\frac{P\times S}{Q}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S}=-h+\frac{h\times S}{Q}+\frac{P\times S}{Q}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S}=0\Rightarrow-h+\frac{h\times S}{Q}+\frac{P\times S}{Q}=0\Rightarrow h=\frac{h\times S}{Q}+\frac{P\times S}{Q}$$

$$h\times Q=h\times S+P\times S\Rightarrow h\times Q=S(P+h)$$

$$S=\frac{h\times Q}{(P+h)}\text{...}(06)$$

بتعويض (06) في (05) نجد:

$$02\times K\times B+\frac{h^2\times Q^2}{(P+h)^2}\times(P+h)=Q^2\times h\Rightarrow$$

$$\frac{02\times K\times B\times(P+h)+h^2\times Q^2}{(P+h)}=Q^2\times h\Rightarrow$$

$$02\times K\times B\times(P+h)=Q^2\times h\times P+Q^2\times h^2-h^2\times Q^2$$

$$Q^*=\sqrt{\frac{02\times K\times B\times(P+h)}{h\times P}}\text{..}(07)$$

أما قيمة العجز

$$S=\frac{h\times Q}{(P+h)}\Rightarrow S^{*}=\frac{h}{(P+h)}\times\sqrt{\frac{02\times K\times B\times(P+h)}{h\times P}}\Rightarrow$$

$$S^{*}=\sqrt{\frac{02\times K\times B\times h}{P\times(P+h)}}\text{..............................}(08)$$

أما أقصى كمية مخزون مسموح بها فتعطى بالعلاقة التالية:

$$I_{max}=\frac{h}{h+p}\times Q^{*}\text{............................}(09)$$

أما كمية العجز المسموح به فتعطى بالعلاقة التالية

$$S=Q^{*}-I_{max}=\frac{P}{P+h}\times Q^{*}\text{..............................}(10)$$

أما التكلفة الكلية للمخزون فتعطى بالعلاقة التالية:

$$Z=\frac{B\times K}{Q}+\frac{Q\times h}{02}\times\left(\frac{P}{P+h}\right)^{2}+\frac{Q\times P}{02}\times\left(\frac{h}{P+h}\right)\text{............................}(11)$$

مثال02: المعامل الخاصة لصنع الأدوات الاحتياطية للمركبات تستعمل 2400 وحدة من السلع نصف مصنعة خلال السنة، كلفة إعداد الطلبية هي 400 وحدة نقدية ولكل طلبية، كلفة المخزون هي01.20 وحدة نقدية لكل وحدة للسنة، على افتراض أن تراكم المخزون غير مسموح به.

المطلوب:

01–تحديد الكمية الاقتصادية المثلى؟

02–تحديد كمية العجز المثلى؟

03–تحديد اقل كلفة كلية للمخزون خلال السنة؟ مع فتراض ان كلفة المخزون 100 وحدة نقدية لكل شهر

04–تحديد كمية العجز المسموح به؟

05–تحديد أقصى كمية مخزون مسموح بها؟

06–تحديد التكلفة الكلية للمخزون؟

الحل: من خلال المثال نحدد المعالم مع توحيد وحدات أوقاتها كما يلي

–وحدة معدل الطلب خلال السنة هي B=2400

–كلفة الطلبية (الكلفة الثابتة) هي K=400 وحدة نقدية

–كلفة المخزون لكل وحدة بالسنة هي h=01.20 وحدة نقدية

-كلفة العجز لكل وحدة بالسنة هي $P=\frac{100}{1000}\times 12=01.20$

01-تحديد الكمية الاقتصادية المثلى: لدينا من المعادلة رقم 07

$$Q^*=\sqrt{\frac{02\times K\times B\times(P+h)}{h\times P}}\Rightarrow Q^*=\sqrt{\frac{02\times 400\times 2400\times(01.20+01.20)}{01.20\times 01.20}}=1788.85\simeq 1789$$

02-تحديد كمية العجز المثلى: لدينا من المعادلة رقم 08

$$S^*=\sqrt{\frac{02\times K\times B\times h}{P\times(P+h)}}\Rightarrow S^*=\sqrt{\frac{02\times 400\times 2400\times 01.20}{01.20\times(01.20+01.20)}}=894.43$$

03-تحديد اقل كلفة كلية للمخزون: لدينا من المعادلة رقم 04

$$Z=\frac{K\times B}{Q}+h\times\frac{(Q-S)^2}{02\times K}+P\times\frac{S^2}{02\times Q}\Rightarrow$$

$$Z=\frac{400\times 2400}{1788.85}+01.20\times\frac{(1788.85-894.43)^2}{02\times 400}+01.20\times\frac{(894.43)^2}{02\times 1788.85}=1073.300$$

04-تحديد كمية العجز المسموح به: لدينا من المعادلة رقم 10

$$S=Q^*-I_{max}=\frac{P}{P+h}\times Q^*\Rightarrow S=\frac{01.20}{01.20+01.20}\times 1788.85=894.425$$

05- تحديد أقصى كمية مخزون مسموح بها: لدينا من المعادلة رقم 09

$$I_{max}=\frac{h}{h+p}\times Q^*\Rightarrow I_{max}=\frac{01.20}{01.20+01.20}\times 1788.85=894.425$$

06- تحديد التكلفة الكلية للمخزون: لدينا من المعادلة 11

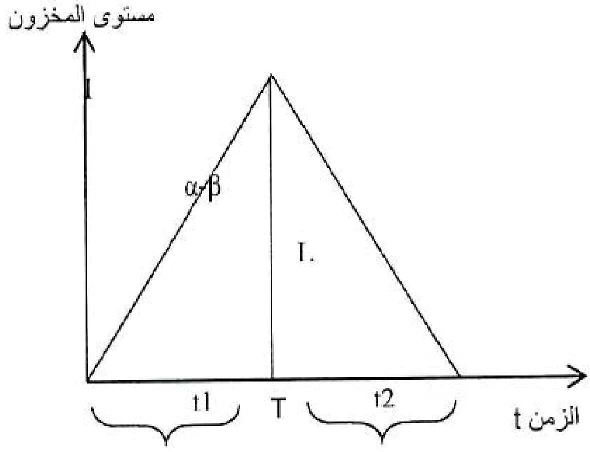
$$Z=\frac{B\times K}{Q}+\frac{Q\times h}{02}\times\left(\frac{P}{P+h}\right)^2+\frac{Q\times P}{02}\times\left(\frac{h}{P+h}\right)\Rightarrow$$

$$Z=\frac{2400\times 400}{1788.85}+\frac{1788.85\times 01.20}{02}\times\left(\frac{01.20}{01.20+01.20}\right)^2+\frac{1788.85\times 01.20}{02}\times\left(\frac{01.20}{01.20+01.20}\right)=1341.64$$

03-نموذج الإنتاج بدون عجز: يختلف هذا النموذج عن نموذج الشراء السابق كون السلعة المطلوبة يتم إنتاجها داخل المنشأة بدلا من شراء ما من الخارج سواء من مصادر محلية أو خارجية أي أن هذا النموذج يمثل حالة الفعاليات الإنتاجية التي تكون فيها عملية الإنتاج مستمرة خلال فترة زمنية معينة وبمعدل إنتاجي، ويعالج هذا النموذج الإنتاج بدون عجز في ظل الفروض الآتية:

- تدفق الوحدات الإنتاجية بصورة مستمرة خلال فترة زمنية معينة.
- لا يسمح بوجود العجز في الإنتاج.

- أن معدل الإنتاج (α) أكبر من معدل الاستهلاك ($\beta > \alpha$) والشكل (4-1) يوضع العلاقات الرياضية التي تحدد هذا النموذج:



حيث أن :

α-β: يمثل معدل الزيادة في الخزين

t1: الانتاج وتساوي $\frac{Q}{\alpha}$

t2: تمثل فترة الاستهلاك.

T=t1+t2: الفترة الزمنية بين التوقيتين للخط الانتاجي (الزمن الكلي للدورة الانتاجية) وتساوي $\frac{Q}{\beta}$

L=t1(α-β): أعلى مستوى يصله الخزين من الوحدات

تعطى التكلفة الكلية للمخزون بالعلاقة التالية:

التكلفة الكلية للمخزون لكل دورة مخزنية = كلفة الطلبية+ كلفة الاحتفاظ بالمخزون

ومن الملاحظ أن الحد الثاني من المعادلة (كلفة الاحتفاظ بالمخزون)، يتضمن المخزون في فترتين داخل الدورة المخزنية وهما خلال t_1 و t_2، كما هو واضح من خلال الشكل السابق، وبالتالي يمكن إعادة صياغة المعادلة السابقة كما يلي:

$$TC/cycle = K + h \times \frac{L}{02} \times t_1 + h \times \frac{L}{02} \times t_2 ....(01)$$

ونعلم أن $t = t_1 + t_2$، إذن تصبح المعادلة السابقة كما يلي

$$TC/cycle = K + h \times \frac{L}{02} \times (t_1 + t_2) \Rightarrow TC/cycle = K + h \times \frac{L}{02} \times t........(02)$$

ولتبسيط المعادلة 02 يجب أن نحدد مقدار L كما يلي

بأخذ المثلث في الشكل السابق وتطبيق مبدأ الضلع القائم على الوتر نجد:

$$t_1 = \frac{L}{\alpha - \beta} \Rightarrow L = t_1 \times (\alpha - \beta)......................(03)$$

بالتعويض عن قيمة t_1 بأخذ المثلث الذي قاعدته t_1 وأيضا تطبيق مبدأ القائم على الوتر نجد:

$$L = \frac{Q}{\alpha} \times (\alpha - \beta) \Rightarrow L = Q \times \left(01 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \Rightarrow L = Q \times b............................(04)$$

بتعويض 04 في 02 نجد:

$$TC/cycle = K + \frac{h \times Q \times b}{02} \times t........(05)$$

واللآن نستخرج الكلفة الكلية للمخزون ولكل وحدة وقت كما يلي:

$$TC/\text{per uniti time }(z)=\frac{K\times B}{Q}+h\times\frac{Q\times b}{02}\text{................}(06)$$

ولجعل معادلة الكلفة اقل ما يمكن لكي نجني منها الكمية المثلى للكمية فيجب إيجاد المشتقة الأولى بالنسبة إلى الكمية وجعله مساويا إلى الصفر كما يلي:

$$\frac{\partial Z}{\partial Q}=-\frac{K\times B}{Q^2}+\frac{h\times b}{02}\Rightarrow\frac{\partial Z}{\partial Q}=0\Rightarrow-\frac{K\times B}{Q^2}+\frac{h\times b}{02}=0$$

$$\frac{K\times B}{Q^2}=\frac{h\times b}{02}\Rightarrow Q^*=\sqrt{\frac{02\times K\times B}{h\times b}}\text{.........................}(07)$$

أما مستوى أعلى مخزون أمثل فتتحصل عليه بتعويض المعادلة 07 في المعادلة 04 كالتالي:

$$L^*=Q^*\times b\text{................}(08)$$

-لإيجاد أعظم مخزون ممكن نستعين بالعلاقة التالية:

$$I_{max}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\times Q^*\text{.......................}(09)$$

-لإيجاد طول الدورة المخزنية المثلى نستعين بالعلاقة التالية:

$$t^*=\frac{Q^*}{\beta}\text{.........................}(10)$$

مثال03: لإحدى الشركات طلب سنوي على إحدى سلعها المنتجة قدره 12000 وحدة وبالإمكان إنتاج 2000 وحدة شهريا وان كلفة إصدار الطلبية (توقيت الإنتاج) هي400 وحدة نقدية، وكلفة الاحتفاظ بالمخزون للوحدة الواحدة شهريا هي 0.15 وحدة نقدية.

المطلوب:

01-اوجد الحجم الاقتصاد الأمثل للإنتاج؟

02-اوجد الكلفة الكلية السنوية ؟

03-اوجد أعظم مخزون ممكن وزمن الإنتاج والزمن الكلي؟

الحل: لدينا من المعطيات

-كلفة إصدار الطلبية هو K=400

-كلفة الاحتفاظ بالمخزون هي $h=0.15\times12=01.80$

-معدل الإنتاج هو $\alpha=2000\times12=24000$

-معدل الاستهلاك $\beta=12000$

01-إيجاد الحجم الاقتصادي الأمثل للإنتاج: بالاستعانة بالمعادلة رقم 07 نجد

قبل حساب الكمية نحسب المقدار b

$$b=\left(01-\frac{\beta}{\alpha}\right)\Rightarrow b=\left(01-\frac{12000}{24000}\right)=0.50$$

ألان نحسب الكمية المثلى:

$$Q^*=\sqrt{\frac{02\times K\times B}{h\times b}}\Rightarrow Q^*=\sqrt{\frac{02\times 400\times 12000}{01.80\times 0.50}}=3266$$

02-إيجاد الكلفة الكلية السنوية:

$$TC/\text{per uniti time }(z)=\frac{K\times B}{Q}+h\times\frac{Q\times b}{02}\Rightarrow$$

$$TC/\text{per uniti time }(z)=\frac{400\times 12000}{3266}+\frac{01.80\times 3266\times 0.5}{02}=2939$$

03-إيجاد أعظم مخزون ممكن وزمن الإنتاج والزمن الكلي

لإيجاد أعظم مخزون نستعين بالعلاقة رقم09

$$I_{max}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\times Q^*\Rightarrow I_{max}=\frac{24000-12000}{24000}\times 3266=1633\text{ unit}$$

-إيجاد زمن الإنتاج والزمن الكلي

-لأجاد زمن الإنتاج نستعين بالعلاقة رقم 03 والعلاقة رقم 04:

$$\begin{cases} t_1=\dfrac{L}{\alpha-\beta} \\ L=Q^*\times b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t_1=\dfrac{1633}{24000-12000}=0.136\text{ year} \\ L=3266\times 0.50=1633 \end{cases}$$

-لإيجاد الزمن الكلي (طول الدورة المخزنية) نستعين بالعلاقة رقم 10

$$t^*=\frac{Q^*}{\beta}\Rightarrow t^*=\frac{3266}{12000}=0.27\text{ year}$$

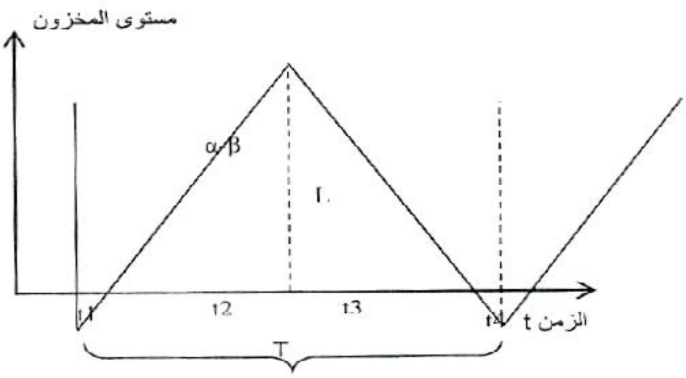
04-نموذج الإنتاج بعجز:يمكن توضيح فرضيات هذا النموذج في الشكل التالي معالأخذ بعين الاعتبار أن تلك الفرضيات تشابه فرضيات النموذج السابق ما عدا فرض العجز حيث أن هذا النموذج يسمح بوجود عجز في المخزون.

حيث أن :

$\alpha-\beta$: معدل الزيادة في الخزين

$t1+t2$: الانتاج

$t3+t4$: تمثل فترة الاستهلاك.



من الشكل السابق يمكننا أن نعطي تفسيرا كاملا لكل فترة من فترات الدورة المخزنية وتكون على النحو التالي:

t_1: تمثل فترة سداد العجز وتعطى بالمعادلة التالية $t_1=\dfrac{S}{(\alpha-\beta)}$

t_2 : تمثل وضع كمية من المخزون بالمخزن وبمعدل تراكمي متزايد وهو $(\alpha-\beta)$ خلال وحدة الزمن وصولا إلى اعلي كمية من المخزون هو L وتعطى بالمعادلة التالية $t_2=\dfrac{L}{(\alpha-\beta)}$

t_3 :هي الفترة التي يتم فيها تصريف أو استهلاك المخزون الذي بمستوى L وبمعدل B لكل وحدة وقت وصولا إلى المستوى الصفري للمخزون وتعطى بالعلاقة التالية: $t_3=\dfrac{L}{\beta}$

t_4 :فترة العجز، وسيتم العجز خلال هذه الفترة بمعدل يساوي إلى معدل الطلب B لكل وحدة الوقت، وتعطى بالعلاقة التالية: $t_4=\dfrac{S}{\beta}$

وتكملة لما ورد أعلاه يكون الجمع بين الفترات وبيان معانيها كما يلي:

- فترة الإنتاج هي $t_1+t_2=\dfrac{Q}{\alpha}$
- فترة الخزن هي t_2+t_3
- فترات العجز هي t_1, t_4

ولكي يتم التعرف على الكمية المثلى للخزين علينا تحديد الكلفة الكلية للمخزون ولكل دورة مخزنية وتكون كما يلي:

الكلفة الكلية للمخزون ولكل دورة مخزنية= كلفة الطلبية+ كلفة المخزون+ كلفة العجز

ويمكن صياغتها رياضيا كمايلي:

$$TC/cycle = K + h \times \frac{L}{02} \times (t_2 + t_3) + P \times \frac{S}{02} \times (t_1 + t_4)$$

$$TC/cycle = K + h \times \frac{L^2}{02} \times \left(\frac{01}{\beta \times \left(01 - \frac{\beta}{\alpha} \right)} \right) + P \times \frac{S^2}{02} \times \left(\frac{01}{\beta \times \left(01 - \frac{\beta}{\alpha} \right)} \right)$$

$$TC/cycle = K + h \times \frac{L^2}{02 \times \beta \times b} + P \times \frac{S^2}{02 \times \beta \times b} \text{.......................(01)}$$

وللتعرف على قيمة L لغرض تعويضها في معادلة الكلفة الكلية لكل دورة كالتالي:

لدينا مما سبق $t_1 = \frac{S}{(\alpha - \beta)}$ و $t_2 = \frac{L}{(\alpha - \beta)}$ فتكون فترة الإنتاج

$$(t_1 + t_2) = \frac{S}{\alpha - \beta} + \frac{L}{\alpha - \beta} \Rightarrow (t_1 + t_2) \times (\alpha - \beta) = S + L \Rightarrow \left(\frac{Q}{\alpha} \right) \times (\alpha - \beta) = S + L \Rightarrow$$

$$Q \times \left(01 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = S + L \Rightarrow Q \times b = S + L \Rightarrow L = Q \times b - S \text{.....................(2)}$$

ولحساب الكلفة الكلية للمخزون ولكل وحدة وقت كما يلي

$$TC/\text{per unit time } (Z) = \frac{TC/cycle}{t} \text{.......................(03)}$$

مع العلم أن $t = \frac{Q}{B}$

لتصبح المعادلة الجديدة كما يلي

$$Z = \frac{K \times \beta}{Q} + h \times \frac{L^2}{02 \times Q \times b} + P \times \frac{S^2}{02 \times Q \times b} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{K \times \beta}{Q} + h \times \frac{(Q \times b - S)^2}{02 \times Q \times b} + P \times \frac{S^2}{02 \times Q \times b} \text{.......................(04)}$$

ولتحديد قيمة التغير في معادلة الكلفة الكلية لكل وحدة وقت نأخذ المشتق الأول ونساويه بالصفر وذلك من اجل تحديد الكمية المثلى للمخزون

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = -\frac{K \times B}{Q^2} + \frac{h}{02 \times b} \left[\frac{02 \times Q \times (Q \times b - S) \times b - (Q \times b - S)^2 (01)}{Q^2} \right] - \frac{P \times S^2}{02 \times Q^2 \times b}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \frac{K \times B}{Q^2} + \frac{P \times S^2}{02 \times Q^2 \times b} = \frac{h}{02 \times b} \left[\frac{02 \times Q \times (Q \times b - S) \times b - (Q \times b - S)^2 (01)}{Q^2} \right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \frac{K \times B}{Q^2} + \frac{P \times S^2}{02 \times Q^2 \times b} = \frac{h}{02 \times b} \left[\frac{Q^2 \times b^2 - S^2}{Q^2} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Q} = 0 \Rightarrow 02 \times K \times B \times b + S^2 (P + h) = h \times Q^2 \times b^2 \text{......................(05)}$$

بعد ذلك يلزمنا تحديد التغير في المعادلة بالنسبة غالى كمية العجز ومن ثم تحديد كمية العجز وذلك باشتقاق المعادلة رقم 05 بالنسبة إلى S ومساوتها بالصفر.

$$\frac{\partial Z}{\partial S}=\frac{02\times h\times(Q\times b-S)(-01)}{02\times Q\times b}+\frac{P\times S}{Q\times b}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial S}=0\Rightarrow h\times Q\times b=S\times(P+h)\Rightarrow S^{*}=\frac{h\times Q\times b}{(P+h)}.................(06)$$

بتعويض 06 في 05 نجد أن

$$02\times K\times B\times b+\frac{h^{2}\times Q^{2}\times b^{2}}{(P+h)^{2}}\times(P+h)=h\times Q^{2}\times b^{2}\Rightarrow$$

$$02\times K\times B\times b\times(P+h)+h^{2}\times Q^{2}\times b^{2}=h\times Q^{2}\times b^{2}\times(P+h)$$

$$02\times K\times B\times b\times(P+h)+h^{2}\times Q^{2}\times b^{2}=h^{2}\times Q^{2}\times b^{2}+h\times Q^{2}\times b^{2}\times P$$

$$02\times K\times B\times b\times(P+h)=h\times Q^{2}\times b^{2}\times P$$

$$Q^{*}=\sqrt{\frac{02\times K\times B\times(P+h)}{h\times b\times P}}.............................(07)$$

ويكون حجم العجز الأمثل وذلك بتعويض المعادلة 07 في 06 فنجد:

$$S^{*}=\frac{h\times b}{(P+h)}\times\sqrt{\frac{02\times K\times B\times(P+h)}{h\times b\times P}}\Rightarrow$$

$$S^{*}=\sqrt{\frac{02\times K\times B\times h\times b}{P\times(P+h)}}.........................(08)$$

ويمكن التعبير عن معادلة الكلفة الكلية للمخزون ولكل وحدة وقت بالمعادلة التالية:

$$Z=C\times B+\sqrt{\frac{02\times K\times B\times h\times b\times P}{(P+h)}}.....................(09)$$

مثال04:شركة خدمية تقوم بتجميع مضخات ضخ المياه، ويكون تجهيزها مباشرة إلى المستهلكين من مستودع المصنع التابع للشركة، تسويق هذه المضخات يتبع الشوط التالية:

معدل الطلب من الممكن تخمينه بشكل ثابت وهو 30 وحدة من المضخات في اليوم الواحد، والكلفة الثابتة لكل وجبة إنتاجية تقدر ب100 وحدة نقدية، مع العلم أن الكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة من الإنتاج تقدر ب90 وحدة نقدية، مع العلم إذا كانت نسبة كلفة المخزون تساوي 20% بالنسبة من قيمة المخزون، وكان معدل الإنتاج يقدر ب50 وحدة من هذه المضخات، كما توجد هناك فقرة قانونية في لائحة الإنتاج وهو تغريم المصنع بمبلغ مقداره 250 وحدة نقدية لكل مضخة عن كل يوم تأخير في جدول التوزيع

المطلوب:

01–حدد الحجم الأمثل لوجبة الإنتاج؟

02–تحديد اقل كلفة كلية ممكنة للمخزون في اليوم؟

03–تحديد عدد الوحدات التي سيتأخر تجهيزها للعملاء؟

الحل: تحديد المعالم وتوحيد وحدات أوقاتها

–معدل التجهيز التدريجي أو ما يسمى معدل الصنع $\alpha = 50/\text{day}$

–معدل الطلب من قبل المستهلكين $\beta = 30/\text{day}$

–الكلفة الثابتة ولكل وجبة إنتاجية $K = 100$

–كلفة العجز أو كلفة تأخير الطلب أو ما تسمى كلفة التغريم $P = 0.250/\text{um.day}$

–نحسب قيمة b كالتالي $b = \left(01 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \Rightarrow b = \left(01 - \frac{30}{50}\right) = 0.40$

–الكلفة المتغيرة للوحدة الواحدة من الإنتاج هي C=90 um

–نسبة كلفة المخزون للسنة هي $I = \frac{20}{100} \times \frac{01}{360} = 0.00055/\text{day}$

–كلفة الاحتفاظ هي $h = I \times C = 0.00055 \times 90 = 0.050$

01–تحديد الحجم الأمثل لوجبة الإنتاج: من المعادلة رقم 07 نجد

$$Q^* = \sqrt{\frac{02 \times K \times B \times (P+h)}{h \times b \times P}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{02 \times 100 \times 30 \times (0.250 + 0.05)}{0.05 \times 0.40 \times 0.250}} = 600 \text{ uni}$$

02– تحديد اقل كلفة كلية ممكنة للمخزون في اليوم: باستخدام المعادلة رقم 08 نجد

$$S^* = \sqrt{\frac{02 \times K \times B \times h \times b}{P \times (P+h)}} \Rightarrow S^* = \sqrt{\frac{02 \times 100 \times 30 \times 0.05 \times 0.40}{0.250 \times (0.250 + 0.05)}} = 40 \text{ uni}$$

03– تحديد عدد الوحدات التي سيتأخر تجهيزها للعملاء:

$$Z = \frac{K \times \beta}{Q} + h \times \frac{(Q \times b - S)^2}{02 \times Q \times b} + P \times \frac{S^2}{02 \times Q \times b} + C \times B \Rightarrow$$

$$Z = \frac{100 \times 30}{600} + 0.05 \times \frac{(600 \times 0.40 - 40)^2}{02 \times 600 \times 0.40} + 0.250 \times \frac{(40)^2}{02 \times 600 \times 0.40} + 90 \times 30 = 2710 \text{ unit}$$

كما يمكن إيجاد نفس النتيجة باستخدام المعادلة رقم 09

$$Z = C \times B + \sqrt{\frac{02 \times K \times B \times h \times b \times P}{(P+h)}} \Rightarrow Z = 90 \times 30 + \sqrt{\frac{02 \times 100 \times 30 \times 0.05 \times 0.40 \times 0.250}{(0.250 + 0.05)}} = 2710 \text{ unit}$$

وهي نفس النتيجة السابقة

05-03: النماذج الاحتمالية للمخزون

سبق وان ذكرنا إن نماذج المخزون قد تقسم إلى محددة واحتمالية تبعا لنوع الطلب ففي كون الطلب محددا ومعروفا بصورة أكيدة فان النماذج تكون محددة، أما إذا كان الطلب عشوائي وغير محدد فضلا عن أن وقت استلام المواد الأولية أو السلع التامة الصنع المستوردة غي معروفة لهذا فانه متغير عشوائي لذلك تعد هذه النماذج نماذج احتمالية وسوف نتطرق إلى أهم هذه النماذج الاحتمالية.

ويقوم هذا النموذج الاحتمالي على مجموعة من الفروض التالية:

01-فترة الانتظار:وهي الفترة الزمنية بين طلبية وبين استلام الشحنة ويكون هنا احتماليا.

02-بعض الطلب والذي لا يلبى من المخزون لوجود عجز خلال فترة الانتظار ويسجل لكي يلبى مستقبلا عن وصول المادة.

03-توزيع الطلب خلال فترة الانتظار مستقل عن الوقت وأينما حدث.

04-لا توجد أكثر من طلبية واحدة لتعزيز المخزون في لحظة $L < t_0$ في زمن الانتظار، وهنا تكون اقصر من الدورة المخزنية.

01-نموذج نقطة إعادة الطلب (ROP): إن التغير في معدل الطلب لفترة التوريد يمكن إن يكون موصوفا وبشكل ملائم من خلال التوزيع الطبيعي وبشكل عام فان نماذج نقطة إعادة الطلب تعتمد على التوزيعات الطبيعية وان هذه النماذج تقدم نقاط إعادة الطلب التقريبية حتى عندما تبتعد التوزيعات الفعلية عن التوزيع الطبيعي، أن معدل الطلب في فترة التوريد في مد التوزيع الطبيعي يكون متمركزا حول متوسط الطلب في هذه الفترة فإذا فرضنا أن متوسط الطلب في اليوم $\overline{B}$ ومتوسط فترة التوريد L_t فان متوسط المخزون في فترة التوريد هو $\left(\overline{B} \times L_t\right)$ وان نقطة إعادة الطلب تكون مساوية لمتوسط الطلب في فترة التوريد $\left(\overline{B} \times L_t\right)$ وفي هذه الحالة فان المخزون الموجود عند وقت استلام الطلبية سيكون صفرا بالمتوسط، لهذا فانه سيكون في نصف الفترة اكبر من صفرا وفي النصف الآخر سيكون اقل من الصفر أي سيكون هناك نقص أو نفاذ المخزون (طلبيات مؤجلة) حيث أن 50% كفرصة لنفاذ المخزون نسبة عالية نسبيا لهذا يستخدم مخزون الأمان.

إن تأثير مخزون الأمان (SS) كمخفف للصدمات يوفر حماية مضافة ضد نفاذ المخزون في فترة التوريد خاصة وان معدل الطلب متغير واحتمال ظهور الطلب الأقصى وارد.

وتحسب نقطة إعادة الطلب في حالة التغير الطلب كالتالي:

نقطة إعادة الطلب (ROP)=الطلب المتوقع خلال فترة التوريد+ مخزون الأمان

$$ROP = \left(\overline{B} \times L_t\right) + SS$$

مثال01: يحتفظ مخزن شركة الجلود الصناعية بأنواع متعددة من الجلود لصناعة الحقائب، ووجدت الشركة من خلال إجرائها لدراسة ميدانية أن أكثر الحقائب مبيعا هي المصنوعة من جلود الأغنام وترغب إدارة الشركة في تحديد نقطة إعادة الطلب على جلود الأغنام في ضل الشروط التالية:

01–عدد أيام العمل الفعلية 260 يوم ف السنة.

02–كمية الطلب السنوية هي 5000 متر من جلود الاغتنام.

03–فتة الانتظار لاستلام الطلبية هي 10 أيام.

الحل: من معطيات المثال

–عدد الأيام في السنة 260يوم

–كمية الطلب السنوية هي 5000 متر

–متوسط فترة التوريد $L_t = 10$

تحديد نقطة إعادة الطلب: من خلال العلاقة السابقة وباعتبار أن مخزون الأمان يساوي صفرا، إذن

$$ROP = \left(\overline{B} \times L_t\right)$$

نحسب أولا متوسط الطلب في اليوم كالتالي: $\overline{d} = \frac{5000}{260} \simeq 19.231$

وعليه فان نقطة إعادة الطلب هي:

$$ROP = \left(\overline{B} \times L_t\right) \Rightarrow ROP = 19.231 \times 10 = 192.31\ m$$

02–حالات التغير في الطلب وفترة التوريد: في النماذج المؤكدة كان معدل الطلب B وفتة التوريد L_t ثابتتين لهذا كانت نقطة إعادة الطلب ثابتة ومؤكدة على أساس بيانات محددة ومعلومة وبالتالي لم تكن هناك حاجة إلى مخزون الأمان، لعدم وجود مخاطرة نفذ المخزون ولاكن في الحالات التي سنعرضها سيكون هناك تغير في الطلب أو في فترة التوريد أو كليهما.

02– 01 معدل الطلب المتغير وفترة التوريد ثابتة: إن معالجة التغير في الطلب ينبغي أن تتم في فترة التوريد لان إمكانية نفاذ المخزون تكون في هذه الفترة حيث أن الطلب فيها يتكون من سلسلة من الطلبات اليومية المستقلة التي يمكن وصفها من خلال التوزيع الطبيعي وبهدف استخدام نموذج نقطة إعادة الطلب في هذه الحالة يكون من الضروري معرفة معدل الطلب اليومي أو الدوري وانحرافه المعياري في فترة التوريد، وسنفرض أن كمية الطلب الكلي خلال فترة التوريد تميل لأن تتوزع توزيعا طبيعيا ولها تبيان مساو لمجموع التباينات اليومية مع فرضية أن الطلبات اليومية تكون مستقلة عن بعضها البعض.

ويمكن التعبير عنها بالعادلة الرياضية التالية: $ROP = \overline{B} \times L_t + Z \times \sigma_{\overline{B}} \times \sqrt{L_t}$

حيث

$\overline{B}$: معدل الطلب اليومي.

L_t: فترة التوريد (ثابتة في هذه الحالة)

Z: القيمة القياسية بين المتوسط ونقطة إعادة الطلب.

$\sigma_{\overline{B}}$: الانحراف المعياري لمعدل الطلب $\overline{B}$

$Z\times\sigma_{\overline{B}}\times\sqrt{L_t}$: مخزون الأمان.

إن الاحتفاظ بمخزون الأمان بقدر ما يوفر حماية إضافية ضد نفاذ المخزون وما يترافق مع هذا النفاذ من كلف تتمثل في المبيعات الضائعة والتأثير السلبي على السمعة، فانه من جانب آخر يمثل كلفة الاحتفاظ الإضافية، وإذا كان نموذج كمية الطلبية الاقتصادية يساعد على التوصل إلى كمية المخزون المثلى بالكلفة الكلية الأدنى فان التعامل مع مخزون الأمان ينبغي أن يخضع لنفس القواعد، وبالتالي فان إدارة المخزون معنية بدراسة كلفة الاحتفاظ بمخزون الأمان مقابل التخفيض في مخاطرة نفاذ المخزون، وبالتالي تحديد مستوى الخدمة الذي سوف تعتمد في الإيفاء بالطلب أي انه إذا كانت مخاطرة نفاذ المخزون تمثل احتمال (كنسبة) عدم إيفاء المخزون بالطلب فان مستوى الخدمة هو الحالة المقابلة أي انه يمثل احتمال (كنسبة) إيفاء المخزون بالطلب، لهذا يمكن تحديد مستوى الخدمة بنسبة عدد الوحدات المستلمة من قبل الزبائن إلى عدد الوحدات المطلوبة من قبلهم، ويمكن التعبير عن العلاقة بين مستوى الخدمة (SL) ومخاطرة نفاذ المخزون كالتالي:

$$SL=01-SR\left(\%\right)$$

مثال2: ورشة لتصليح الأجهزة المنزلية تستهلك نوعا من قطع الغيار بمعدل يومي 20 وحدة، وكانت فتة التوريد هي 06 أيام وقد كان الاستهلاك فيها موزعا توزيعا طبيعيا، وتعتمد الورشة مستوى خدمة لا تقل عن 95%، وكان الانحراف المعياري لتوزيع الاستهلاك 03.50 وحدة.

المطلوب:

01–تحديد نقطة إعادة الطلب ومخزون الأمان عند تلك النقطة؟

02–ما هو احتمال مخاطرة نفاذ المخزون عند نقطة إعادة الطلب 138 وحدة؟

الحل: من معطيات المثال

–مستوى الخدمة $SL=95\%$

–فترة التوريد $L_t=06$

–الانحراف المعياري $\sigma_{\overline{B}}=03.50$

–معدل الاستهلاك اليومي $\overline{B}=20$

-الدرجة المعيارية عند 95% هي $Z_{0.95}=01.645$

01-تحديد نقطة إعادة الطلب ومخزون الأمان:

لتحديد نقطة إعادة الطلب نستعين بالمعادلة التالية

$$ROP=\overline{B}\times L_t+Z\times\sigma_{\overline{B}}\times\sqrt{L_t}\Rightarrow ROP=20\times06+01.645\times03.50\times\sqrt{06}=134.10\text{ unit}$$

تحديد مخزون الأمان: مخزون الأمان ما هو إلا $Z\times\sigma_{\overline{B}}\times\sqrt{L_t}$ إذن بالحساب نجده 14 وحدة.

02- احتمال مخاطرة نفاذ المخزون عند نقطة إعادة الطلب 138 وحدة: نعلم مما سبق أن

$$SL=01-SR(\%)\Rightarrow SR(\%)=01-SL=01-0.95=0.05$$

02-02 معدل الطلب الثابت وفترة التوريد المتغيرة: في هذه الحالة يكون معدل الطلب ثابتا (معلوما) إلا أن فترة التوريد تكون متغيرة ولهذا يعتبر النموذج احتماليا، وفي هذا النموذج يفترض أن فترات التوريد موزعة توزيعا طبيعيا وكذلك الطلب المتوقع خلال هذه الفترات، إلا أن تباينه لا يكون مجموع التباينات ، وذلك لان فترة التوريد في أي دورة ستكون رقما واحدا بدلا من سلسلة من الأرقام.

وفي هذه الحالة فان الانحراف المعياري يكون مساويا إلى $(\sigma_{\overline{B}}\times L_t)$ أي للطلب في فترة التوريد، كما أن الطلب المتوقع سيمثل $(\overline{B}\times\overline{L}t)$ حيث $\overline{B}$ تمثل معدل الطلب الثابت و $\overline{L}t$ تمثل فترة التوريد المتوسطة وان نقطة إعادة الطلب تعطى بالعلاقة التالية:

$$ROP=\overline{B}\times\overline{L_t}+Z\times\sigma_{\overline{L}t}\times\overline{B}$$

أما مخزون الأمان (SS) فيحسب وفق العلاقة التالية:

$$SS=Z\times\sigma_{\overline{L}t}\times\overline{B}$$

مثال03: تحتاج شركة إلى مادة واحدة وبمعدل طلب يومي مقداره 50 وحدة وهي تعمل 06 أيام في الأسبوع طوال العام، كلفة الطلبية الواحدة 15 وحدة نقدية، وكلفة الاحتفاظ بالوحدة هي 20% وكان متوسط فترة التوريد مقداره 03 أيام، والانحراف المعياري للطلب خلال فترة التوريد هو 02 وكان الطلب وفترة التوريد تتوزعان بشكل تقريبي، وكان سعر الوحدة 05 و.ن ومستوى الخدمة المرغوب هو 90%

المطلوب:

01-حساب كمية الطلبية الاقتصادية؟

02-حساب نقطة إعادة الطلب ومخزون الأمان؟

03-تحديد مستوى الخدمة عند نقطة إعادة طلب تساوي 300 وحدة؟

الحل: من معطيات المثال

- معدل الاستهلاك اليومي $\overline{B}=50$

-كلفة الطلبية الواحدة K=15

- كلفة الاحتفاظ بالوحدة الواحدة هي h=20%

-متوسط فترة التوريد هي $\overline{L}t = 03$

-الانحراف المعياري لفترة التوريد هو $\sigma_{\overline{L}t} = 02$

-مستوى الخدمة المرغوبة SL=90%

01-حساب كمية الطلبية الاقتصادية: لدينا مما سبق المعادلة التالية

قبل حساب كمية الطلبية الاقتصادية يجب أولا حساب معدل الطلب السنوي كالتالي:

$$B = 50 \times 06 \times 52 = 15600 \text{ unit}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{02 \times K \times B}{h}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{02 \times 15 \times 15600}{0.20 \times 05}} = 684 \text{ unit}$$

02- حساب نقطة إعادة الطلب ومخزون الأمان

-حساب نقطة إعادة الطلب: من خلال المعادلة السابقة

$$ROP = \overline{B} \times \overline{L_t} + Z \times \sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B}$$

نستخرج أولا قيمة الدرجة المعيارية عند 90% : $Z_{0.90} = 01.285$

إذن $ROP = \overline{B} \times \overline{L_t} + Z \times \sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B} \Rightarrow ROP = 50 \times 03 + 01.285 \times 02 \times 50 = 278.50 \text{ unit}$

أما قيمة مخزون الأمان فيتحدد بالعلاقة التالية

$$SS = Z \times \sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B} \Rightarrow SS = 01.285 \times 02 \times 50 = 128.50 \text{ unit}$$

03-تحديد مستوى الخدمة عند نقطة إعادة الطلب تساوي 300 وحدة

لدينا من العلاقة الأساسية لنقطة إعادة الطلب

$$ROP = \overline{B} \times \overline{L_t} + Z \times \sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B} \Rightarrow Z = \frac{ROP - \overline{B} \times \overline{L_t}}{\sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B}} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{300 - 50 \times 03}{02 \times 50} = 01.50$$

وبالعودة إلى جدول التوزيع الطبيعي للقيم السفلى نجد أن مستوى الخدمة هو 93.32%

02-03 حالة الطلب اليومي المتغير وفترة التوريد المتغيرة: وتعتبر هذه الحالة أكثر تعقيدا لأنها تتسم بدرجة أعلى من التغير لان الطلب وفترة التوريد كلاهما متغيرين لهذا فان مخزون الأمان سيكون أكبر بالمقارنة مع الحالتين السابقتين حيث كان واحدا فقط هو المتغير وليس كلاهما ولان الطلب المتوقع هو حاصل ضرب الطلب اليومي (المتغير) وفترة التوريد (متغيرة)، لهذا فان التبيابن الكلي سيكون أكبر لأنه يمثل مجموع تبياينات الطلب

وفترة التوريد، وكذلك الحال مع الانحراف المعياري، ولنفرض أن الطلب اليومي وفترة التوريد كلاهما يتوزعان توزيعا طبيعيا، وعندئذ فان الطلب الكلي أيضا سيكون موزعا توزيعا طبيعيا، ويمكن ان نلاحظ من النموذجين السابقين أن الانحراف المعياري لكل واحد منهما هو

$$\sigma_{L_t} = \sigma_{\bar{L}t} \times \bar{B} \quad ، \sigma_B = \sigma_{\bar{B}} \times \sqrt{L_t}$$

وان الانحراف المعياري لمجموع الطلب خلال فترة التوريد سيكون

$$\sigma_{\sigma_B+\sigma_{L_t}} = \sqrt{(\sigma_B)^2 + (\sigma_{L_t})^2} \Rightarrow \sigma_{\sigma_B+\sigma_{L_t}} = \sqrt{\left(\sigma_{\bar{B}} \times \sqrt{L_t}\right)^2 + \left(\sigma_{\bar{L}t} \times \bar{B}\right)^2}$$

لذلك في هذه الحالة تكون نقطة أعادة الطلب ROP هي

$$ROP = \bar{B} \times \overline{L_t} + Z \times \sqrt{\left(\sigma_{\bar{B}} \times \sqrt{L_t}\right)^2 + \left(\sigma_{\bar{L}t} \times \bar{B}\right)^2}$$

حيث أن:

$\bar{B} \times \overline{L_t}$: متوسط الطلب الكلي في فترة التوريد المتوسط.

أما مخزون الأمان SS فيعبر عنه من خلال العلاقة التالية:

$$SS = Z \times \sqrt{\left(\sigma_{\bar{B}} \times \sqrt{L_t}\right)^2 + \left(\sigma_{\bar{L}t} \times \bar{B}\right)^2}$$

مثال04: إحدى شركات التجارة تحتاج احد المنتجات بمتوسط 500 وحدة في الأسبوع، وانحراف معياري في الأسبوع 10 وحدات، ويتم التوريد في فترة متوسطها 03 أسابيع، وانحراف معياري أسبوع واحد وان كلا الطلب وفترة التوريد تتوزعان توزيعا طبيعيا، وكانت كلفة الطلبية 100 وحدة نقدية وكلفة الاحتفاظ بالوحدة 0.50 وحدة نقدية.

المطلوب:

01-حساب نقطة إعادة الطلب ومخزون الأمان عند مستوى الخدمة 95%؟

02-إحتساب الكلفة الكلية للمخزون في الشركة؟

الحل: من معطيات المثال

- معدل الاستهلاك اليومي $\bar{B} = 500$

-الانحراف المعياري لمتوسط الوحدات $\sigma_{\bar{B}} = 10$

-الانحراف المعياري لفترة التوريد $\sigma_{\bar{L}t} = 01$

-كلفة الطلبية الواحدة K=100

- كلفة الاحتفاظ بالوحدة الواحدة هي h=0.50

-متوسط فترة التوريد هي $\overline{L}t = 03$

-مستوى الخدمة المرغوبة SL=95%

01- حساب نقطة إعادة الطلب ومخزون الأمان عند مستوى الخدمة 95%

لحساب نقطة إعادة الطلبية عند مستوى الخدمة 95% نستعين بالعلاقة التالية

$$ROP = \overline{B} \times \overline{L_t} + Z \times \sqrt{\left(\sigma_{\overline{B}} \times \sqrt{\overline{L_t}}\right)^2 + \left(\sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B}\right)^2}$$

وقبل حساب نقطة إعادة الطلبية نستخرج أولا الدرجة المعيارية عند 95% والتي تساوي $Z_{0.95} = 01.645$

إذن

$$ROP = \overline{B} \times \overline{L_t} + Z \times \sqrt{\left(\sigma_{\overline{B}} \times \sqrt{\overline{L_t}}\right)^2 + \left(\sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B}\right)^2} \Rightarrow$$

$$ROP = 500 \times 03 + 01.645 \times \sqrt{\left(10 \times \sqrt{03}\right)^2 + \left(01 \times 500\right)^2} = 2323 \text{ unit}$$

-مخزون الأمان يحسب وفق العلاقة التالية:

$$SS = Z \times \sqrt{\left(\sigma_{\overline{B}} \times \sqrt{\overline{L_t}}\right)^2 + \left(\sigma_{\overline{L}t} \times \overline{B}\right)^2} \Rightarrow$$

$$SS = 01.645 \times \sqrt{\left(10 \times \sqrt{03}\right)^2 + \left(01 \times 500\right)^2} = 823$$

02-حساب الكلفة الكلية للمخزون في الشركة:

-نحسب اولا الطلب الكلي السنوي كما يلي: $B = 500 \times 52 = 26000 \text{ unit}$

-نحسب كمية الطلبية الاقتصادية:

$$Q^* = \sqrt{\frac{02 \times K \times B}{h}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{02 \times 100 \times 26000}{0.50}} = 3225 \text{ unit}$$

-وفي حال وجود مخزون أمان فان متوسط المخزون يساوي

$$\overline{SS} = \left(\frac{Q^* + SS}{02}\right) \Rightarrow \overline{SS} = \left(\frac{3225 + 823}{02}\right) = 2024 \text{ unit}$$

وبالتالي ستكون الكلفة الكلية كالتالي:

$$TC = \frac{26000}{3225} \times 100 + \left(\frac{3225 + 823}{02}\right) \times 0.50 = 1818.20 \text{ unit}$$

البرمجة غير الخطية

1-مقدمة: تتميز مسألة البرمجة اللاخطية بوجود مجموعة من المصطلحات التي تستدعي ضمنيا إستخدام توابع لاخطية مثل $\ln x$ ، $e^{X_1+X_2}$ ، $\sin x$....إلخ، كما أن اللاخطية تظهر نتيجة تأثير متبادل بين متحولين أو أكثر مثل: x_1, x_2 ، $x_1 \ln x_2$ ، $x_1^{x_2}$ .....إلخ

إن دراسة تقنيات حلول مسائل البرمجة اللاخطية أدت إلى إيجاد بنية أساسية تستخدم إيجاد هذه الحلول وتدل هذه البنية في البداية على أنه يمكن إيجاد حل أمثل وفق حل ذكي لمجموعة من المعادلات الخطية.

عولجت مسائل البرمجة غير الخطية بإستخدام طرق تقليدية قدمها رياضيوالقرن السابع والثامن عشر (لاغرانج،نيوتن...)،ومازال الكثير من هذه الطرق يجذب الباحثين في عصرنا الحالي،أما القفزة العظمى في هذا المجال كانت عام 1951 عندما توصل كين-تيوكر إلى إضافة شروط جديدة على أسلوب طريقة مضاريب لاغرانج مما أدى إلى السيطرة على معظم مشاكل البرمجة غير الخطية.

2-الصيغة العامة للبرمجة غير الخطية: تبحث مسائل الأمثلية الرياضية عن تعظيم او تصغير كمية معينة ندعوها بالهدف، وهذه الكمية تعتمد على عدد من متغيرات القرار،حيث إن هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها البعض أو مرتبطة من خلال مجموعة من القيود.

والنموذج الرياضي هو مسألة أمثلية يكون فيها الهدف والقيود على شكل توابع رياضية وفق الصيغتن التاليتين:

أ-مسألة التعظيم:تأخذ الشكل التالي

$$\mathrm{MAX}(Z) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \le r_1 \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \le r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \le r_m \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

ب-مسألة التصغير (التدنية): تأخذ الشكل التالي

$$\mathrm{MIX}(W) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$$
$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \ge r_1 \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \ge r_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) \ge r_m \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \; j = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$$

يتضح من خلال الصيغتين ان البرنامج غير الخطي مثله مثل البرنامج الخطي يحتوي أيضا على ثلاثة مكونات أساسية هي دالة الهدف، عدد m من القيود، ومجموعة من قيود عدم السلبية على متغيرات الإختيار (n).

3- متطلبات أساسية للبرمجة غير الخطية: في مسائل البرمجة غير الخطية لابد من معرفة المتطلبات الأساسية التي تقوم عليها والتي سوف نذكره في النقاط التالية

3-1الحلول الممكنة: هي مجموعة الأشعة $X \in R^n$ والتي تحقق جيمع القيود، إلا انه في مسائل البرمجة غير الخطية نميز نوعين من المشاكل على النحو التالي:

3-1-1النوع الأول: تكون المشكلة غير خطية بحيث تكون منطقة الحلول الممكنة التي تمثل القيود الهيكلية فئة محدبة (convex set)، وفي هذه الحالة يمكن الحصول على الحل الأمثل عند إحدى النقطة الطرفية لفئة الحلول الممكنة.

3-2-2النوع الثاني:تكون المشكلة غير خطية وتكون فئة الحلول الممكنة غير محدبة (non-convex set)،وفي هذه الحالة يمكن الحصول على نقطة حل أمثل نسبية تختلف في معظم الحالات عن نقطة الحل الأمثل المطلق.

3-2الحل الأمثل: هو الشعاع الذي يحقق جميع القيود ويبلغ التابع عنده قيمة مثلى (مع الإشارة إلى انه ليس من الضروري ان يكون وحيدا).

3-3منطقة الإمكانات (منطقة الحلول): هي المنطقة التي تحوي جميع الحلول (الأشعة) التي تحقق القيود.

3-4النماذج اللاخطية:إذا كانت أي مركبة من مركبات تابع الهدف أو القيود لا خطية فإن المسألة تصبح مسألة برمجة لا خطية.

3-5التابع المتزايد والمتناقص: يكون التابع متزايد أو متناقص إذا وافق إذا تحقق مايلي

3-5-1 نقول عن التابع $f(x)$ أنه تابع متزايد إذا تحقق من اجل $x_1 > x_2 > x_3 > .... > x_n$

فإن $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > .... > f(x_n)$

3-5-2نقول عن التابع $f(x)$ أنه تابع متناقص إذا تحقق من اجل $x_1 < x_2 < x_3 < .... < x_n$

فإن $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < .... < f(x_n)$

3-6التابع أحادي النمط: هو الذي يتزايد (يتناقص) ضمن مجال معين إلى قيمة معينة ثم يتناقص (يتزايد) ففي هذه الحالة يكون لهذا التابع قمة واحدة ، أما إذا كان للتابع أكثر من قيمة ضمن مجال معين عندها يدعى متعدد الأنماط.

4-التوابع المقعرة والتوابع المحدبة: يكون التابع إما مقعرا أو محدبا ويتم توضيح ذلك كمايلي

4-1 التابع المحدب:ناخذ أي نقطتين X_2, X_1في فضاء بعده n، إذا تحققت المتراجحة التالية عند أي زوجين من نقاط هذا الفضاء فإن التابع يكون محدبا إذا وافق إذا تحقق مايلي:

$$f\left[(1-\theta)X_1 + \theta X_2\right] \le (1-\theta)f(X_1) + \theta f(X_2)$$

حيث: $0 \le \theta \le 1$

4-2 التابع المقعر:ناخذ أي نقطتين X_2, X_1في فضاء بعده n، إذا تحققت المتراجحة التالية عند أي زوجين من نقاط هذا الفضاء فإن التابع يكون مقعرا إذا وافق إذا تحقق مايلي:

$$f\left[(1-\theta)X_1 + \theta X_2\right] \ge (1-\theta)f(X_1) + \theta f(X_2)$$

حيث: $0 \le \theta \le 1$

5-مشاكل البرمجة غير الخطية:

عادة ماتكون مشكلة البرمجة على النحو التالي:

أوجد قيم X_j بحيث $j=1.2.3......,n$ التي تجعل: $\text{Max or Min } Z=f\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)$

في ظل الشروط التالية: $g_i\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)\begin{pmatrix}\geq\\=\\\leq\end{pmatrix}b_i\ ,\ i=1,2,3,......,m$

فإذا كان يوجد دالة واحدة على الأقل من الدوال $f\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)$ و $g(X)$ دالة غير خطية تكون المشكلة مشكلة برمجة غير خطية.

وعندما تكون القيود في شكل متساويات على النحو التالي:

$$g_i\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)=b_i\ ,\ i=1,2,3,......,m$$

تسمى المشكلة في هذه الحالة بمشكلة الأمثلية التقليدية وتسمى طرق حل هذه المشاكل التقليدية بطرق حل مشاكل الأمثلية التقليدية، وتعتبر طرق الحل التقليدية ذات اهمية في حل المشاكل التقليدية كذلك هي الأساس في فهم طرق وحل المشاكل الخرى غير التقليدية عندما تأخذ مشكلة البرمجة غير الخطية شكلها العام.

وعند البحث عن حل لمشكلة البرمجة غير الخطية نحتاج إلى:

1- فحص جميع النقاط التي عندها المشتقات الجزئية الأولى المتصلة تساوي صفر.

2-فحص جميع النقاط داخل منطقة الحلول الممكنة التي يوجد عندها عدم إتصال للمشتقات الجزئسة الأولى.

3-يمكن تقسيم مشاكل البرمجة غير الخطية إلى:

3-1 المشاكل غير المقيدة: هما تكون المشكلة على النحو التالي

أوجد قيم X_j بحيث $j=1.2.3......,n$ التي تجعل: $\text{Max or Min } Z=f\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)$

ولا توجد أي قيود على دالة الهدف

وعندما تكون الدالة $f\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)$ دالة مقعرة او محدبة فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى أو الصغرى المطلقة وتكون هذه النهاية هي الحل الأمثل للمشكلة،وفي هذه الحالة يمكن إستخدام الطرق التقليدية للحل.

أما إذا كانت الدالة $f\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)$ دالة غير مقعرة فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى أو الصغرى النسبية،وتوجد أساليب حديثة نسبيا لحل مثل هذه المشاكل مثل البرمجة الهندسية.

3-2 المشاكل المقيدة: وهنا تكون المشكلة على النحو التالي

$$\text{Max or Min } Z=f\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)$$

$$g_i\left(x_1,x_2,x_3,.......,x_n\right)\begin{pmatrix}\geq\\=\\\leq\end{pmatrix}b_i\ ,\ i=1,2,3,......,m$$

بحيث تكون $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\right)$ أو $g_i\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\right)$ أو كلاهما دالة غير خطية وفي هذه الحالة:

-إذا كانت الفئة التي تحقق القيود $g_i(x)$ فئة مغلقة وحدودية محدبة ودالة الهدف مقعرة فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى او الصغرى للدالة $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\right)$ وفي هذه الحالة يمكن الحصول على الحل الأمثل باستخدام الطرق التقليدية.

-أما إذا كانت الفئة التي تحقق القيود $g_i(x)$ فئة غير محدبة وفي هذه الحالة سواء كانت $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\right)$ مقعرة أو غير مقعرة، فإنه يمكن الحصول على نهاية عظمى أو صغرى نسبية لدالة $f\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n\right)$ التي تحقق القيود وبالتالي الحصول على حل نسبي للمشكلة.

6-طرق حل مسائل البرمجة غير الخطية:

إن أساليب حل مسائل البرمجة اللاخطية أعقد بكثير من أساليب حل مسائل البرمجة الخطية وتتطلب غالبا قيود إضافية ولهذا السبب فإن الأساليب الحسابية المكتشفة تعالج فقط مجموعة جزئية من مسائل البرمجة اللاخطية ومن بين هذه الطرق:

6-1 الطريقة البيانية: نوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالي

لتكن لدينا مسألة البرمجة اللاخطية التالية

$$\text{Min } f(X) = (X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2$$

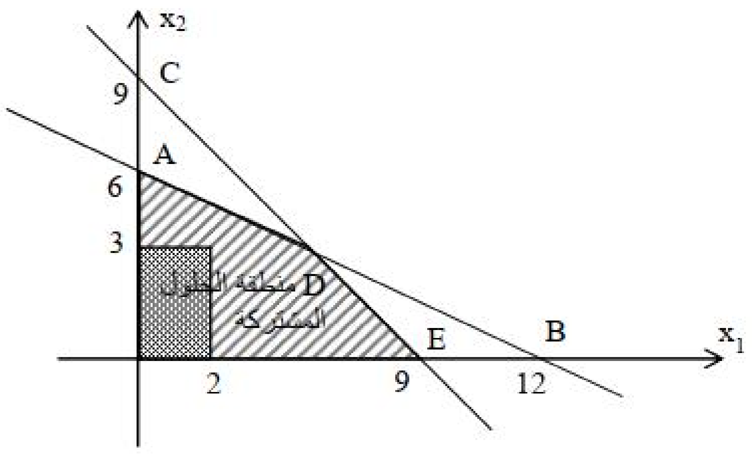
$$S/C = \begin{cases} X_1 + 2X_2 \le 12 \\ X_1 + X_2 \le 09 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:

إيجاد الشعاع $X^* = (X_1, X_2)$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية: $f(X^*) \le f(X) \quad \forall X \in D$

الحل:

1-نقوم بتحديد منطقة الحلول وذلك من خلال تمثيل القيود في مستوى متعامد ومتجانس، والشكل التالي يوضح ذلك



2-نرسم منطقة الإمكانات D والتي تشكل من تقاطع القيود

3-نرسم تابع الهدف وهوعبارة عن دائرة مركزها النقطة $M(2,3)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{f}$

4-من الشكل واضح أن $\text{Min } f(X)=0$ حيث ان أصغر قيمة يبلغها تابع الهدف في المركز $M(2,3)$

ملاحظة: إن الطريقة المتبعة في إيجاد الحل الأمثل للمسائل اللاخطية تناسب فقط المسائل البسيطة والتي تحوي متحولين فقط، فهي غير عملية من أجل المسائل التي تحتوي على أكثر من متحولين أو يكون فيها تابع الهدف معقد بالإضافة إلى وجود قيود لا نستطيع التعبير عنها بأشكال بسيطة، لذلك لا بد من طرق أخرى لحل مسائل البرمجة اللاخطية

6-2 بعض الطرائق العددية لإيجاد القيم المثلى: قبل البدئ بعرض الطرق العددية لإيجاد الحلول المثلى نميز نوعين من المسائل:

-مسائل البرمجة اللاخطية غير المقيدة.

-مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة.

ند حل مسائل البرمجة اللاخطية سواء كانت مقيدة او غير مقيدة فإن مصادفة شروط كالتحدب والتقعر تسهل عملية الحصول على الحل الأمثل.

وإذا كانت التوابع مستمرة ومحدودة فإن وجود نهاية عضمى أو صغرى يكون إما عند نقطة داخل منطقة الحلول الممكنة أو على حدود هذه المنطقة وذلك لأن أي تابع محدود يجب ان يكون قيمة عضمى أو صغرى في مكان ضمن المنطقة التي نهتم بها، وإذا كان التابع مستمرا عندها يمكن تعيين النقاط المستقرة بإستخدام حسابات تفاضلية تعطي جميع المشتقات التي يمكن إيجادها، وتكون النقاط المستقرة في الدلخل أو على الحدود إذا إنعدمت المشتقات الجزئية لتابع غير مقيد عند شعاع الحل.

وعند حل مسألة البرمجة اللاخطية فإننا نحتاج إلى إختبار الحالات التالية:

-جميع النقاط التي تكون عندها كل المشتقات من الدرجة الأولى معدومة.

-جميع النقاط داخل المنطقة التي تكون عندها المشتقات من الدرجة الأولى غير مستمرة (نقاط الإنقطاع).

-النقاط الواقعة على حدود منطقة الحلول.

6-2-1 مسائل البرمجة اللاخطية غير المقيدة: تأخذ مسألة البرمجة اللاخطية غير المقيدة الشكل التالي ليكن لدينا التابع $f:R^n \to R$ والذي يعرف بالشكل $f(X)=(X_1,X_2,X_3.......,X_n)$،وذلك من أجل أي شعاع $X\in R^n$،وليكن المطلوب هو $\text{Min } f(X) \quad \forall X\in R^n$

نقول عن هذه المسألة إنها غير خاضعة لقيود، أي أننا نبحث عن نقطة $X^*\in R^n$ بحيث يكون:

$$f(X^*)\le f(X) \quad ;\forall X\in R^n$$

نقول عن النقطة (X^*)إنها نهاية حدية صغرى عامة ووحيدة.

6-2-1-1 الشروط اللازمة والكافية لوجود النهايات الصغرى العامة و الموضعية:

ليكن لدينا $f(X)$ تابعا مستمرا وأيضا مشتقاته الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ والثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}$ مستمرة أيضا من أجل أي نقطة $X \in R^n$، عندئذ يكون لدينا:

نظرية:إذا كانت النقطة (X^*) نهاية حدية صغرى (عامة أو موضعية) للتابع $f(X)$، فإن:

1- $\nabla f(X^*) = 0$

2- مصفوفة هيسيان للتابع $f(X)$: $\nabla^2 f(X^*) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}(X^*)\right]$ هي مصفوفة معرفة موجبة أو شبه موجبة.

تعريف: نقول عن النقطة (X^*) التي تحقق الشرط الأول (01) من النظرية السابقة أي $\frac{\partial f}{\partial X_j}(X^*)$ أنها نقطة ساكنة حرجة.

مثال2: أوجد القيم القصوى للتابع $\forall X \in R^n$ $f(X) = (X^2 - 1)^3$ ثم حدد طبيعتها؟

الحل: نقصد بالقيم القصوى (القيم الصغرى أو القيم العظمى)، ولإيجاد هذه القيم نعتمد على العلاقة التالية

$$\nabla f(X) = 0$$

وبالتالي

$$6(X^2 - 1)^2 \times X$$

إما $X=0$ ، أو $X=1$ ، $X=-1$

لتحديد طبيعة هذه النقاط نوجد مصفوفة هيسيان في هذه النقاط:

$$H(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 6(X^2 - 1) + 24X^2(X^2 - 1)$$

نحسب قيمتها عند كل نقطة من هذه النقاط:

-فمن أجل $X=0$: $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(0) = 6 > 0$

وبالتالي $(X^* = 0)$ هي نهاية حدية صغرى للتابع f.

- من أجل $X \pm 1$ فإن $\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = 0$ ،أي ان المحدد الهيسي موجب شبه تام،أي قد يكون نهاية صغرى أو نهاية عظمى أو نقطة إنعطاف،وبالتالي لا نستطيع تحديد نوع النقطة.

-حالة التوابع المحدبة: عندما يكون التابع $f(X)$ محدبا ومعرفا على R^n، فإننا نستطيع الحصول على شروط لازمة وكافية لكي تكون نقطة ما نقطة حدية صغرى عامة،ويمكن تلخيصها بالنظرية التالية:

نظرية:إذا كان $f(X)$ تابعا محدبا وقابلا للإشتقاق وبشكل مستمر، فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون النقطة (X^*) هي نقطة نهاية حدية صغرى عامة للتابع $f(X)$ فوق R^n هو أن يكون $\nabla f(X^*) = 0$

الشروط اللازمة والكافية لوجود النهايات العظمة العامة والموضوعية: يمكن أن نعطي الشروط اللازمة والكافية لوجود نهايات عظمى، ونلخصها فيمايلي:

نظرية:إذا كان التابع $f(X)$ مستمرا ومشتقاته الجزئية الأولى $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ والثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}$ مستمرة أيضا من أجل أي نقطة $X \in R^n$، عندئذ يكون لدينا:

-إذا كانت النقطة (X^*) نهاية حدية عظمى (عامة او موضوعية) للتابع $f(X)$ فإن

1- $\nabla f(X^*) = 0$

2-مصفوفة هيسيان للتابع $f(X)$: $\nabla^2 f(X^*) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}(X^*)\right]$ هي مصفوفة سالبة تامة.

نتيجة: بفرض أن : $\nabla f(X^*) = 0$ هذا يعني احد الحالات التالية:

1-إذا كانت $H(X^*)$ موجبة تامة، هذا يعني أن X^* لها نهاية حدية صغرى موضعية.

2-إذا كانت $H(X^*)$ سالبة تامة، هذا يعني أن X^* لها نهاية حدية عظمى موضعية.

3-إذا كانت $H(X^*)$ موجبة شبه تامة (أو سالبة شبه تامة)،في هذه الحالة قد تكون X^* قيمة قصوى وقد لا تكون (وهنا نستخدم علاقات خاصة بالنهاية).

4- إذا كانت $H(X^*)$ ليست سالبة تامة وليست موجبة تامة عندئذ X^* ليست قيمة صغرى وليست قيمة عظمى

مثال3: أوجد نقطة الإستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل نقطة

$$f(X_1, X_2) = -X_1^2 - X_2^2 + 4X_1 + 6X_2 + 10$$

الحل:

نوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة ونساويها بالصفر للحصول على نقطة الإستقرار على النحو التالي

$$\begin{cases} \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} = -2X_1 + 4 = 0 \\ \frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} = -2X_2 + 6 = 0 \end{cases}$$

وبحل المعادلتين السابقتين نجد ان للدالة $f(X_1, X_2)$ نقطة إستقرار واحدة هي $(X_1 = 2, X_2 = 3, f = 15)$ ولتحديد نوع النقطة نوجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية.

-نوجد مصفوفة المشتقات الجزئية من الرجة الثانية اي المحدد الهيسي عند نقطة الإستقرار

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_1 \partial X_2} \\ \frac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 f(X_1, X_2)}{\partial X_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

وبفحص المصفوفة H (المحدد الهيسي) عند نقطة الإستقرار نجد أنها مصفوفة تامة السالبية، وبالتالي فإن نقطة الإستقرار هي نقطة نهاية عظمى.

مثال4:حدد نقطة الإستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل نقطة

$$f\left(X_1,X_2,X_3\right)=-X_1^3-X_2^3-X_3^3+3X_1+12X_2-\frac{3}{2}X_3^2$$

الحل:للحصول على نقطة إستقرار نوجد المشتقات الجزئية من الترتيب الأول ونساويها بالصفر

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f\left(X_1,X_2,X_3\right)}{\partial X_1}=-3X_1^2+3=0\rightarrow X_1=\pm 1\\ \dfrac{\partial f\left(X_1,X_2,X_3\right)}{\partial X_2}=-3X_2^2+12=0\rightarrow X_2=\pm 2\\ \dfrac{\partial f\left(X_1,X_2,X_3\right)}{\partial X_3}=-3X_3^2-3X_3=0\rightarrow X_3=0,-1\end{cases}$$

وبحل المعادلات السابقة نجد أن نقطة الإستقرار هي

$$\left(X_1=1,X_2=2,X_3=0\right),\quad \left(X_1=-1,X_2=2,X_3=0\right)$$
$$\left(X_1=1,X_2=-2,X_3=0\right),\quad \left(X_1=-1,X_2=-2,X_3=0\right)$$
$$\left(X_1=1,X_2=2,X_3=-1\right),\quad \left(X_1=-1,X_2=2,X_3=-1\right)$$
$$\left(X_1=1,X_2=-2,X_3=-1\right),\quad \left(X_1=-1,X_2=-2,X_3=-1\right)$$

-نوجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية أي المحدد الهيسي

$$H=\begin{bmatrix}-6X_1 & 0 & 0\\ 0 & -6X_2 & 0\\ 0 & 0 & -6X_3-3\end{bmatrix}$$

-إذا إعتبرنا أن : $X_0=\left(X_1=1,X_2=2,X_3=0\right)$ فإن:

$$H/_{X_0}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

وبفحص المصفوفة الهيسية نجد ان المصفوفة تامة السلبية وبالتالي فإن النقطة X_0 هي نقطة عظمى.

-إذا إعتبرنا أن : $X_1=\left(X_1=-1,X_2=2,X_3=0\right)$ فإن:

$$H/_{X_1}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

وبفحص المصفوفة الهيسية نجد أن النقطة X_1 ليست نهاية عظمى أو صغرى أي أن X_1 قد تكون نقطة إنقلاب أو إرتكاز .

وبالمثل يمكن فحص باقي نقط الإستقرار.

6-2-2 مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة:بفرض اننا نرغب في تحديد القيم المثلى لتابع غير خطي $f(X)$ يخضع لجملة قيود، هذه القيود تأخذ إما صيغة مساويات أو صيغة متراجحات، عالجت هذا النوع من المسائل عدة طرائق نذكر منها طريقة جاكوب وطريقة مضاريب لاغرانج،ولعل الطريقة الأخيرة نالت إهتماما اوفر ةأظهرت فعالية وأدخلت عليها تطويرات مناسبة بحيث تمكنت من مواجهة معظم المواقف بكفاءة عالية.

ولحل مشاكل البرمجة غير الخطية نهدف إلى الحصول على نقطة إستقرار أولا ثم تحديد النقطة العظمى (أو الصغرى) النسبية،ثم إيجاد النقطة العظمى (أو الصغرى) المطلقة،في بعض الحالات الخاصة مثل حالة دالة الهدف المحدبة في حالة التصغير او الدالة المقعرة في حالة التعظيم.

وعندما نكون بصدد دراسة مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة نواجه الحالات التالية:

–مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة بقيود مساويات.

– مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة بقيود متراجحات.

– مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة بقيود مساويات ومتراجحات.

1– مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة بقيود متساويات: في هذه الحالة تكون المشكلة على النحو التالي

Max or Min $Z=f(X)$

ST. $g_i(X)=b_i, \quad i=1,2,3,4.......,m$

وتوجد طرقمتعددة لحل المشكلة السابقة منها:

–طريقة المشتقات المقيدة.

–طريقة التعويض المباشر.

–طريقة تغيير القيود.

–طريقة مضاريب لاغرانج.

وسوف نكتفي بالطريقة الأخيرة فقط ، طريقة مضاريب لاغرانج لحل مشكلة البرمجة غير الخطية كإحدى الطرق التقليدية وذلك لأهميتها في دراسة وتفسير بعض المشاكل الإقتصادية.

–طريقة مضاريب لاغرانج: تفترض هذه الطريقة ان كل من الدوال $f(X)$ و $g_i(X)$ هي داول متصلة قابلة للتفاضل من الترتيب الثاني.

ويتطلب إستخدام طريقة مضاريب لاغرانج مايلي:

1–أن تكون دالة لاغرانج $L(X,\lambda)$ على النحو التالي:

$$L(X,\lambda)=f(X)-\lambda\left[g(X)-b\right]$$

حيث:

λ:متجه معاملات لاغرانج، $g(X)$: متجهة الطرف الأيسر للقيود، b: متجهة المقادير $i=1,2,3,4.......,m$

وبذلك يتم تحويل المشكلة المقيدة إلى مشكلة غير مقيدة.

2–تحدد الشروط اللازمة لكي تكون X_0 نقطة قصوى (عظمى أو صغرى) للتابع $f(X)$،وهذا يعني أن إيجاد القيمة المثلى للتابع $f(X)$ ضمن القيود $g(X)=0$ يكافئ إيجاد القيمة المثلى لتابع مضاريب لاغرانج$L(X,\lambda)$ ، ومن الشروط الكافية لطريقة مضاريب لاغرانج نذكر التالي:

لنعرف المصفوفة التالية: $H^B=\begin{bmatrix} O & P \\ \bar{P} & Q \end{bmatrix}$

حيث أن

$$P=\begin{bmatrix}\nabla g_1(X)\\ .\\ .\\ \nabla g_m(X)\end{bmatrix}_{m\times n} \quad \text{و} \quad Q=\left[\frac{\partial^2 L(X,\lambda)}{\partial X_i \partial X_j}\right]_{n\times n}$$ لجميع قيم i و j

حيث تسمى المصفوفة H^B مصفوفة هيسان المحددة إذا كانت (X_0,λ) هي نقطة إستقرار لتابع لاغرانج، وإذا كانت H^B محسوبة في (X_0,λ) فإن X_0 تكون:

أ–نقطة عظمى إذا بدانا بالمعين الجزئي الرئيسي من المرتبة $(2m+1)$ وكانت قيم المعينات الجزئية $(n-m)$ للمصفوفة H^B ذات إشارة متناوبة بدءا بالإشارة $(-1)^{m+1}$.

ب–نقطة صغرى إذا بدأنا بالمعين الجزئي الرئيسي من المرتبة المرتبة $(2m+1)$ وكانت قيم المعينات الجزئية $(n-m)$ للمصفوفة H^B ذات إشارة متناوبة بدءا بالإشارة $(-1)^m$.

ج–فيما عدا ذلك تكون نقطة إنقلاب أو نقطة إرتكاز.

مثال5: اوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير الخطية التالية

$$\text{Min } f(X)=X_1^2+X_2^2+X_3^2$$
$$ST=\begin{cases}X_1+X_2+3X_3=2\\ 5X_1+2X_2+X_3=5\end{cases}$$

الحل: إن دالة مضاريب لاغرانج تاخذ الصيغة التالية

$$L(X,\lambda)=X_1^2+X_2^2+X_3^2-\lambda_1(X_1+X_2+3X_3-2)-\lambda_2(5X_1+2X_2+X_3-5)$$

وأن الشروط اللازمة هي

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial X_1}=2X_1-\lambda_1-5\lambda_2=0\to(1)\\ \dfrac{\partial L}{\partial X_2}=2X_2-\lambda_1-2\lambda_2=0\to(2)\\ \dfrac{\partial L}{\partial X_3}=2X_3-3\lambda_1-\lambda_2=0\to(3)\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=2-X_1-X_2-3X_3=0\to(4)\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2}=5-5X_1-2X_2-X_3=0\to(5)\end{cases}$$

إن حل هذه المعادلات هو $X_0=(X_1,X_2,X_3)=\left(\frac{37}{46},\frac{16}{46},\frac{13}{46}\right)$ و $\lambda_0=(\lambda_1,\lambda_2)=\left(\frac{2}{23},\frac{7}{23}\right)$

وللبرهان على أن X_0 هي نقطة صغرى، لنعتبر مصفوفة هيسان المحددة:

$$H=\left[\begin{array}{cc|ccc}0&0&1&1&3\\0&0&5&2&1\\\hline 1&5&2&0&0\\1&2&0&2&0\\3&1&0&0&2\end{array}\right]$$

وبما ان n=3 و m=2 فإن n−m=1، وعليه فإننا يجب أن نفحص معين H^B فقط الذي يجب ان تكون إشارته موجبة $(+) = (-1)^2$ في النقطة الصغرى، وبما أن $\det H^B = 460 > 0$ ، فإن X_0 تكون نقطة صغرى.

2− **مسائل البرمجة اللاخطية المقيدة بقيود في شكل متباينات أو خليط من المتباينات والمتساويات:** في هذه الحالة إذا كانت القيود الهيكلية في شكل متباينات (≤ أو ≥) أو خليط من المتباينات والمتساويات، وتوجد عدة لحل مثل هذه المسائل ويمكن تصنيفها إلى ثلاث انواع وهي:

أولا: الطريقة التقليدية

تعتمد هذه الطريقة على شروط كون−توكر(Kuhan−Tucker) ومضاريب لاغرانج، وتعتبر من الطرق المباشرة.

ثانيا: الطرق المباشرة

تتناول هذه الطرق القيود بطرق واضحة،ومن أهمها وأكثرها شيوعا الطرق التالي:

1−الطريقة المركبة (Complex method)

2−طرق الإتجاهات المقبولة (Feasible directions) ومنها

2−1 طريقة زوتندجك (Zoutendjik)

2−2طريقة الإسقاط الإنحداري (Gradient projection)

3−طريقة تقريب القيود او المستوى القاطع (Gutting plane method)

ثالثا:الطرق غير المباشرة

يتم في هذه الطرق تحويل المسألة إلى متتابعة من المسائل غير المقيدة، وتصنف هذه الطرق إلى مايلي:

1−طرق تحويل المتغيرات (Transformation of variables)

2−طريقة الدالة الجزائية الداخلية (Penalty function) وتنقسم إلى:

2−1طريقة الدالة الجزائية الداخلية (Interior).

2−2 طريقة الدالة الجزائية الخارجية (Exterior).

وسوف نكتفي في هذا العرض بالطريقة الأولى فقط، وهي طريقة شروط شروط كون−توكر(Kuhan−Tucker) ومضاريب لاغرانج.

في طريقة شروط شروط كون−توكر(Kuhan−Tucker) ومضاريب لاغرانج، يتم تحويل المتباينات إلى متساويات بإضافة متغيرات مكملة سالبة ثم تطبيق طريقة لاغرانج في حالة القيود في شكل متساويات ويتم ذلك على النحو التالي:

1−إذا كانت المشكلة الأصلية:

$$\text{Max or Min } Z=f(X)$$

$$ST=\begin{cases} g_i(X)\le 0 & ,\ i=1,2,3,\dots\dots,r \\ g_i(X)\ge 0 & ,i=r+1,\dots\dots\dots,t \\ g_i(X)=0 & ,i=t+1,\dots\dots\dots,m \end{cases}$$

2−إضافة S_i^2 للقيود لتحويلها إلى متساويات على النحو التالي

$$ST=\begin{cases} g_i(X)+S_i^2=0 \quad , \quad i=1,2,3,.......,r \\ g_i(X)-S_i^2=0 \quad , \quad i=r+1,..........,t \\ g_i(X)=0 \quad , \quad i=t+1,.........,m \end{cases}$$

3-تصبح دالة لاغرانج L على النحو التالي:

$$L(X,S,\lambda)=f(X)-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i\left[g_i(X)+S_i^2\right]-\sum_{i=r+1}^{t}\lambda_i\left[g_i(X)-S_i^2\right]-\sum_{i=t+1}^{m}\lambda_i\left[g_i(X)\right]$$

4-إتباع نفس الخطوات في الحالة الأولى للحصول على Max او Min للدالة $L(X,S,\lambda)$ وهي نفسMax او Min للدالة $f(X)$

وقد قدم كل من كون-توكر (Kuhan-Tucker) الشروط الضرورية للحصول على نقطة إستقرار لمشاكل البرمجة غير الخطية بعد تحويل المتباينات إلى متساويات على النحو التالي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial X_j}=0 \quad , \quad j=1,2,3,.........,n \\ \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial S_i}=0 \quad , \quad i=1,2,3,.........,m \\ \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial \lambda_i}=0 \quad , \quad i=1,2,3,.........,m \end{cases}$$

من المعادلات السابقة نتحصل على $\lambda_i=0$ أو $S_i=0$ أو $\lambda_i=S_i=0$ وفيما يلي مناقشة الحل المتوقع في الحالات الثلاث السابقة:

الحالة الأولى:

إذا كان $\lambda_i=0$ و $S_i\neq 0$ فهذا يعني أننا تجاهلنا القيود $g_i(X)\geq 0$ لأن: $g_i(X^*)=(S_i^*)^2>0$

وبالتالي فإن الحل الأمثل لايتغير بوجود هذا القيد إذا كان $\lambda_i=0$ لجميع قيم (i=1,2,3.......,m)،وبالتالي تتحول معادلة مشتق الدالة بالنسبة للمتغير X الى $\nabla f(X)=0$ وهو القيد الضروري في حالة مسائل ابرمجة غير المقيدة.

الحالة الثانية:

إذا كانت $\lambda_i\neq 0$ و $S_i=0$ فإن هذا يعني $g_i(X^*)=0$ وعندئذ يقع الحل الأمثل على حدود القيد رقم i حيث أن $\lambda_i\neq 0$ فإن الحل الأمثل لا يحقق الشرط الضروري $\nabla f(X^*)=0$

الحالة الثالثة:

إذا كانت $\lambda_i=0$ و $S_i=0$ لكل قيم i فإن $g_i(X^*)=0$ وعندئذ يحقق الحل الأمثل العلاقة $\nabla f(X^*)=0$ أي ان الحل الأمثل يقع على النقطة الحدية للقيود.

وأن الشروط الضرورية تكون أيضا كافية في الحالات الخاصة التالية

-إذا كان فراغ الحل (منطقة الحلول الممكنة) للقيود فئة محدبة، ودالة الهدف $f(X)$ دالة محدبة (Convex Function) فإن النقطة (أو النقاط) التي تحقق المعادلات السابقة تكون نقطة نهاية صغرى مطلقة.

– إذا كان فراغ الحل (منطقة الحلول الممكنة) للقيود فئة محدبة، ودالة الهدف $f(X)$ دالة مقعرة (Concave Function) فإن النقطة (أو النقاط) التي تحقق المعادلات السابقة تكون نقطة نهاية عظمى مطلقة.

ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول التالي:

نوع الحل	$g(X)$	F(X)	الحالة
نهاية عظمى مطلقة	فئة محدبة	مقعرة	MAX
نهاية صغرى مطلقة	فئة محدبة	محدبة	MIN

مثال06: أوجد النهاية العظمى للدالة

$$\text{Max}(Z) = 2X_1^2 - 7X_2^2 + 12X_1X_2 \text{.............}(01)$$
$$\text{ST.} \quad 2X_1 + 5X_2 \le 98 \text{...........................}(02)$$

الحل:

–نحول القيد إلى متساوي فيصبح على النحو التالي:

$$2X_1 + 5X_2 + S_1^2 = 98$$

–نشكل دالة مضاريب لاغرانج كمايلي:

$$L(X,\lambda,S) = 2X_1^2 - 7X_2^2 + 12X_1X_2 - \lambda\left[2X_1 + 5X_2 + S_1^2 - 98\right] \text{.......}(03)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial X_1} = 4X_1 + 12X_2 - 2\lambda = 0 \text{......................}(04) \\ \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial X_2} = -14X_2 + 12X_1 - 5\lambda = 0 \text{..............}(05) \\ \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial S_1} = -2S_1\lambda = 0 \text{..................................}(06) \\ \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial \lambda_i} = 2X_1 + 5X_2 + S_1^2 = 98 \text{..................}(07) \end{cases}$$

الحالة الأولى: من المعادلة رقم (06) نجد انها تتحقق إذا كان واحد على الأقل من S_1، λ يساوي الصفر أي:

$\lambda = 0$ او $S_1 = 0$

من القيدين (02)،(03) نجد أن $X_1 = X_2 = 0$ وهذا لا يحقق المعادلة رقم (07)

الحالة الثانية: إذا كان $\lambda \ne 0$ فإن $S_1 = 0$ (وهي الحالة لتحقيق القيد02) فإن من المعادلة رقم (07) نجد أن:

$$X_2 = \frac{98 - 2X_1}{5}$$

بالتعويض ب X_2 في المعادلتين رقم (04) و(05) نجد أن:

$$X_1^* = 44 \;, X_2^* = 02 \;, \lambda^* = 100 \;, Z^* = 4396$$

وبما ان $\lambda^* = 100$ فهذا يعني أن الطرف الأيمن من القيد رقم (02) إذا تغير بوحدة واحدة (بالزيادة أو النقصان) سوف يؤدي ذلك إلى زيادة أو نقصان Z^* ب100 وحدة.

مثال07:باستخدام شروط كون-توكر أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي

$$Max\left(Z\right)=-X_1^2+2X_1+X_2$$

$$ST=\begin{cases}2X_1+3X_2\le 06\\2X_1+X_2\le 4\\X_1\ge 0\ \ ,X_2\ge 0\end{cases}$$

الحل:

1-يمكن تحويل القيود $X_1\ge 0\ ,X_2\ge 0$ على النحو التالي

$$-X_1\le 0\ \ ,-X_2\le 0$$

2-نشكل دالة مضاريب لاغرانج كمايلي:

$$L\left(X_1,X_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,S_1,S_2,S_3,S_4\right)=-X_1^2+2X_1+X_2-\lambda_1\left[2X_1+3X_2+S_1^2-6\right]-\lambda_2\left[2X_1+X_2+S_2^2-4\right]$$
$$-\lambda_3\left[-X_1+S_3^2\right]-\lambda_4\left[-X_2+S_4^2\right]..................(01)$$

3-نوجد نقطة الإستقرار على النحو التالي:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial X_1}=-2X_1+2-2\lambda_1-2\lambda_2-\lambda_3=0.........................(02)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial X_2}=1-3\lambda_1-\lambda_2+\lambda_4=0.....................................(03)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial \lambda_1}=2X_1+3X_2+S_1^2-6=0.................................(04)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial \lambda_2}=2X_1+X_2+S_2^2-4=0..................................(05)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial \lambda_3}=-X_1+S_3^2=0..(06)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial \lambda_4}=-X_2+S_4^2=0..(07)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial S_1}=-2S_1\lambda_1=0..(08)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial S_2}=-2S_1\lambda=0..(09)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial S_3}=-2S_3\lambda_3=0..(10)\\ \dfrac{\partial L\left(X,S,\lambda\right)}{\partial S_4}=-2S_4\lambda_4=0..(11)\end{cases}$$

لكي تتحقق القيود (04) و(05) في شكل متساويات فإن $S_1=S_2=0$ ومن (08) و(09) فإنه يمكن ان يكون $\lambda_1,\lambda_2\ne 0$ وإذا كانت $X_1=X_2=0$ فلا تتحقق القيود (04 و(05) وبالتالي فإن $S_3,S_4\ne 0$ وهذا يعني من القيد (09) و(10) أنه لابد أن يكزن $\lambda_3=\lambda_4=0$ ويكون الحل المثل على النحو التالي:

$$X_1^* = \frac{3}{2} \ , X_2^* = 01 \ , \lambda_1^* = \frac{5}{2} \ , \lambda_2^* = \frac{-13}{2} \ , \lambda_3^* = 0 \ , \lambda_4^* = 0$$

$$S_1^* = 0 \ , \ S_2^* = 01.054 \ , \ S_3^* = 0.3165 \ , \ S_4^* = 01.247, \ \ Z^* = \frac{5}{4}$$

قائمة المراجع

1.أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، مجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر، 2009.

2.أحمد أسعد عبد الوهاب الميداني ، مقدمة في بحوث العمليات ، الطبعة الثالثة ، مكتبة ومطبعة الإشعاء الفنية ، الإسكندرية – مصر 1998.

3.احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي ، بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب ، الطبعة الأولى ، دار المناهج للنشر والتوزيع ، عمان ،الأردن ،2008.

4.أحمد عبد إسماعيل الصفار،ماجدة عبد اللطيف التميمي، بحوث العمليات –تطبيقات على الحاسوب- الطبعة الأولى،دار المناهج للنشر والتوزيع،عمان-الأردن،2007.

5.أنغام علي كريف الشهربلي ، تقويم نظم المعلومات باستخدام بحوث العمليات ،الطبعة الأولى ، الوراق للنشر والتوزيع ،عمان الأردن، 2008 .

6.جمال عبد العزيز صبار، بحوث العمليات في المحاسبة، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر،2009.

7.جهاد صباح بن هاني ، نازم محمود الملكاوي ، فالح عبد القادر الحوري ، بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق ، الطبعة الأولى ، دار جليس الزمان ، عمان الأردن ، 2014.

8.حامد سعد نور الشمرتي ،علي حنبل الزبيدي ،مدخل بحوث العمليات ، الطبعة الأولى، دار مجدلاوي ،عمان، الأردن.

9. حامد سعد نور الشمرتي، بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا، مكتبة الذاكرة، الطبعة الأولى، بغداد- العراق،2010 .

10. حسين ياسين طعمة ،مروان محمد النسور ،إيمان حسين خشوش ،بحوث العمليات نماذج وتطبيقات ، الطبعة الأولى ، دار الصفاء للنشر والتوزيع ، عمان ، الأردن ، 2009.

11. دلال صادق جواد، حميد ناصر الفتاح، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.

12. رفاه شهاب الحمداني ،أحمد شهاب الحمداني ، بحوث العمليات ، الطبعة الأولى ، دار وائل للنشر ، عمان ، الأردن:1999 .

13. رونق كاظم حسين ،محاضرات في مادة بحوث العمليات ، قسم إدارة الأعمال ، المرحلة الثانية

14. زيد تميم البلخي ، مدخل إلى نظم ضبط ومراقبة المخزون ، النشر العلمي والمطابع ، جامعة الملك سعود ، الرياض ، المملكة العربية السعودية ، 2005 .

15. سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا، 2002 .

16. صباح الدين بقجة جي ،وائل معلا ،محمد نايفة ،حسام مراد ،محمد نوا العوا ، بحوث العمليات ،الطبعة الأولى ، دمشق ،سوريا ، 1998 .
17. صبحي محمد ، إبراهيم نائب، حسن شرقي ، أنغام باقية ، بحوث العمليات ،منشورات جامعة حلب ، كلية الاقتصاد ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ، حلب، سوريا ، 2008.
18. فتحي خليل حمدان ، بحوث العمليات مع تطبيقاتها بإستخدام الحاسوب ، دار وائل للنشر ، الطبعة الأولى ، الأردن ،:2010.
19. محمد أحمد الطروانة ، سليمان خالد عبيدات ، مقدمة في بحوث العمليات ، الطبعة الأولى ، دار الميسرة للنشر والتوزيع ،عمان - الأردن ،2009.
20. محمد راتول ، بحوث العمليات ، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2008
21. محمد عبد العال النعيمي ، رفاه شهاب الحمداني ، أحمد شهاب الحمداني ، بحوث العمليات ، الطبعة الثانية ، دار وائل للنشر والتوزيع ، 2011 .
22. مود العبيدي ، مؤيد عبد الحسن الفضل ، بحوث العمليات وتطبيقاتها، الطبعة الأولى ، الوراق للنشر والتوزيع ،عمان ، الأردن ، 2004 .
23. محمود الفياض ، عيسى قدادة ، بحوث العمليات ،دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، الطبعة العربية ، 2007 .
24. منعم زمزير الموسوي ، الأساليب الكمية في الإدارة ، الطبعة الأولى ، دار زهران للطباعة و النشر، عمان ، الأردن ،سنة: 1993 .
25. نجم عبود نجم، مدخل إلى الأساليب الكمية –النماذج الاحتمالية- مع تطبيقات باستخدام EXCEL، ،دار الوراق للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى ، عمان–الأردن، 2013