الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة اين خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة

تمارين في التحليل الرياضي

لمقياس الرياضيات 1

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

مختار مختاري

السنة الجامعية

2022 - 2021

1 مجموعات :

تطبيق:

اذا كانت $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ، $A=\{2,7,8\}$ ، $S=\{2,3,5,7\}$.

فأوجد كلا مما يلي من المجموعات الاتية :

- 1) C_E^A، 2) C_E^S، 3) $C_E^{A\cup S}$، 4) $C_E^{A\cap S}$، 5) C_E^{ϕ}، 6) C_E^E .

الحل :

1. $C_E^A=\{1,3,4,5,6,9\}$.
2. $C_E^S=\{1,4,6,8,9\}$.
3. $A\cup S=\{2,3,5,7,8\}$ و منه $C_E^{A\cup S}=\{1,4,6,9\}$.
4. $A\cap S=\{2,7\}$ و منه $C_E^{A\cap S}=\{1,3,4,5,6,8,9\}$.
5. $C_E^{\phi}=E$.
6. $C_E^E=\phi$.

تطبيق:

اختصر العبارات التالية :

$$1.A_1=A\cap(A^C\cup B)$$
$$2.A_2=A\cup(A^C\cap B)$$
$$3.B_1=A\cap(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C\cup C)$$
$$4.B_2=A\cup(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C\cap C)$$
$$5.C_1=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A^C)$$

الحل :

لدينا :

$$1.A_1=A\cap(A^C\cup B)=\left(A\cap A^C\right)\cup\left(A\cap B\right)=A\cap B$$
$$2.A_2=A\cup(A^C\cap B)=(A\cup A^C)\cap(A\cup B)=A\cup B$$
$$\begin{aligned}3.B_1&=A\cap(A^C\cup B)\cap(A^C\cup B^C\cup C)\\&=A_1\cap\left((A\cap B)^C\cup C\right)=(A\cap B)\cap\left((A\cap B)^C\cup C\right)=A\cap B\cap C\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}4.B_2&=A\cup(A^C\cap B)\cup(A^C\cap B^C\cap C)=A_2\cup\left[(A\cup B)^C\cap C\right]\\&=(A\cup B)\cup\left[(A\cup B)^C\cap C\right]=A\cup B\cup C\end{aligned}$$

$$5.C_1=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A^C)=[B\cup(A\cap C)]\cap(C\cup A^C)$$
$$=[B\cap(C\cup A^C)]\cup[(A\cap C)\cap(C\cup A^C)]$$
$$=(B\cap C)\cup(B\cap A^C)\cup(A\cap C)=(A\cup B)\cap(C\cup A^C)$$

1.1 تمارين محلولة :

تمرين1 :

لتكن A,B,C ثلاث مجموعات جزئية من مجموعة E، برهن العلاقات التالية:

1. $A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$
2. $A\cap(B\cup C)=A\cap B\cup A\cap C$
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$
4. $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A$
5. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
6. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$
7. $A\subset B\Leftrightarrow B^c\subset A^c$
8. $(A\setminus B)^c=A^c\cup(A\cap B)$
9. $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$
10. $A\cap B=\phi\Leftrightarrow B^c\cap(A\cup B)=A$

تمرين2 :

نعرف الفرق التناظري للمجموعتين A,B ونرمز له بالرمز $A\Delta B$ المجموعة التالية $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

برهن العلاقات الآتية :

1. $A\Delta B=(A\cup B)/(A\cap B)$
2. $A^c\Delta B^c=A\Delta B$
3. $A\Delta B=\phi\Leftrightarrow A=B$
4. $A\Delta B=A\cap B\Leftrightarrow A=B=\varnothing$
5. $A\Delta B=A\Delta C\Leftrightarrow B=C$

تمرين3 :

اذا كانت $A=\{2,3,5,7\}$، $B=\{2,4,6,8\}$، E مجموعة الاعداد الطبيعية من 1الى 10 .

اوجد ما يلي :

- $A\bigcup B$.
- $A\bigcap B$.
- $A-B$.
- $B-A$.
- C_E^A.

- $.C_E^{A\cup B}$
- $.C_E^A \cap C_E^B$

تمرين4 :

لتكن المجموعات C,B,A من $P(E)$

برهن أن: $.A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

تمرين 5 :

تعطى B,A مجموعتان جزئيتان من E,

بين أن: $.C_E A \setminus C_E B = B \setminus A$

تمرين 6 :

تعطى B,A و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

بين صحة مايلي :

a. $.A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

b. $.A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$

c. $.A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$

d. $.\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

تمرين 7 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

الفرق التناظري للمجموعتين A و B هو $.A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

بين أن : $.A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$

تمرين 8 :

تعطى B,A و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

بين أن :

a. $A\Delta B = A\Delta C \Leftrightarrow B = C$ ،

b. $A\setminus B = A \Leftrightarrow B\setminus A = B$ ،

c. $A\Delta B = A\bigcap B \Rightarrow A = B = \phi$ ،

تمرين 9 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

حل و ناقش حلول المعادلة ذات المجهول $X \in P(E)$ بحيث : $A\bigcup X = B$ ،

تمرين 10 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

حل و ناقش حلول المعادلة ذات المجهول $X \in P(E)$ بحيث : $A\bigcap X = B$ ،

1.2 حل التمارينات :

تمرين1 :

1. إذا كان $A=B$ فإن $(A\cap B=A)\wedge(A\cup B=A)$ وبالتالي فإن $A\cap B=A\cup B$ ،
إذا كان $A\cap B=A\cup B$ فإن :

$$\begin{cases} A\subset(A\cup B)=(A\cap B)\subset B \\ B\subset(A\cup B)=(A\cap B)\subset A \end{cases} \Rightarrow A=B$$

2.ليكن :

$$\begin{aligned} x\in A\cap(B\cup C) &\Leftrightarrow \left[x\in A\wedge x\in(B\cup C)\right]\Leftrightarrow \\ &(x\in A)\wedge\left[(x\in B)\vee(x\in C)\right]\Leftrightarrow \\ &\left[(x\in A)\wedge(x\in B)\right]\vee\left[(x\in A)\wedge(x\in C)\right]\Leftrightarrow \\ &\left[x\in(A\cap B)\vee x\in(A\cap C)\right]\Leftrightarrow \\ &x\in(A\cap B)\cup(A\cap C) \end{aligned}$$

3.ليكن:

$$\begin{aligned} x\in A\cup(B\cap C) &\Leftrightarrow \left[x\in A\vee x\in(B\cap C)\right]\Leftrightarrow \\ &(x\in A)\vee\left[(x\in B)\wedge(x\in C)\right]\Leftrightarrow \\ &\left[(x\in A)\vee(x\in B)\right]\wedge\left[(x\in A)\vee(x\in C)\right]\Leftrightarrow \\ &\left[x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)\right]\Leftrightarrow \\ &x\in(A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}$$

4.لدينا دوما $(A\cap B)\subset B$ وإذا كان $A=A\cap B$ فإن $A\subset B$. نفرض الآن أن $A\subset B$ ، بما أن $(A\cap B)\subset A$ فإنه يكفي أن نبرهن أن $A\subset(A\cap B)$.

إذا كان $x\in A$ فإن $x\in B$ (لأن $A\subset B$) وبالتالي فإن $x\in A\cap B$ ومنه الاحتواء.

5.ليكن:

$$\begin{aligned} x\in(A\cap B)^C &\Leftrightarrow x\notin(A\cap B)\Leftrightarrow(x\notin A)\vee(x\notin B) \\ &\Leftrightarrow\left(x\in A^C\right)\vee\left(x\in B^C\right)\Leftrightarrow x\in(A^C\cup B^C) \end{aligned}$$

6.ليكن:

$$\begin{aligned} x\in(A\cup B)^C &\Leftrightarrow x\notin(A\cup B)\Leftrightarrow(x\notin A)\wedge(x\notin B) \\ &\Leftrightarrow(x\in A^C)\wedge(x\in B^C)\Leftrightarrow x\in(A^C\cap B^C) \end{aligned}$$

7.حسب 4 فإن : $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A\Leftrightarrow(A\cap B)^C=A^C$

وحسب 5 فإن : $A^C=(A\cap B)^C=(A^C\cup B^C)\supset B^C$

8.حسب 3 فإن :

$$\begin{aligned} A^C\cup(A\cap B) &= (A^C\cup A)\cap(A^C\cup B) \\ &= E\cap(B\cup A^C)=(B\cup A^C) \\ &= (A\cap B^C)^C=(A\setminus B)^C \end{aligned}$$

9.لدينا:

$$\begin{aligned} A\setminus(A\setminus B) &= A\setminus(A\cap B^C)=A\cap(A\cap B^C)^C \\ &= A\cap(A^C\cup B)=A\cap B \end{aligned}$$

10.إذا كان $B^C\cap(A\cup B)=A$: فإن $B^C\cap A=A$: وحسب 4 فإن $A\subset B^C$ ، إذن $A\cap B=\varnothing$ والعكس صحيح .

تمرين 2:

1.لدينا :

$$\begin{aligned} (A\cup B)\setminus(A\cap B) &= (A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)\cap(A^C\cup B^C) \\ &= \left(A\cap(A^C\cup B^C)\right)\cup\left(B\cap(A^C\cup B^C)\right) \\ &= \left(A\cap B^C\right)\cup\left(B\cap A^C\right)=\left(A\setminus B\right)\cup\left(B\setminus A\right)=A\Delta B \end{aligned}$$

2.لدينا :

$$\begin{aligned} A^C\Delta B^C &= \left(A^C\setminus B^C\right)\cup\left(B^C\setminus A^C\right)=\left(A^C\cap B\right)\cup\left(B^C\cap A\right) \\ &= \left(B\setminus A\right)\cup\left(A\setminus B\right)=A\Delta B \end{aligned}$$

3.لدينا :

$$A\Delta B=\varnothing \Leftrightarrow (A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\varnothing \Leftrightarrow (A\setminus B=\varnothing \wedge B\setminus A=\varnothing)$$
$$\Leftrightarrow ((A\subset B)\wedge(B\subset A)) \Leftrightarrow A=B$$

4.ليكن $x\in A$ ، إذا كان $x\in B$ فإن $x\in A\cap B=A\Delta B$ وهذا تناقض، وإذا كان $x\notin B$ فإن $x\in A\Delta B=A\cap B$ وهذا أيضا تناقضا .

5.إذا كان $B=C$ فإن $A\Delta B=A\Delta C$ محققة بصفة بديهية . الآن ليكن $x\in B$ ، إذا كان $x\notin A$ فإن $x\in A\Delta B=A\Delta C$ ومنه فإن $x\in C$ وإذا كان $x\in A$ فإن $x\notin A\Delta B=A\Delta C$ وبالتالي فإن $x\in C$ ، ومنه فإن $B\subset C$ وبنفس الطريقة نجد أن $C\subset B$ ومنه المساواة .

تمرين3 :

اذا كانت $A=\{2,3,5,7\}$، $B=\{2,4,6,8\}$، E مجموعة الاعداد الطبيعية من 1الى 10 .

و بالتالي لدينا :

- $A\bigcup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$.
- $A\bigcap B=\{2\}$.
- $A-B=\{3,5,7\}$.
- $B-A=\{4,6,8\}$.
- $C_E^A=\{1,4,6,8,9,10\}$.
- $C_E^{A\cup B}=\{1,9,10\}$.
- $C_E^A\bigcap C_E^B=\{1,8,9,10\}$.

تمرين4 :

لتكن المجموعات C,B,A من $P(E)$

$$\begin{aligned} A\setminus(B\bigcap C) &= A\bigcap C_E(B\bigcap C)\\ &= (A\bigcap C_E B)\bigcup(A\bigcap C_E C)\\ &= (A\setminus B)\bigcup(A\setminus C)\end{aligned}$$

تمرين 5 :

لدنيا B,A مجموعتان جزئيتان من E,

$$\begin{aligned} C_E A\setminus C_E B &= C_E A\bigcap C_E B\\ &= B\bigcap C_E B\\ &= B\setminus A\end{aligned}$$

تمرين 6 :

لتكن B,A و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

a. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $A\subset B$ و منه $B\subset A\cup B$.

من أجل $x\in A\cup B$ هذا يعني أن $x\in A$ أو $x\in B$ و لدنيا $x\in B$ إذن $A\cup B\subset B$.

و بالتالي $A\cup B=B$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $A\cup B=B$ و لكن $A\subset A\cup B$ و بالتالي $A\cup B=B$.

b. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $A=B$ و بالتالي $A=A\cap B=A\cup B$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $A\cup B=A\cap B$ لدنيا $A\subset A\cup B\subset A\cap B\subset B$ و بنفس الطريقة $B\subset A$.

و بالتالي $A=B$.

c. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $A\cup B=A\cap C$ ،

و بالتالي $B\subset A\cup B=A\cap C\subset A\subset A\cup B=A\cap C\subset C$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $B\subset A\subset C$ و بالتالي $A\cup B=A=A\cap C$.

d. أولا نبرهن $(\Rightarrow)$

نفرض أن $A\cup B=A\cup C$ و $A\cap B=A\cap C$.

لتكن $x\in B$.

إذا كان $x\in A$ هذا يعني أن $x\in A\cap B=A\cap C$ إذن $x\in C$.

إذا كان $x\notin A$ نعلم أن $x\in A\cup B$ و منه $x\in A\cup C$ إذن $x\in C$.

و بالتالي في الحالتين $x\in C$، و أيضا $B\subset C$، و بالتناظر نجد أن $C\subset B$

و بالتالي $B=C$.

ثانيا نبرهن $(\Leftarrow)$

نفرض أن $B=C$ و بالتالي $A\cup B=A\cup C$ و $A\cap B=A\cap C$ (بديهيا).

تمرين 7 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

ليكن $x\in E$.

$$\begin{aligned} x\in A\Delta B &\Leftrightarrow (x\in A \ \ et\ \ x\notin B)ou(x\in B\ \ et\ \ x\notin A)\\ &\Leftrightarrow (x\in A\ \ ou\ \ x\notin B)\,et\,(x\in A\ \ ou\ \ x\notin A)\,et\,(x\notin B\ \ ou\ \ x\in B)\,et\,(x\notin B\ \ ou\ \ x\notin A)\\ &\Leftrightarrow x\in A\cup B\ \ \ et\ \ \ x\notin A\cap B\\ &\Leftrightarrow x\in (A\cup B)\setminus(B\cap A)\end{aligned}$$

تمرين 9 :

تعطى B,A و C ثلاث مجموعات جزئيتان من E,

بين أن :

a. إذا كان $A\Delta B=A\Delta C$ إذن من أجل كل $x\in B$:

إذا كان $x\in A$ و منه $x\notin A\Delta B$ إذن $x\notin A\Delta C$ و بالتالي $x\in A,\ x\in C$.

إذا كان $x\notin A$ و منه $x\in A\Delta B$ إذن $x\in A\Delta C$ و بالتالي $x\notin A,\ x\in C$.

في الحالتين $x\in C$ و أيضا $B\subset C$. و بالتخمين التناظري نجد $C\subset B$.

و بالتالي $B=C$.

عكسيا نفس الطريقة.

b.
$$\begin{aligned} A\setminus B=A &\Leftrightarrow A\cap C_E B=A\\ &\Leftrightarrow A\subset A\ \ or\ \ A\subset C_E B\\ &\Leftrightarrow B\subset C_E A\end{aligned}$$

و بالتالي $A\setminus B=A\Leftrightarrow B\setminus A=B$.

c. $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ إذن .

$$A\Delta B=A\cap B\Rightarrow A\cap B=\phi=A\cup B$$
$$\Rightarrow A=B=\phi$$

تمرين 10 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

1. إذا كان $A\not\subset B$ من الواضح أن المعادلة $A\cup X=B$ لا تقبل حلول ، $S=\phi$.
2. إذا كان $A\subset B$ إذن $B\setminus A\subset X$ $A\cup X=B\Rightarrow X\subset B\ et$ و العكس صحيح.

$S=\{X\in P(E)|\ B\setminus A\subset X\subset B\}$.

تمرين 11 :

لتكن A و B مجموعتان جزئيتان من E,

1. إذا كان $B\not\subset A$ من الواضح أن المعادلة $A\cap X=B$ لا تقبل حلول ، $S=\phi$.
2. إذا كان $B\subset A$ ليكن X حلا للمعادلة .

لدنيا $X=(A\cap X)\cup(\overline{A}\cap X)=B\cup C$ حيث $C=\overline{A}\cap X\subset\overline{A}$.

عكسيا من أجل $X=B\cup C$ حيث. $C\subset\overline{A},\ A\cap X=(A\cap B)\cup(A\cap C)=B$

أيضا
$$S=\{X=B\cup C\mid C\subset\overline{A}\}$$
$$=\{X\in P(E)|\ B\subset X\subset B\cup\overline{A}\}$$
.

1.3 تمارين مقترحة :

تمرين 1 :

نعتبر المجموعتين :

$B=\{x\in\mathbb{R};x^2+2x>15\}$ و $A=\{x\in\mathbb{R};|x+1|>3\}$

1. أكتب المجموعتين $C_{\mathbb{R}}^{A}$ و $C_{\mathbb{R}}^{B}$ المتممتين لـ A و B.
2. بين أن : $C_{\mathbb{R}}^{A}\subset C_{\mathbb{R}}^{B}$.

تمرين 2 :

حدد في كل حالة مما يلي :

$A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A \setminus B$. $B \setminus A$.

1. $A = [2,4]$ و $B = [-2,3]$.

2. $A = [1,+\infty]$ و $B = [-\infty,5]$.

3. $A = \{x \in \mathbb{R}; |x-2| < 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 3x > 10\}$.

تمرين 3 :

لتكن المجموعتين A و B الجزئيتين من E.

1. بين أن $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A)$
2. بين أن $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3. بين أن $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ ثم استنتج أن $A = B \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A) = \phi$.
4. بين أن $A = \phi \Leftrightarrow (A \cap C_E^B) \cup (B \cap C_E^A) = B$

تمرين 4 :

لتكن المجموعتين A و B الجزئيتين من E حيث $A \subset B$.

- حل في $P(E)$ المعادلة $X \cap B = X \cup A$.

2 العلاقات الثنائية :

أمثلة :

1. المساواة في مجموعة E : $(\forall x, y \in E : x\Re y \Leftrightarrow x = y)$
هي علاقة تكافؤ .
2. في Z لتكن $n \in IN$ والعلاقة :
$$\forall x, y \in Z : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in Z : x - y = kn$$
إن $\Re$ هي علاقة تكافؤ .
3. في $IN \times IN$ لتكن العلاقة :
$$\forall (p,q),(p',q') \in IN \times IN : (p,q)\Re(p',q') \Leftrightarrow p + q' = p' + q$$
هي علاقة تكافؤ .
4. في $Z \times Z^*$ لتكن العلاقة :
$$\forall (p,q),(p',q') \in Z \times Z^* : (p,q)\Re(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$$
هي علاقة تكافؤ.

أمثلة :

- في IN, Z, Q, IR ، الترتيب العادي هو ترتيب كلي .
- في $(IN^*, \prec)$ حيث :
$$\forall a, b \in IN^* : a \prec b \Leftrightarrow \exists k \in IN^* : b = ka$$
هو ترتيب جزئ .
- في $(P(E), \subset)$ حيث E مجموعة ما، الاحتواء يعرف علاقة ترتيب جزئ عندما تحوي E على أكثر من عنصر.

الحل :

ا- إن العلاقة $\prec$ هي علاقة ترتيب، بالفعل :
- انعكاسية : لدينا $\forall x \in IN^* : x = 1.x$ ، أي أن $x \prec x$.
- متعدية : ليكن $x, y, z \in IN^*$ بحيث $x \prec y, y \prec z$ إذن :
$$\begin{cases} \exists k \in IN^* : y = kx \\ \exists k' \in IN^* : z = k'y \end{cases} \Rightarrow z = kk'x$$
أي أن $x \prec z$.
- ضد تناظرية : ليكن $x, y \in IN^*$ بحيث $x \prec y, y \prec x$ إذن :
$$\begin{cases} \exists k \in IN^* : y = kx \\ \exists k' \in IN^* : x = k'y \end{cases} \Rightarrow kk' = 1 \Leftrightarrow k = k' = 1 \Rightarrow x = y$$

تمارين مقترحة:

تمرين 1:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ معرفة كما يلي :

$$\Re\left[(a,b),(c,d)\right] \Leftrightarrow ad = bc$$

- بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.

تمرين 2:

1. $\Re$ علاقة في $\mathbb{R}^*$ معرفة كما يلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow ab > 0$$

- ✓ بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.
- ✓ عين أصناف التكافؤ.

2. $\Re$ علاقة في $\mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow ab \geq 0$$

بين أن $\Re$ ليست علاقة تكافؤ.

تمرين 3:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{Z}$ معرفة كما يلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = a - b$$

- ✓ بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.
- ✓ عين صنف تكافؤ1.

تمرين 4:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{N}$ معرفة كما يلي :

$$\Re(a,b) \Leftrightarrow \left[a = b \text{ أو } b + a = 15\right]$$

- ✓ عين بيان $\Re$.
- ✓ بين أن $\Re$ علاقة تكافؤ.
- ✓ عين $\mathbb{N}/\Re$.

تمرين 5:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{Z}$ معرفة كما يلي :

$$\Re\left(a,b\right)\Leftrightarrow\left[a=b\,b\ \ =\ \ -1\qquad a\,\text{أو}\,b\,a\,1\,\text{أو}\right]$$

- هل العلاقة $\Re$ انعكاسية ؟
- هل هي تناظرية ؟
- هل هي ضد تناظرية ؟
- هل هي متعدية ؟

تمرين 6:

نقول أن العلاقة $\Re$ في المجموعة M دائرية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\forall(a,b,c)\in M^{3}:\left[\Re(a,b)\ et\ \Re(b,c)\right]\Rightarrow\Re(c,a)$$

- ✓ بين أنه إذا كانت علاقة دائرية و انعكاسية فهي علاقة تكافؤ.

تمرين 7:

1. $\Re_1$ علاقة في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

$$\Re\left[\left(a,b\right),\left(c,d\right)\right]\Leftrightarrow\left[a\le c\ et\ b\le d\right]$$

- ✓ بين أن $\Re_1$ علاقة ترتيب، هل هذا الترتيب كلّي؟

2. $\Re_2$ علاقة في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

$$\Re\left[\left(a,b\right),\left(c,d\right)\right]\Leftrightarrow\left[\left(a<c\right)ou\left(a=c\ et\ b\le d\right)\right]$$

- ✓ بين أن $\Re_1$ علاقة ترتيب، هل هذا الترتيب كلّي؟

تمرين 8:

$\Re$ علاقة في $\mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

$$\Re\left(a,b\right)\Leftrightarrow a^{3}-b^{3}\ge 0$$

- بين أن $\Re_1$ علاقة ترتيب.
- هل هذا الترتيب كلّي؟

3 الدوال العددية لمتغير حقيقي:

3.1 النهايات و الاستمرارية:

صحيح أم خاطئ ؟

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

تمرين:

إذا كانت f محدودة على المجال $[-1,1]$، فإنها تقبل نهاية عند الصفر.

تمرين:

لتكن f دالة معرفة على $[0,+\infty[$

1. إذا كانت f غير محدودة من الأعلى فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
2. إذا كانت f متزايدة على $]0,+\infty[$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
3. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن f غير محدودة من الأعلى.
4. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإنه يوجد على الأقل مجال من الشكل $]A,+\infty[$، مع A عدد حقيقي، تكون عليه f متزايدة.

تمرين:

1. لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ و بحيث $1\le f(x)\le\sqrt{x}$ على $]1,+\infty[$ ، لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$
2. إذا كان، من أجل x عدد حقيقي، $|f(x)-2|\le\dfrac{1}{x}$ ، فإن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$
3. إذا كانت f غير محدودة من الأعلى على المجال $]0,1]$، فإنها تقبل $+\infty$ كنهاية عند الصفر.
4. إذا كانت الدالة f تحقق، من أجل كل x من $]0,2[$، $3-(x-1)^2\le f(x)\le 3+(x-1)^2$ فإن $\lim\limits_{x\to1} f(x)=3$
5. إذا كانت الدالة f تحقق، من أجل كل x من $]3,+\infty[$ $f(x)\ge\dfrac{2}{x}$, فإن f تقبل نهاية منتهية عند $+\infty$.

تمرين:

1. الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=-x^3+5x^2-3x+1$ تقبل $+\infty$ كنهاية عند $-\infty$.
2. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.
3. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$.
4. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و من أجل كل x موجب تماما، $g(x)>0$ ، فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=-\infty$

تمرين:

1. إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=+\infty$.

2. إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}(fog)(x)=-\infty$.

3. إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x^2)=-\infty$.

4. إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{f(x)+1}}=0$.

تمرين:

1. إذا كانت f مستمرة على $[a,b]$ و $f(a).f(b)>0$ فإن f لا تنعدم على المجال $[a,b]$

2. إذا كانت f مستمرة و رتيبة تماما على $[a,b]$ و $f(a).f(b)<0$ فإن f تنعدم على الأقل مرة على المجال $[a,b]$.

3. الدالة f من $[0,2]$ في $\mathbb{R}$ المعرفة بـ: $\begin{cases} f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ 2\geq x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ مستمرة على $[0,2]$.

تمرين:

المستوي مزود بالمعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ و (D) مستقيم معادلة له $x=1$

1. إذا كان (D) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

2. إذا كانت $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$ ، فإن (D) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

3. إذا كانت f غير معرفة عند 1 ، فإن (D) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

4. إذا كانت $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ ، فإن (D) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

تمارين تطبيقية:

تمرين:

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$

1. برهن أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $-\frac{1}{\sqrt{x}}\leq f(x)\leq\frac{3}{\sqrt{x}}$

2. استنتج أن f تقبل نهاية f عند $+\infty$.

تمرين:

f دالة معرفة على $[2,+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x+\sin x}{x-1}$

1. برهن أنه من أجل كل $x\geq 2$, $|f(x)-3|\leq\frac{4}{x-1}$.

2. استنتج أن f تقبل نهاية f عند $+\infty$.

تمرين:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{2-\cos x}$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $\frac{1}{3}\leq f(x)\leq 1$

2. استنتج النهايات التالية: أ- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$ ؛ ب- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

تمرين:

عين النهايات التالية:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{x^2-1}{2-x} \; .....(4) \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \frac{2-x}{x^2-1} \; .....(1) \quad , \lim_{x \xrightarrow{<} 1} \frac{2-x}{x^2-1} \; ......(2) \quad , \lim_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{x^2-1}{2-x} \; ....(3) \quad ,$$

تمرين:

عين النهايات التالية:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin 2x} \; .....(1) \quad , \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x} \; .....(2) \quad , \lim_{x\to+\infty} \left(x+\sqrt{x^2-3x}\right) \; ......(3) \quad , \lim_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \; .....(4) \quad ,$$

تمرين:

عين النهاية عند x_0 للدالة f :

$$f(x)=\frac{1}{x} \; , \; x_0=0 \; .....(3) \quad f(x)=\frac{x^6-1}{x^2-1} \; , \; x_0=1 \; .....(1) \quad , f(x)=\frac{x+1}{x^2-1} \; , \; x_0=-1 \; .....(2) \quad ,$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} \; , \; x_0=0 \; .....(6) \quad , f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}} \; , \; x_0=1 \; .....(5) \quad ,$$

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}} \; , \; x_0=-2 \; .....(4)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} \; , \; x_0=4 \; .....(9) \quad f(x)=\frac{3-\sqrt{x}}{x^2-82} \; , \; x_0=9 \; .....(7) \quad , f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} \; , \; x_0=1 \; .....(8) \quad ,$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1} \; , \; x_0=1 \; .....(10) \quad , f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \; , \; x_0=0 \; .....(11) \quad ,$$

$$f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x} \; , \; x_0=0 \; .....(13) \quad f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x+\cos x} \; , \; x_0=\frac{\pi}{2} \; .....(12) \quad ,$$

تمرين:

عين النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، إن أمكن، للدالة f :

$$f(x)=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{x^2} \; .....(3) \quad f(x)=x^3-3x \; .....(1) \quad , f(x)=\frac{-x^3-3x+4}{x^4-2} \; .....(2) \quad ,$$

$$f(x)=\frac{2x-5}{x+2}-\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \; .....(6) \quad f(x)=\sqrt{x^2+1}-x \; .....(4) \quad , f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}} \; .....(5) \quad ,$$

$$f(x)=\frac{x^3-x}{2x+3}+\cos 2x \; .....(9) \quad f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{4x^2} \; .....(7) \quad , f(x)=\frac{2x-\sqrt{x}}{x-1} \; .....(8) \quad ,$$

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}-x \; .....(12) \quad f(x)=x^2+x\sin x \; .....(10) \quad , f(x)=\sqrt{2x^2+x^4} \; .....(11) \quad ,$$

$, \ f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$ .....(14), $f(x)=\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}$ .....(13) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ .....(15)

$, \ f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$ .....(17), $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\right)$ .....(16) $f(x)=\sqrt{x^2+x-2}-\left(x^2-1\right)$ .....(18)

$, \ f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^3-3x+2}$ .....(20), $f(x)=\dfrac{x+|x-1|}{4x-2}$.....(19) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ .....(21)

تمرين:

تذكير: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ ، عين النهاية عند 0 للدالة f :

$, \ f(x)=\dfrac{\sin(-2x)}{\sin 3x}$ .....(2), $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{3x}$ .....(1) $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{4x^2}$ .....(3)

$, \ f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ .....(5), $f(x)=\dfrac{\sin^2 4x}{\sin 2x}$ .....(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$ .....(6)

$, \ f(x)=\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}$ .....(8), $f(x)=\dfrac{\tan 4x}{\sin 3x}$ .....(7), $f(x)=\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\sin x}$ .....(9)

$, \ f(x)=\dfrac{\sin x-1+\cos 2x}{x^2}$ .....(11), $f(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$ .....(10), $f(x)=\dfrac{\sin^2 x\cos^2 x}{1-\cos x}$ .....(12)

تمارين للتعمق

تمرين:

عين النهاية عند $\frac{\pi}{2}$ للدالة f :

$, \ f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$ .....(2), $f(x)=\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$ .....(1) $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$ .....(3)

$, \ f(x)=\dfrac{1-\sin x}{(\pi-2x)^2}$ .....(5), $f(x)=\dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$ .....(4) $f(x)=\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\cos x}$ .....(6)

تمرين:

عين النهايات التالية:

$, \ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ .....(2), $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$ .....(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ .....(3)

$, \ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\dfrac{\tan 2x-1}{1-\sin 4x}$ .....(5), $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ .....(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{1-\cot an\, x}$ .....(6)

$$, \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\sqrt{3}-2\sin x} \quad .....(8), \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)(\tan 2x) \quad .....(7)\ \lim_{x\to 2}(x-2)\tan\frac{\pi}{x} \quad .....(9)$$

تمرين:

عين النهايات التالية:

$$, \lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+5x+6} \quad .....(3)\ , \quad \lim_{x\to -1} \frac{2x^2+x-1}{4x^2+5x+1} \quad .....(2), \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1} \quad .....(1)$$

$$, \quad \lim_{x\to 1} \frac{2x^3+x^2+x-4}{x^3+2x^2+x-4} \quad ...(6), \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{-2x^2+x+3}{-2x^2+5x-3} \quad ...(5), \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{2x^2-x-6} \quad .....(4)$$

$$, \quad \lim_{x\to -2} \frac{x^3+x^2-8x-12}{x^3+8} \quad .....(9), \lim_{x\to 2} \frac{x^3+4x^2-8x-8}{x^3-2x^2+3x-6} \quad ...(8)\ , \lim_{x\to -1} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+4x^2+2x-1} \quad ...(7)$$

تمرين:

عين النهايات التالية:

-1 $\lim_{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ 2- $\lim_{2} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ 3- $\lim_{3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

-4 $\lim_{1} \frac{\sqrt{2x+2}+4x-6}{x^2-1}$ 5- $\lim_{1} \frac{x-1}{x+1-\sqrt{3x+1}}$ 6- $\lim_{2} \frac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{3x^2-7x+2}$

-7 $\lim_{3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$ 8- $\lim_{2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ 9- $\lim_{1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$

-10 $\lim_{-2} \frac{\sqrt{3x+8}-\sqrt{-3x-4}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{1-x}}$ -11 $\lim_{3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$ -12 $\lim_{0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}$

تمرين:

عين النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ، إن أمكن، للدالة f :

$$, \quad f(x)=\sqrt{4x^2+2x}+2x \quad .....(2), \ f(x)=\sqrt{x^2-5x+2}+2x+1 \quad .....(1)\ \ f(x)=\sqrt{4x^2+5x-1}+x-3 \quad .....(3)$$

$$, \quad f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}-2x-3 \quad .....(5), \ f(x)=\sqrt{9x^2+3x-1}+3x-1 \quad ...(4)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x-1 \quad ....(6)$$

$$, \quad f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x-\frac{1}{2} \quad ...(8), \ f(x)=\sqrt{9x^2+3x-1}+3x-1 \quad ...(7)\ \ f(x)=\sqrt{5x^2+x+3}+x+1 \quad ...(9)$$

$$, \quad f(x)=\sqrt{4x^2+4x}-2x-1 \quad ...(10)$$

3.2 الدوال المشتقة :

صحيح أم خاطئ ؟

تمرين:

ليكن I مجال و a عدد حقيقي ينتمي إلى المجال I

دَلْ إذا وُجِدَت دالة f معرفة على I و تحقق في آن واحد الخاصيتين المعطاة.

إذا كان الجواب نعم ، أعط مثالا (بيان يقُبل) و إذا كان الجواب لا ، برره بواسطة مبرهنة من الدرس.

1. f مستمرة عند a و f تقبل الاشتقاق عند a
2. f مستمرة عند a و f لا تقبل الاشتقاق عند a

3. f ليست مستمرة عند a و f تقبل الاشتقاق عند a
4. f ليست مستمرة عند a و f لا تقبل الاشتقاق عند a

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

1. إذا كانت دالة f بحيث ، من أجل كل عدد حقيقي h غير معدوم:
$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -h^2 + 2h + 1$ فإن $f'(2)=1$
2. إذا قبلت f الاشتقاق عند 1 ، فإن $\lim_{h\to0} f(1+h) = f(1)$
3. إذا كانت $\lim_{x\to} f(x) = f(0)$ ، فإن f تقبل الاشتقاق عند 0
4. الدالة القيمة المطلقة $x\to|x|$ تقبل الاشتقاق على R
5. الدالة القيمة $x\to x\sqrt{x}$ تقبل الاشتقاق عند 0

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

لتكن f دلة و C_f تمثلها البياني في مستو مزود بمعلم.

1. إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند $A(0\ ;\ 1)$ هو المستقيم ذو معادلة $y=1$، فإن $f'(0)=1$
2. إذا $f(-1)=0$ و $f'(-1)=2$ ، فإن المماس لـ (C_f) عند النقطة B ذات الفاصلة -1 له معادلة $y = 2x$
3. إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند $C(1\ ;2)$ موازي للمستقيم ذو معادلة $y=-x$، فإن $f'(1)=-1$
4. إذا كان المماس للمنحنى (C_f) عند $D(2\ ;\ 1)$ مارا بالمبدأ ، فإن $f'(2)=\frac{1}{2}$

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

1. مشتقة الدالة $f: x\to (x^2+1)^3$ هي الدالة $g : x \to 3(x^2+1)^2$
2. مشتقة الدالة $f: x\to \sqrt{x^4+1}$ هي الدالة $g : x \to \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$
3. المماس للمنحنى ذو معادلة $y = \tan^3 x$ عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\pi}{6}$ موازي للمستقيم ذو معادلة $4x+3y=0$
4. إذا كانت f قابلة للاشتقاق على R، فإن مشتقة الدالة $g:x\to f(x^2)$ وهي: $g' : x\to 2xf(x)$

أسئلة متعددة الاختيار(QCM)

عدة أجوبة صحيحة يمكن أن تكون صحيحة. عينها.

تمرين:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[-2\,;2]$ و جدول تغيرات دالتها المشتقة f' هو:

x	-2		-1		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

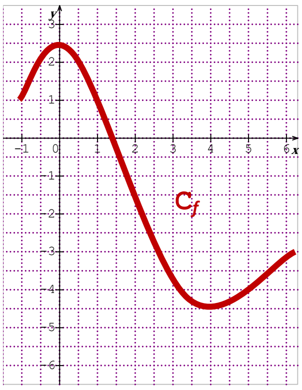
1. لدينا إذن: ج1: $f(-2) < f(-1)$ ج2: $f(-1) < f(1)$ ج3: $f(0) < f(1)$

2. في معلم للمستوي، المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل بالضبط مماسين موازيين للمستقيم ذو معادلة:
ج1: $y = -\frac{1}{2}$، ج2: $y = \frac{1}{2}x$ ج3: $y = \frac{1}{2}x$

3. إذا كان $f(-2) > f(2)$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $]f(2);f(-2)[$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل في المجال $[-2\,;2]$: ج1: بالضبطحل. ج2: بالضبط حلين ج3: ليس لها حلول

4. إذا كان $f(1)=0$ ، فإنه على المجال $[0\,;2]$: ج1: $f(x) \leq -2x$ ج2: $f(x) \geq -2x$ ج3: $f(x) \geq 0$

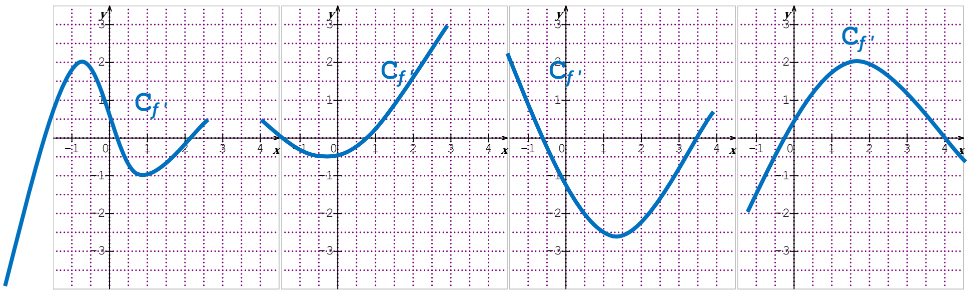
تمرين:



منحنى الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $[-1\,;4]$

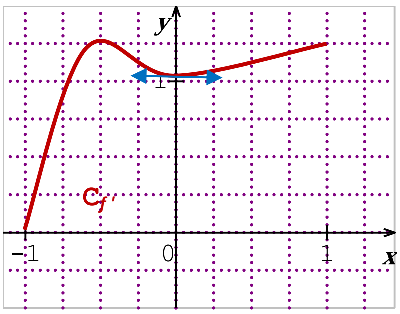
من بين المنحنيات التالية ، عين منحنى الدالة f' مشتقة الدالة f.

ج1 ج2 ج3 ج4:



تمرين:

برر الجواب. منحنى الدالة f المعرفة والقابلة للاشتقاق على المجال $[-1\,;1]$ بحيث $f(0)=0$



ج1: $f(-1) < f(1)$

ج2: 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ على المجال $[-1,1]$

ج3: f مستمرة و رتيبة تماما على $[-1\,;1]$

ج4: التمثيل البياني C للدالة f يقبل بالضبط مماسين موازيين للمستقيم ذو معادلة: $y = x$

ج5: المنحنى C يقع فوق مماسه D عند النقطة 0.

تمرين:

جواب صحيح واحد فقط، يطلب تعيينه.

g وهي الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على R بـ $f(x)=x(3x^2+1)^2$ حيث:

ج1: $g(x)=18(3x^2+1)^3$ ج2: $g(x)=\frac{1}{2}x^2(x^3+1)^2$ ج3: $g(x)=\frac{1}{18}(3x^2+1)^3$

تمرين:

جواب صحيح واحد فقط، يطلب تعيينه.

g وهي الدالة المشتقة للدالة f المعرفة على R بـ $f(x)=2cos^2x+sin2x$ حيث:

ج1: $g(x)=4cosx+2cos2x$ ج2: $g(x)=2(cos2x-sin2x)$ ج3: $g(x)=4cosx\ sinx-2cos2x$

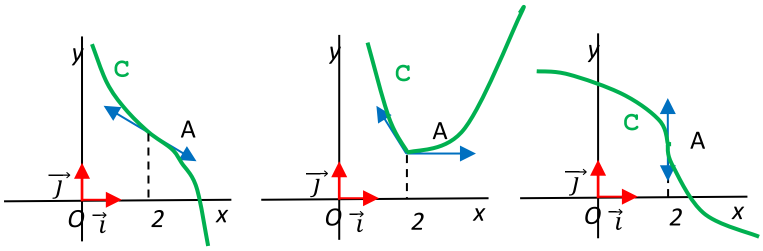
تمرين:

بين أنه إذا كانت f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[a\,;b]$، فإن من إجل كل عدد حقيقي k من المجال $[f(a);f(b)]$ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حل وحيد في المجال $[a\,;b]$

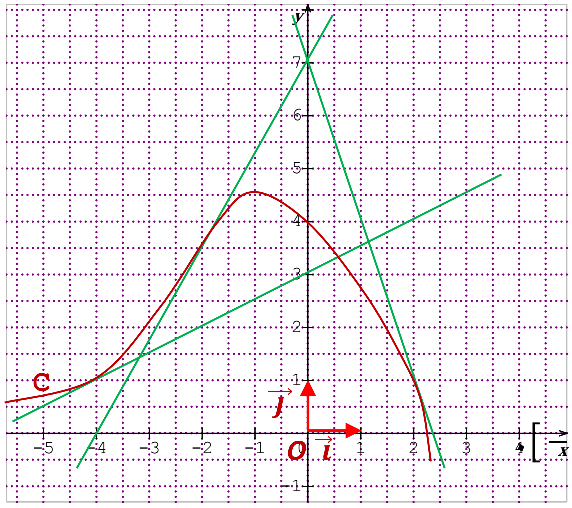
تمارين تطبيقية

تمرين:

في كل حالة من الحالات التالية، المنحنى (C_f) هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على المجال $[1,3]$



هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2 ؟ علل.



تمرين:

المستقيمات المرسومة هي مماسات للمنحنى (C_f) ذو معادلة: $y=f(x)$

1. عين، بقراءة بيانية، الأعداد $f'(-4)$، $f'(-2)$ و $f'(2)$.

2. نفرض أن f تقبل الاشتقاق على المجال $[-5,2]$.

باستعمال المنحنى ، ضع تخمينا على تغيرات الدالة f على المجال $]-4,2[$

3. أكتب معادلة لكل مماس.

تمرين:

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-4}{x-2}$

1. عين الدالة f' مشتقة الدالة f .

2. استنتج مشتقة لكل من الدوال التالية:

$g:x\mapsto \dfrac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$ المعرفة على $]0,4[\cup]4,+\infty[$ و الدالة $h:x\mapsto \dfrac{3\cos x-4}{\cos x-2}$ المعرفة ع

3.3 الدوال اللوغارتمية :

3.3.1 تمارين:

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$,\ |\ln x|=1 \quad .....(1)\ \ \ln|x|=1 \quad .....(2),\ \big|\ln|x|\big|=1 \quad .....(3)$$

$$,\ \ln(x+3)+\ln(x+5)=\ln 15 \quad .....(4)\ \ \ln(x-3)+\ln(x-1)=\ln(x^2-4) \quad .....(5)$$

$$,\ \ln x+\ln 2-2\ln(x-4)=0 \quad .....(6)\ \ \ln(x+1)+\ln(x+6)=\ln(2-x)+\ln(3-x) \quad .....(7)$$

$$,\ \ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln 5 \quad .....(8)\ \ 2\ln(x-4)=\ln x-21\ln 4 \quad .....(9)$$

$$,\ \ln(x+e)+\ln(x+2)=1+\ln 2 \quad .....(10)\ \ |\ln(\ln x)|=-\ln(\ln x) \quad .....(11)$$

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$,\ (\ln x)^2-\ln(x^2)-3=0 \quad .....(1)\ \ 2(\ln 2x)^2-5\ln(2x)+2=0 \quad .....(2)$$

$$,\ (\ln x)^3-(e+1)(\ln x)^2+(e-2)\ln x+2e=0\ .....(3)\ \ 4[\ln(\ln x)]^2-7\ln(\ln x)+3=0 \quad .....(4)$$

$$,\ (\ln x)^4+21(\ln x)^2-100=0\ .....(5)\ \ 2(\ln x)^3+15(\ln x)^2-6\ln x-7=0 \quad .....(6)$$

$$,\ 2(\ln x)^3-3(\ln x)^2-3\ln x+2=0 \quad .....(7)\ \ (\ln x)^3-\ln x^3+2=0 \quad .....(8)$$

$$,\ (\ln x)^3-4(\ln x)^2+3\ln x=0 \quad .....(9)\ \ (\ln x)^3-(\ln x)^2-14\ln x+24=0 \quad .....(10),$$

$$(\ln x)^3-(\ln x)^2-4\ln x+4=0 \quad .....(11)\ \ (\ln x)^2=9 \quad .....(12)$$

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$,\ln(x-1)+\ln(x-4)<\ln(x+4) \quad ....(2)\ \ \ln(x)+\ln(10-x)\le \ln 16 \quad ....(1)$$

$$,\ \log_2 x>\log_8(4x-3) \quad .....(3)\ \ \ln(x+1)+\ln(25x-48)<\ln(72-24x) \quad .....(4)$$

$$,\ \ln(x^2-2x)>\ln(4x-5).....(5)\ \ (\ln x)^2-3\ln x-4\le 0.....(6)$$

تمرين:

1. حلل العبارة x^3-7x+6 : إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

أ) $e^{3x}-7e^{x}+6=0$ ب) $(log_3x)^3-7log_3x+6=0$

ج) $\ln(x)+\ln(x^2+8)=\ln 3+\ln(5x-2)$

تمرين:

حل في R^2 الجمل التالية:

$(3)\begin{cases}3x+3y=7\\ \ln x+\ln y=\ln 2-\ln 3\end{cases}$, $(1)\begin{cases}x+y=65\\ \ln x+\ln y=\ln 100\end{cases}$, $(2)\begin{cases}3x+2y=23\\ \ln x-\ln y=\ln 7\end{cases}$,

$(6)\begin{cases}\ln(x^3)+\ln(y^2)=3\\ \ln x+\ln 3y=1\end{cases}$, $(4)\begin{cases}x^2+y^2=13\\ \ln x^2+\ln y^2=\ln 36\end{cases}$, $(5)\begin{cases}x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=\ln 60\end{cases}$,

$(9)\begin{cases}xy=e\\ 7\log_y x+7\log_x y=50\end{cases}$, $(8)\begin{cases}xy=e\\ 4\log_y x+4\log_x y=17\end{cases}$, $(8)\begin{cases}xy=e\\ 2\log_y x+2\log_x y=-5\end{cases}$,

3.3.2 مسائل :

المسألة 01 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=x-\ln|x|$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أحسب النهايات عند اطراف مجموعةالتعريف .

2- أدرس تغيرات f .

3- بين أن (C_f) يقطع (xx') في نقطة فاصلتها محصورة بين $-0,6$ و $-0,5$.

4- عين نقطتي تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو معادلة $y=x$.

5- أحسب كل من $f(-1)$; $f(-3)$; $f(-2)$ و $f(2)$; $f(3)$; $f(5)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ).

6- F دالة عددية معرفة بـ: $F(x)=\dfrac{(x+1)^2}{2}-x\ln x$ بين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

7- أحسب المساحة $\mathrm{A}(\lambda)$ للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=\lambda; x=1$ و $y=x$ مع $\lambda\geq 1$. عين العدد λ حتى يكون: $\mathrm{A}(\lambda)=2\lambda\ln\lambda-2\lambda+1$

المسألة 02 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-3\ln x$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أحسب النهايات عند اطراف مجموعةالتعريف .

2- أدرس تغيرات f .

8- بين أن (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين 4,5 و 4,6 .

9- عين نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو معادلة $y=x$. ثمأكتب معادلة للمماس (T) عند هذه النقطة.

3- أحسب $f(6);f(8)$ و أنشئ (C_f)،(T) و (Δ).

4- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل $\int_1^e \ln x dx$ ثماستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=1;x=e$ و $y=x$

المسألة 03 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-3x+\frac{4}{x}+8\ln x$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أحسب النهايات عند اطراف مجموعةالتعريف ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f .

2- بين أن (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين 4 و 4,1 .

3- عين إحداثيتي نقطة الانعطاف لـ (C_f) وأكتب معادلة للمماس (T) عندها.

4- عين النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس (T') موازيا للمستقيم (Δ) الذي معادلة له $y=-3x$ ثم أكتب معادلة للمماس (T')

5- أحسب $f(6);f(8)$ و أنشئ (C_f)،(Δ)،(T) و (T').

6- F دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=x\ln x-x$.

أ) عين $F'(x)$ ثماستنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=\frac{2}{3};x=2$ و $y=0$.

المسألة 04 :

f دالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+\frac{2}{x}+3\ln x$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب النهايات عند اطراف مجموعةالتعريف ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f .
2. عين إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f)
3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 7,2 و 7,3 .
4. أحسب $f(10)$ أنشئ (C_f)
5. F دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=x\ln x-x$

أ) عين $F'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=1;x=e$ و $y=x$

المسألة 05 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=(\ln x)^2+\ln x-2$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1.أ- أحسب النهاياتعند اطراف مجموعةالتعريف ،ماذا تستنتج ؟

ب- أدرس تغيرات f .

2. عين نقطتي تقاطع (C_f) مع (xx').

3.عين إحداثيتي نقطة الانعطاف لـ (C_f).

4.أكتب معدلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

5.أحسب $f(8);f(5)$ و أنشئ (C_f) و (T).

6.F دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=x\left[a(\ln x)^2+b\ln x+c\right]$

أ) عين $F'(x)$ ثم عين b,a و c حتى تكون F دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=e^{-2};x=e$ و $y=0$

المسألة 06 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

-1 أدرس تغيرات f .

-2 أحسب نهاية $[f(x)-(x-1)]$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. ماذا استنتج ؟

-3 أحسب $f\left(\frac{1}{2}+x\right)+f\left(\frac{1}{2}-x\right)$. ماذا تستنتج ؟

-4 أنشئ المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f).

-5 باستعمال المكاملة بالتجزئة، أوجد دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

-6 أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=4;x=2$ و $y=x-1$.

المسألة 07 :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

-1 أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

-2 أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

-3 أحسب نهاية $[f(x)-(2x-1)]$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. ماذا استنتج ؟

4- أحسب $f\left(-\frac{1}{2}+x\right)+f\left(-\frac{1}{2}-x\right)$. ماذا تستنتج؟

5- أنشئ المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f).

6- باستعمال المكاملة بالتجزئة، أوجد دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

7- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=1; x=3$ و $y=2x-1$.

8- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_n=f(n)-2x+1$.

أ) ما هي إشارة u_n ؟

ب) أدرس تغيرات (u_n) و أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+....+u_n$

المسألة 08 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=-x+3+\ln|x+1|$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2- أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

3- بين أن (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين $4,7$ و $4,8$.

4- أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$.

5- أحسب $f(-6)$ $f(-8)$; $f(6)$; $f(8)$ و أنشئ (C_f) و (T).

6- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل $\int_1^{e-1}\ln(x+1)\,dx$ ثم استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=0; x=e-1$ و $y=0$.

المسألة 09 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x-2}{x-1}-\ln|x-1|$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2- أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

3- بين أن (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين $-2,5$ و $-2,6$.

4- أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

5- أحسب $f(-8)$; $f(4)$; $f(5)$; $f(6)$ و أنشئ (C_f) و (T).

6- باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب التكامل $\int_2^4\ln(x-1)\,dx$.

7- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=2; x=4$ و $y=0$.

المسألة 10 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=-\frac{x}{x+1}+\ln|x+1|$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$(الوحدة البيانية: 1 cm)

1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2- أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

3- بين أن (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين $-4,5$ و $-4,6$.

4- أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-2$.

5- أحسب $f(10); f(8); f(5); f(-8)$ و أنشئ (C_f) و (T).

6- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $F(x)=-2x+(x+2)\ln|x+1|$

أ) بين أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}-\{-1\}$.

ب) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات معادلات: $x=0; x=\lambda$ و $y=0$ مع $\lambda>0$. عين العدد λ حتى يكون: $A(\lambda)=2\lambda\ln(\lambda+1)$.

المسألة 11 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+\ln|x-1|$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة التعريفثم أدرس تغيرات f ,

2- أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

3- عين إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f),

4- أحسب $f(10); f(8); f(5); f(-8)$ و أنشئ (C_f) و (T).

5- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $F(x)=x+x\ln|x-1|$

أ) بين أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}-\{1\}$,

ج) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات معادلات: $x=2; x=\lambda$ و $y=0$ مع $\lambda>2$. عين العدد λ حتى يكون: $A(\lambda)=\lambda$.

المسألة 12 :

f دالة معرفة على $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+4\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أ – أحسب النهايات للدالة f عند 0 و عند -1. ماذا تستنتج؟

ب) أحسب $\lim_{x\to-\infty} f$ و $\lim_{x\to+\infty} f$.

ج) أحسبنهاية $[f(x)+2x]$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$. ماذا تستنتج؟

-2 بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\dfrac{-2(x-1)(x+2)}{x(x+1)}$.
أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

-3 بين أن $\omega\left(-\frac{1}{2};1\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

-4 أنشئ المستقيمات المقاربة و (C_f).

-5 لتكن F الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=-x^2+4x\ln x-4(x+1)\ln(x+1)$.

أ) بين أن F دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

ب) أحسب المساحة A الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=1;x=3$ و $y=-2x$.

-6 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_n=f(n)+2x$.

أ) ما هي إشارة u_n ؟

ب) أدرس تغيرات (u_n) و أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+....+u_n$ ، ثم عين n علما أن: $S_n=-4\ln 2009$.

المسألة 13 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{1}{3}x+1+\ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

-1 أ – أحسب النهايات للدالة f عند -2 و عند 2. ماذا تستنتج؟

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f$.

ج) أحسب النهاية لـ $\left[f(x)-\dfrac{1}{3}x-1\right]$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$. ماذا تستنتج؟

-2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2-16}{3(x^2-4)}$.
أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

-3 بين أن $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

-4 أنشئ المستقيمات المقاربة و (C_f).

-5 لتكن F الدالة المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $F(x)=-x+(x-\alpha)\ln(x-\alpha)$

أ) عين $F'(x)$.

ب) أحسب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=3;x=4$ و $y=\dfrac{1}{3}x+1$.

المسألة 14 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

-1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f$. ماذا تستنتج؟

-2 أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

-3 عين نقطة تقاطع (C_f) مع (xx').

-4 أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

-5 أنشئ (C_f) و (T).

-6 باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات معادلات: $x=\lambda;x=1$ و $y=0$ مع $\lambda>1$. ماهي $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ ؟.

المسألة 15 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

-1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f$. ماذا تستنتج؟

-2 أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

-3 عين نقطة تقاطع (C_f) مع (xx')،ثم أكتبعادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

-4 أنشئ (C_f) و (T).

-5 أحسب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=e;x=1$ و $y=0$.

المسألة 16 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

-1 أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f$. ماذا تستنتج؟

-2 أدرس اتجاه تغيرات f ثم شكل جدول التغيرات.

-3 عين نقطة تقاطع (C_f) مع (xx')،ثم أكتبعادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=\frac{1}{e}$.

-4 عين النقطة B من (C_f) التي يكون عندها المماس (Δ) مارا بالمبدأ و أكتب معادلة له.

-5 أنشئ (C_f) و (T) و (Δ).

-6 أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات معادلات: $x=\lambda;x=\frac{1}{e}$

و $y=0$ مع $\lambda>\frac{1}{e}$. عين العدد λ حتى يكون: $A(\lambda)=1+\ln\lambda$.

المسألة 17 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f$. ماذا تستنتج؟

2- أدرس تغيرات f ,

3- عيننقطة تقاطع (C_f) مع (xx')، ثم أكتبمعادلة للمماس (T) عند هذه النقطة.

4- أنشئ (C_f) و (T).

5- أ -باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب التكامل: $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

ب-أحسب المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=1;x=e$

و $y=0$.

المسألة 18 :

الجزء I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=1-x-2\ln|x|$

1- عين $g'(x)$ و انشئ جدول تغيرات g .

2- أحسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء II. f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{1+\ln|x|}{x^2}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة البيانية: 2 cm)

1- أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة التعريف. ماذا تستنتج؟

2- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

3- أكتبمعادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-1$.

4- بين ان (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين $0,5$ و $0,6$.

5- أنشئ (C_f) و (T),

6- باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

7- أحسب بـ: cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=1;x=e$ و $y=0$.

المسألة 19 :

الجزء I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3-1+2\ln x$

1- عين $g'(x)$ و انشئ جدول تغيرات g .

-2 أحسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

الجزء *II*. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$(الوحدة البيانية: $2\ cm$)

-1 أ - أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ اذا تستنتج؟

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ، ماذا تستنتج؟

ج) بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

-2 عين النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس (T) موازيا للمستقيم المقارب المائل (Δ).

أكتب معادلة للمماس (T).

-3 أنشئ (C_f)،(T) و(Δ),

-4 باستعمال المكاملة بالتجزئة ،أحسب $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

-5 أحسب بـ: cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=1;x=e$ و $y=x-1$.

المسألة 20 :

الجزء *I*. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

-1 عين $g'(x)$ و انشئ جدول تغيرات g.

-2 أحسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

الجزء *II*. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=2-x+\dfrac{\ln x}{x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$(الوحدة البيانية: $2\ cm$)

-1 أ -أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2-x)\right]$ ، ماذا تستنتج؟

ج) بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

-2 عينالنقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس (T) موازيا للمستقيم المقارب المائل (Δ).

أكتب معادلة للمماس (T)

-3 أنشئ (C_f)،(T) و(Δ),

-4 أحسبالمساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات معادلات: $x=1;x=\lambda$

و $y=2-x$ مع $\lambda>1$. عين العدد λ حتى يكون: $A(\lambda)=2$.

المسألة 21 :

الجزء *I*. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3+1-2\ln x$.

1- عين $g'(x)$ و انشئ جدول تغيرات g .

2- أحسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x^2}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة البيانية: 2 cm)

1- أ - أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ ، ماذا تستنتج؟

ج) بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$ • أنشئ جدول تغيرات f .

2- عين النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس (T) موازيا للمستقيم المقارب المائل (Δ).

أكتب معادلة للمماس (T) .

3- بينان (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين 0,7 و 0,8 •

5- أنشئ (C_f) ، (T) و (Δ),

6- باستعمال المكاملة بالتجزئة،أحسب $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

7- استنتجبـ: cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=e;x=1$ و $y=x-1$.

المسألة 22 :

الجزء I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{x+1}{x}+\ln|x|$

عين $g'(x)$ و انشئ جدول تغيرات g ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-3-\ln|x|}{x-1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أ -أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف. ماذا تستنتج؟

ب) بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$ • أنشئ جدول تغيرات f .

2- عين النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس (T) موازيا للمستقيم المقارب المائل (Δ).

أكتب معادلة للمماس (T) .

3- بينان (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين 0,7 و 0,8 •

8- أنشئ (C_f) ، (T) و (Δ),

المسألة 23 :

الجزء I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2-2\ln x$

عين $g'(x)$ و انشئ جدول تغيرات g ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء *II*. نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{2\ln x}{x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة البيانية: 2 cm)

-1 أ - أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ ، ماذا تستنتج؟

ج) بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

-2 عين النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس (T) موازيا للمستقيم المقارب المائل (Δ).

أكتب معادلة للمماس (T) .

-3 بينان (C_f) يقطع (xx') فينقطة فاصلتها محصورة بين $0,7$ و $0,8$.

-4 أنشئ (C_f) ، (T) و (Δ),

-5 أحسب بـ: cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=e;x=1$ و $y=x-1$.

المسألة 24 :

الجزء *I*. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=x+\ln|x|$.

-1 عين $g'(x)$ ، وأدرس تغيراتالدالة g ثم انشئ جدول تغيرات g .

-2 بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α محصور بين $0,5$ و $0,6$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء *II*. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=x+\frac{1}{2}(\ln|x|)^2$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

-1 أ) أحسب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف. ماذا تستنتج؟

ب) بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ و استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

-2 بين أن $f(\alpha)=\alpha+\frac{1}{2}\alpha^2$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$,

-3 أكتب معادلة للمماس (T) عند $x=1$.

-4 أحسب $f(8); f(5); f(-8); f(-10)$ و أنشئ (C_f) و (T).

-5 F دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

أ) بين أن F دالة أصلية للدالة $x\to(\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) أحسب بـ: cm^2 ،مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=e;x=1$ و $y=x$.

المسألة 25 :

الجزء *I*. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x)=1+\frac{1}{x}+\ln|x|$.

1- عين $g'(x)$ و انشئ جدول تغيرات g .

2- أحسب $g(-1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

الجزء II. نعتبرالدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=(x+1)\ln|x|$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ -أحسب النهايات عند اطراف مجموعة التعريف. ماذا تستنتج؟

ب) بين أن $f'(x)=g(x)$ و استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

2- استنتج من الجزء I)إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f) و أكتب معادلة لـ(T) مماس (C_f) عندها.

3- أحسب $f(3); f(2); f(-3); f(-5)$ و أنشئ (C_f) و(T).

ج) باستعمال المكاملة بالتجزئة، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=e; x=1$ و $y=0$.

المسألة 26 :

الجزء I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$

1- عين $g'(x)$ ، وأدرس تغيراتالدالة g ثم انشئ جدول تغيرات g .

2- بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α محصور بين $2,2$ و $2,21$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

الجزء II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(-2+\ln x)$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ -أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ماذا تستنتج؟

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

ج) بين ان $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ و استنتج إشارة $f'(x)$. أنشئ جدول تغيرات f .

2- بين أن $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ طوله 2×10^{-2},

3- أحسب $f(e^2); f(1)$ و أنشئ (C_f).

4- أ -بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد دالة أصلية للدالة $x\to \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

ج) استنتج دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.

د) أحسب بـ: cm^2 ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=e^2; x=1$ و $y=0$.

المسألة 27 :

الجزء I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=-\frac{2x}{x+1}+\ln|x+1|$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسبالنهايات عند اطراف مجموعة التعريف.ثم أدرس تغيراتالدالة f .

2- أكتب معادلة للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

3- عين إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f).

4- ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$.

نسمي α الحل الموجب تماما. أعط حصرا بعددين طبيعيين متتابعين للعدد α

5- أحسب $f(-11)$; $f(-10)$; $f(-9)$; $f(10)$; $f(8)$; $f(5)$ و أنشئ (C_f) و (T).

استنتج إشارة $f(x)$ على $]0;+\infty[$,

6- أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب التكامل $\int_1^{\alpha}\ln(x+1)\,dx$. (α هو العدد المعرف سابق)

ب) بملاحظة أن: $-\frac{2x}{x+1}=-2+\frac{2}{x+1}$ ،

هـ) أحسب بـ: cm^2، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=\alpha\,;x=0$ و $y=0$.

الجزء II. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=e^{-x}\ln\left(e^{2x}+1\right)$

نسمي (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ماذا تستنتج؟

2- قارن بين $g'(x)$ و $f\left(e^{2x}\right)$. أدرس تغيراتالدالة g .

3- ليكن x_0 حل المعادلة $g'(x)=0$. أحسب x_0 بدلالة α .

و أعط حصرا للعدد x_0 و $g(x_0)$. أنشئ (Γ).

المسألة 28 :

الجزء I. لتكن g الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln(x+2)+\left(2x+\frac{1}{2}\right)(x+2)-1$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2;+\infty[$: $g'(x)=\frac{(x+1)\left(6x^2+23x+21\right)}{x+2}$.

2- أدرس إشارة $g'(x)$ و استنتج تغيراتالدالة g على $]-2;+\infty[$

3- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0{,}19<\alpha<-0{,}18$ و استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{\ln(x+2)}{x+2}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة البيانية: 2 cm)

1- أدرس تغيراتالدالة العددية f .

2- بين أن $f(\alpha)=3\alpha^2+5\alpha-\dfrac{1}{\alpha+2}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3- لتكن h الدالة العددية المعرفة بِـ: $h(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x$ و ليكن (Γ) المنحنى الممثل لها في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$. ماذا تستنتج ؟

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) وَ (Γ).أرسم (Γ) وَ (C_f).

4- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (C_f) و المستقيمين اللذان معادلتان لهما: $x=-1; x=-\dfrac{1}{2}$

المسألة 29 :

الجزء I.

1- أدرس اتجاه تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(t)=e^t-t-1$. ما هي القيمة الحدية الصغرى لها على $\mathbb{R}$ ؟

2- استنتج المتباينات التالية:

أ) من أجل كل عدد حقيقي t: $e^t\geq t+1$ ، $e^t\geq t$ و $-te^{-t}\geq 1$

ب) من أجل كل عدد حقيقي t حيث: $t>-1$ ، $\ln(t+1)\leq t$

3- استنتج أنه من أجل عد حقيقي x ، $\ln(1-xe^{-x})\leq -xe^{-x}$

الجزء II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)$

1- بين أن $f(x)=x^2-2x-2\ln(1-xe^{-x})$. ما هي نهاية f عند $+\infty$ ؟ تتقبل أن نهاية f عند $-\infty$ هي $+\infty$

2- أحسب $f'(x)$ و بين أن $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(e^x-x-1)}{e^x-x}$ ثم شكل جدول تغيراتالدالة f

3- في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (الوحدة البيانية 3 cm) ،

نعتبر قطع المكافئ (P) ذو معادلة $y=x^2-2x$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

بين أن (C_f) و (P) متقاربان عند $+\infty$. أدرس الوضعيان النسبية للمنحنيين (C_f) و (P)

4- أكتب معادلة لكل من المماسين (D) و (D') على الترتيب للمنحنيين (C_f) و (P) عند النقطة ذات الفاصلة 0

5- أرسم في نفس المعلم كل من المنحنيين (C_f) و (P) و المماسين (D) و (D)

الجزء III. ليكن n عدد طبيعي ، نضع $u_n=\int_0^n xe^{-x}dx$

1- أ) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب u_n

ج) عين نهاية u_n عند $+\infty$

2- نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n \left[f(x)-(x^2-2x) \right] dx \\ &= -2\int_0^n \ln(1-xe^{-x})\,dx \end{aligned}$$

أ) أعط تفسيرا هندسيا للعدد I_n

ب) باستعمال السؤال 3 من الجزء 1، بين أن $I_n \geq 2u_n$

ج) نقبل أن المتتالية (I_n) تقبل 1 كنهاية، بين أن $I \geq 2$

المسألة 30 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x + \ln(1+e^{-x})$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة البيانية: 2 cm)

وليكن (D) المستقيم ذو معادلة $y = x$

1- بين أن f متزايدة و موجب على المجال $[0;+\infty[$

2- ما هي نهاية f عند $+\infty$ ؟ بين أن (D) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) . أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)

3- شكل جدول تغيرات f

4- أرسم في نفس المعلم كل من المنحنيين (C_f) و (D)

5- ليكن I التكامل المعرف بـ:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \ln(1+e^{-x})dx \\ &= \int_0^1 [f(x) - x]dx \end{aligned}$$

(لا يطلب حساب I)

أ) فسر بيانيا I

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $t \geq 0$، لدينا $\ln(1+t) \leq t$ (يمكن دراسة تغيرات الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $g(t) = \ln(1+t) - t$) . نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي $t \geq 0$، لدينا: $\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t)$

ج) استنتج أنه أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$، لدينا. $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \leq \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$

د) بين أن. $\ln\left(\frac{2}{e^{-1}+1}\right) \leq I \leq 1 - e^{-1}$

هـ) استنتج حصرا للعدد I طوله $0,2$ بعددين عشريين.

6- نرمز بـ M و N للنقطتين ذات الفاصلة x من (C_f) و (D) . عين مجموعة قيم x حتى يكون $MN \leq 0,5$.

3.4 الدوال الاسية :

تمرين:

نعتبر التّابعين f و g المعرّفين على IR كما يلي:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{1+e^{\frac{1}{|x|}}} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases} \qquad \text{و} \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

1) هل التّابع f قابل للاشتقاق عند النّقطة $x=0$ ؟

2) بيّن أنّ التّابع g قابل للاشتقاق على IR.

3) أثبت أنّ المعادلة $g'(x)=0$ تقبل حلّا في المجال $]-1,1[$.

الحل:

ليكن التّابعين f و g المعرّفين بـ:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{1+e^{\frac{1}{|x|}}} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases} \qquad \text{و} \qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

1) لدينا

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0=f_d'(0)$$

إذن التّابع f قابل للاشتقاق من اليمين عند النّقطة $x=0$.

من جهة أخرى

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1=f_g'(0)$$

إذن التّابع f قابل للاشتقاق من اليسار عند النّقطة $x=0$ و $f_d'(0)\neq f_g'(0)$

وبالتّالي التّابع f غير قابل للاشتقاق عند النّقطة $x=0$.

2) لدينا

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\dfrac{|x|}{1+e^{\frac{1}{|x|}}}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 = g'_d(0)$$

إذن التّابع g قابل للاشتقاق من اليمين عند النّقطة $x=0$.

من جهة أخرى

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{\dfrac{|x|}{1+e^{\frac{1}{|x|}}}}{x} = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{-1}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = 0 = g'_g(0)$$

إذن التّابع g قابل للاشتقاق من اليسار عند النّقطة $x=0$ و $g'_d(0)=g'_g(0)$

وبالتّالي التّابع g قابل للاشتقاق عند النّقطة $x=0$.

3) لدينا

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ \dfrac{-x}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = -x\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)^{-1} & , x<0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{1+e^{\frac{1}{|x|}}} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

إذن

$$g'(x)=\begin{cases} \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} + \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-2} & , x>0 \\ 0 & , x=0 \\ -\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)^{-1} + \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)^{-2} & , x<0 \end{cases}$$

نلاحظ أنّه إذا كان $x\in]0,1[$ فإنّ: $g'(x)=\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-1} + \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^{-2} > 0$

أمّا إذا كان $x\in]-1,0[$ فإنّ

$$g'(x) = -\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)^{-1} + \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}\left(1+e^{-\frac{1}{x}}\right)^{-2} < 0$$

إذن إذا كانت $x_1\in]0,1[$ ، $x_2\in]-1,0[$، التّابع g' مستمرّ على $[x_2,x_1]$ و $g'(x_1)>0$ ، $g'(x_2)<0$ ومنه حسب نظريّة القيم الوسطى:

توجد $c \in]x_2, x_1[\subset]-1,1[$ بحيث $g'(c) = 0$.

تمرين:

ليكن $f : [0,1] \to IR$ دالة قابلة للاشتقاق، ومشتقّها f' مستمرّة و تحقّق $f'(x) > 0$ من أجل كلّ $x \in [0,1]$.

1) بيّن أنّه يوجد $k > 0$ بحيث: $\forall x \in [0,1],\ f'(x) \geq k$.

2) بيّن، مستعملا نظريّة التّزايدات المنتهيّة، أنّه إذا كانت $f(0) = 0$ ، فإنّ:

$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq kx$.

الحل:

1) لتكن $f : [0,1] \to IR$ دالة قابلة للاشتقاق، ومشتقّها f' مستمرّة و تحقّق $f'(x) > 0$ من أجل كلّ $x \in [0,1]$. بما أن الدالة f' مستمرّة على المجال المغلق $[0,1]$ فإنّهاتكون محدودة و تأخذ قيم حدّيه الأعلى و الأدنى. إذن يوجد $x_1, x_2 \in [0,1]$ بحيث:

$$f'(x_2) = \sup_{x \in [0,1]} f'(x) \text{ و } f'(x_1) = \inf_{x \in [0,1]} f'(x) .$$

وبالتّالي نأخذ $k = \inf_{x \in [0,1]} f'(x)$ فهو يحقّق: $k > 0$ بحيث: $\forall x \in [0,1],\ f'(x) \geq k$.

2) لدينا : من أجل كلّ $0 < x \leq 1$ ، الدالة f مستمرّة على المجال $[0, x]$ وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$، إذن حسب نظريّة التّزايدات المنتهيّة :

توجد $c \in]0, x[$ بحيث $f(x) - f(0) = xf'(c)$

ومنه حسب السّؤال الأوّل :

$\exists c \in]0, x[$ بحيث $f(x) = xf'(c) \geq xk$.

ومنه من أجل كلّ $0 < x \leq 1$ لدينا $f(x) \geq xk$.

أمّا بالنّسبة لـ $x = 0$ فإنّ $f(0) = 0 \geq 0k$ والعلاقة محقّقة. إذن

$\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq kx$.

تمرين:

1) برهن أنّ : $\forall x > 0\ ,\ x + \frac{1}{x} \geq 2$.

2) أستنتج أنّ: $\forall x, y > 0\ ,\ x.y \geq 1 \Rightarrow x + y \geq 2$

3) برهن أنّ: $\forall x \neq 0\ ,\ \left| x + \frac{1}{x} \right| = 2 \Rightarrow |x| = 1$.

الحل:

1) لدينا : $\forall x>0\ ,\ (x-1)^2\geq 0$ إذن $x^2-2x+1\geq 0$ ومنه $x^2+1\geq 2x$ أي $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

وبالتالي $\dfrac{x^2+1}{x}\geq 2$ وهو المطلوب.

2) لدينا : $\forall x,y>0\ ,\ xy\geq 1$ إذن $y\geq \dfrac{1}{x}$ و منه $x+y\geq x+\dfrac{1}{x}\geq 2$.

3) إذا كان $\forall x\neq 0\ ,\left|x+\dfrac{1}{x}\right|=2$ فإنّ $\left|\dfrac{x^2+1}{x}\right|=2$ أي $\dfrac{|x^2+1|}{|x|}=2$

ومنه $|x|^2+1=2|x|$ (لأنّ $|x^2+1|=|x|^2+1$) إذن $|x|^2-2|x|+1=0$

وبالتّالي $(|x|-1)^2=0$ أي $|x|=1$.

تمرين:

1) ليكن $a>0$ و f دالة موجبة تماما ($f>0$) معرّفة على المجال $]-a,a[$، وقابلة للاشتقاق عند النّقطة 0 بحيث $f(0)=1$. برهن أنّ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln f(x)}{x}=f'(0)$.

2) لتكن الدالة $f:IR\to IR$ المعرّف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$$

بيّن أنّ f قابلة للاشتقاق عند النّقطة 0، واستنتج $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$.

3) لتكن $g:IR\to IR$ بحيث: $g(x)=a+bx+ce^{dx}$ ، $a,b,c,d\in IR^*$

نعلم حسب نظريّة التّزايدات المنتهيّة أنّ:

$$\forall (x,h)\in IR^2\ ,\exists\theta\in\,]0,1[:g(x+h)-g(x)=hg'(x+h\theta)$$

برهن أنّ العدد θ مرتبط بـ h فقط (أي θ مستقلّ عن x)، ثمّ أحسب $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)$.

الحل:

1) ليكن $a>0$ و f دالة موجبة تماما، معرّفة على المجال $]-a,a[$ وقابلة للاشتقاق عند النّقطة 0 بحيث $f(0)=1$.

لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)-\ln f(0)}{x-0}=(\ln f(x))'_{x=0}=\frac{f'(0)}{f(0)}=f'(0)$$

2) لتكن $f:IR\to IR$ بحيث

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$$

لدينا

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

(حسب قاعدة لوبيطال)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}=\frac{1}{2}\left(e^x\right)'_{x=0}=\frac{1}{2}e^0=\frac{1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق عند النّقطة 0 و $f'(0)=\frac{1}{2}$.

استنتاج $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.

لدينا $f(0)=1$ ، و من السّؤال الأوّل، بما أنّ f موجبة تماما وقابلة للاشتقاق عند النّقطة 0، فإنّ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(x)}{x}=f'(0)=\frac{1}{2}$$

3) لتكن $g: IR\to IR$ المعرّف بـ:

$g(x)=a+bx+ce^{dx}$ حيث $a,b,c,d\in IR^*$.

لدينا : $\forall (x,h)\in IR^2, \exists\theta\in\left]0,1\right[: g(x+h)-g(x)=hg'(x+\theta h)$

و بما أنّ

$g(x+h)=a+bx+bh+ce^{dx+dh}$ ، $g'(x)=b+dce^{dx}$ و $g'(x+\theta h)=b+dce^{d(x+\theta h)}$ ، فإنّ

$$g(x+h)-g(x)=hg'(x+\theta h)$$

$$\Leftrightarrow a+bx+bh+ce^{dx+dh}-a-bx-ce^{dx}=bh+hdce^{dc}e^{d\theta h}$$

$$\Leftrightarrow dhe^{d\theta h}=e^{dh}-1\Leftrightarrow e^{d\theta h}=\frac{e^{dh}-1}{dh}\Leftrightarrow d\theta h=\ln\frac{e^{dh}-1}{dh}\Leftrightarrow\theta=\frac{1}{dh}\ln\frac{e^{dh}-1}{dh}$$

و منه $\lim_{h\to 0}\theta=\lim_{h\to 0}\frac{1}{dh}\ln\frac{e^{dh}-1}{dh}=\frac{1}{2}$.

تمرين:

باستعمال نظريّة التّزايدات المنتهيّة برهن صحّة المتراجحة المضاعفة التّاليّة:

$\forall x\in\left[0,1\right[, 1-x\le e^x\le\frac{1}{1-x}$.

(إعانة: يمكن استعمال التّابعين: $f(x)=x-1+e^x$ و $g(x)=(1-x)e^x-1$)

الحل:

- المتراجحة المضاعفة صحيحة بداهة من أجل $x=0$.

- ليكن التّابعين f و g المعرّفين بـ $f(x)=x-1+e^{x}$ و $g=(1-x)e^{x}-1$ الذين هما معرّفين، مستمرّين وقابلين للاشتقاق على IR، إذن يمكن تطبيق عليهما ، نظريّة التّزايدات المنتهيّة على المجال $[0,x]$ حيث $0<x<1$ إذن:

$$\begin{cases} \exists c_1 \in]0,x[: f(x)-f(0)=xf'(c_1) \\ \wedge \\ \exists c_2 \in]0,x[: g(x)-g(0)=xg'(c_2) \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} \exists c_1 \in]0,x[: e^{x}-1+x=x\left(e^{c_1}+1\right)>0 \\ \wedge \\ \exists c_2 \in]0,x[: (1-x)e^{x}-1=x\left(-c_2e^{c_2}\right)<0 \end{cases}$$

و بما أنّ $1-x>0$ فإنّ: $1-x<e^{x}<\dfrac{1}{1-x}$.

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

1. الدالة exp هي الدالة الوحيدة التي تساوي مشتقتها.
2. إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=-2$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=-2e^{x}$
3. الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3e^{2x}+1$ هي بحيث: $f'=2f$
4. إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=-3f$ و $f(1)=2$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=2e^{-3(x-1)}$
5. إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=-2f$ و $f(1)=1$ فإن f لا تنعدم على $\mathbb{R}$

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

1- الدالة exp هي الدالة الوحيدة بحيث من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي y، * $f(x+y)=f(x).f(y)$.

2- من أجل كل عدد حقيقي x: $\dfrac{e^{3x+2}}{e^{x+2}}=e^{2}$

3- إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي y ، $f(x+y)=f(x).f(y)$ و $f(0)=1$ فإنه يوجد عدد حقيقي k حيث $f'=kf$

4- لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=e^{u_n}$. إذا كانت (u_n) حسابية، فإن (v_n) هندسية.

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

-1 إذا كان $x \geq -2$ فإن $x \geq \frac{1}{e^x}$

-2 المعادلة $e^x + 2e^{1-x} = 0$ تقبل حل حقيقي وحيد.

-3 مجموعة حلول المتراجحة $e^x < 1$ هي المجال $]-\infty;0[$

-4 المتراجحة $-2 < e^{x^2-1} < 1$ متكافئة مع $x^2 < 1$

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

-1 من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عدد حقيقي b : $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a} \times e^{2b}}$

-2 من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عدد حقيقي b : $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$

-3 من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عدد حقيقي b : $2e^{a+b} = e^{2a} \times e^{2b}$

-4 من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل عدد حقيقي b : $2e^{a+b} > e^{2a} + e^{2b}$

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

-1 منحنيات الدوال $x \mapsto 2e^{\frac{x}{2}} - 1$ و $x \mapsto e^x$ لهما نفس المماس عن النقطة $A(0.1)$

-2 الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x^2}$ هي مشتقة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \frac{1}{2x} e^{x^2}$

-3 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{10} e^x = 0$

تمرين:

أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير.

نضع، من أجل كل عدد حقيقي $\chi : f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{e^{x+1}}$

-1 $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$

-2 من أجل كل عدد حقيقي $\chi : f(x) = e^{x-1}$

-3 f متناقصة على $]-\infty;0]$

-4 f متناقصة على $[0;+\infty[$

-5 من أجل كل عدد حقيقي $\chi : f'(x) = f(x)$

أسئلة متعددة الاختيار (Q C M)

تمرين:

لتكن f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+1)e^{2x}$ و $g(x) = \frac{1-x}{e^{2x}}$ نرمز بـ (C_f) و (C_g) لمنحنييهما في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

جواب واحد صحيح فقط، عينه مع التبرير:

1- من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

ج1: $f'(x)=2(x+1)f(x)$ ج2: $f'(x)=2f(x)$ ج3: $f'(x)-2f(x)=e^{2x}$

2- لدينا:

ج1: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ج2: $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ ج3: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-g(x)]=+\infty$

3- المعادلة $f(x)=1$ تقبل في $\mathbb{R}$:

ج1: حل وحيد. ج2: حلان ج3: لا تقبل حلول

4- نحصل على المنحني (C_g) من المنحنى (C_f) بـ:

ج1: تناظر محوري. ج2: تناظر مركزي ج3: انسحاب

تمرين:

يمكن أن يكون عدة أجوبة صحيحة.

نعتبر المعادلات التفاضلية :

$$(E_1): y'-2y=0 \text{ ، } (E_2): y'-2y=2e^{2x}$$

حيث y دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

1- إذا كانت f و g دالتان غير معدومتين و حلان لـ (E_1) فإن:

ج1: $f=g$ ج2: يوجد عدد k حيث: $f=kg$ ج3: $f-g$ حل لـ (E_1)

2- إذا كانت f حل للمعادلة (E_1) حيث $f(0)<0$ فإن:

ج1: يوجد عدد c حيث: $f(x)=ce^{-2x}$ ج2: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ج3: الدالة $x\mapsto f(x)+ke^{2x}$ حل لـ (E_2).

3- إذا كانت f و g حلان للمعادلة (E_2) (E_1) فإن:

ج1: $f=g$ ج2: يوجد عدد k حيث: $g: x\mapsto f(x)+ke^{2x}$ ج3: مشتقة الدالة $g: x\mapsto f(x)e^{-2x}$ هي دالة ثابتة.

أسئلة خاصة بالدرس:

تمرين:

في حجرة ذات درجة حرارة ثابتة تساوي $20°C$، في اللحظة البدائية، نرمز لها بالرمز 0، درجة الحرارة $\theta(0)$ لسائل تساوي $70°C$. خمس دقائق من بعد، درجة حرارة السائل أصبحت $60°C$.

نقبل أن درجة الحرارة θ للسائل هي دالة قابلة للاشتقاق للزمن t، معبرة بالدقيقة، و بحيث $\theta'(t)$ متناسبة مع الفرق بين درجة الحرارة $\theta(0)$ و درجة حرارة الحجرة. نسمي a معامل التناسب، $a\in\mathbb{R}$.

1- برهان درس: لتكن المعادلة التفاضلية: (E)...... $y'=ay$

المعطيات:

الدالة $x\mapsto e^{ax}$ هي حل للمعادلة (E)

المطلوب:

برهن أن كل حل للمعادلة (E) هو من الشكل : $x \mapsto ce^{ax}$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

-2 حل المعادلة: $y' = ay - 20a$.

-3 ما هي درجة السائل، 20 دقيقة بعد اللحظة البدائية ؟

تمرين:

لتكن E_1 مجموعة الدوال حلول المعادلة التفاضلية $y' = y$ و E_2 مجموعة الدوال حلول المعادلة التفاضلية $y'' = y$ الهدف من التمرين هو البرهنة على وجود دالة وحيدة f تنتمي إلى E_2 و تحقق: $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$.

-1 تحقق أن الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $x \mapsto e^{x}$ و $x \mapsto e^{-x}$ هي عناصر من E_2.

-2 لتكن f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$، نضع $u = f' + f$

أ- برهن أن f تنتمي إلى E_2 إذا و فقط إذا كانت u تنتمي إلى E_1.

ب- **المعطيات:**

الدالة $x \mapsto e^{x}$ هي عنصر من E_1؛ من أجل كل عدد حقيقي x، $e^{x}e^{-x} = 1$

المطلوب:

برهن واحدية الدالة u عنصر من E_1 الذي يحقق $u(0) = 1$.

-3 لتكن f عنصر من E_2 . نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) = f(x)e^{x}$

أ- برهن أنه إذا كان $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$ فإن $g'(x) = e^{2x}$.

ب- برهن أنه توجد دالة وحيدة f تنتمي إلى E_2 و تحقق: $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$ وعين عبارتها.

تمارين حول المعادلات ، المتراجحات و الجمل:

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالي:

$$e^{3-2x} = 1 \;......(1)\quad e^{3x+1} = \frac{1}{e^2} \;......(2)\quad \left(e^{x-1}+2\right)\left(e^{x-2}-1\right) = 0 \;......(3)\quad e^{2x-1} = e^{\frac{x}{2}+1} \;......(4)$$

$$\left(e^{x}\right)^3 = e^{x-1} \;......(5)\quad e^{x} = \sqrt{e^{x-1}} \;......(6)\quad e^{\frac{2x-1}{x-2}} - e = 0 \;......(8)\quad \frac{e^{-x}-3}{e^{-x}-5} = \frac{1}{2} \;......(7)$$

تمرين:

-1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $3X^2 + 4X - 7 = 0$.

-2 استنتج حلول المعادلة: $3e^{2x} + 4e^{x} - 7 = 0$.

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$e^{3x} = 8e^{x} \;......(1)\quad 8e^{2x} = 3e^{-x} \;......(2)\quad e^{2x} + e^{x} - 2 = 0 \;......(3)\quad e^{2x} - 2e^{x} - 8 = 0 \;......(4)$$

$$e^{4x} - 5e^{2x} + 3 = 0 \;......(5)\quad e^{x} + e^{-x} = 1 \;......(6)\quad e^{x} + e^{1-x} = e + 1 \;......(7)\quad e^{x+2} - 2e^{-x} - e = 0 \;......(8)$$

$$e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0 \;......(9)\quad e^{4x} - 13e^{2x} + 36 = 0 \;.....(10)\quad e^{2x} - 4e^{-2x} = 3 \;......(11)\quad e^{x} - e^{-x} = 1 \;......(12)$$

$e^{2x}+15e^{-x}=19$ ......(13) $e^{3x}-7e^{x}+6=0$ .....(14) $e^{x}+e^{-x}=2$ .....(15) $e^{-x}=5e^{x}$ ......(16)

$e^{6x}-4e^{3x}+3=0$ ....(17) $e^{3x+5}-2e^{2x+5}-e^{x+5}=0$ ...(18) $e^{x}+e^{1-x}=e+1$ ...(19) $3e^{-x}=4e^{x}-7$ ....(20)

تمرين:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$e^{2-x}<1$ ......(1) $e^{-x}\geq -2$ ......(2) $e^{3x}\leq 1$ ......(3) $e^{2x-1}>e\sqrt{e}$ ......(4)

$2-e^{x^2}\geq 1$ ......(5) $e^{-3x}<e^{x-3}$ ......(6) $\dfrac{e^{2x-1}}{e^{3x+1}}\leq \dfrac{1}{e^2}$ ......(7) $e^{\frac{2x-1}{3x+1}}\leq \dfrac{1}{e}$ ......(8)

$e^{2x}-e^{x+1}-e^{2-x}+1\leq 0$ ......(9) $e^{3x}-6e^{2x}+8e^{x}>0$ ......(10) $e^{2x}-3e^{x}+2<0$ ......(11)

تمرين:

حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية:

$\begin{cases} e^x\times e^y=e^{16} \\ (e^x)^y=e^{28} \end{cases}$ ......(1) $\begin{cases} e^x\times e^{2y}=e^{5} \\ e^{2xy}=e^{3} \end{cases}$ ....(2) $\begin{cases} 2e^x-e^y=15 \\ e^x+2e^y=40 \end{cases}$ ....(3)

مسائل

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-2x+2xe^{-x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة البيانية: 2 cm)

1-أحسب النهايات للدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=(2x-2)(1-e^{-x})$ أدرس تغيرات f .

3-بين أنالمنحنى (C_f) يقطع (xx')عند نقطة فاصلتها محصورة بين 1,5 و 1,6.

4-أحسب $f(3), f(2), f(-1)$ وأنشئ (C_f).

5-باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

6- أحسب بـ: cm^2 مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات $x=0$, $x=1$ و $y=0$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2-5x+7)e^x$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- أحسب النهاية للدالة f عند $-\infty$ و أعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب نهاية f عند $+\infty$.

ج- أدرس تغيرات f .

2-أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

3-أحسب ; f(4)f(-1) ; f(-2) ; f(3) و أنشئ (C_f) وَ المماس (T).

4- h دالة عددية معرفة كما يلي: $h(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

أ- عين a, b و c حتى تكون h دالة أصلية للدالة f .

أ- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) المستقيمات ذات معادلات: $x=0$, $x=1$ و $y=0$.

ب-

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2-x+1)e^{-x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- أحسب النهاية للدالة f عند $+\infty$ و أعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب نهاية f عند $-\infty$.

ج- بين أن $f'(x)=(-x^2+3x-2)e^{-x}$ ثم أدرس تغيرات f .

2-أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

3-أحسب ; f(4)f(3) و أنشئ (C_f) وَ المماس (T).

4-عين بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=0,4$.

5- h دالة عددية معرفة كما يلي: $h(x)=(ax^2+bx+c)e^x$.

ب- عين a, b و c حتى تكون h دالة أصلية للدالة f .

ج- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات: $x=0$, $x=1$ و $y=0$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{-x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة البيانية: 2 cm)

1- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب نهاية f عند $-\infty$.

ج- أدرس تغيرات f .

2-أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

3-أحسب f(-2) ، f(-1) و أنشئ (C_f) وَالمماس (T),

4-باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب مساحة الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات معادلات:

$x=0$, $x=1$ و $y=0$.

5-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو معادلة: $y=mx$

6- g دالة عددية ذات متغير حقيقي معرفة كما يلي: $f(x)=xe^x$. نسمي (Γ) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم السابق.

أ- أحسب $g(-x)+f(x)$.

ب- استنتج أن (Γ) يستنتج من (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه و أنشئ (Γ).

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x(e^x-1)$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب نهاية f عند $+\infty$.

ج- أدرس تغيرات f .

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

3- عين إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f)

4- أحسب $f(1)$ و أنشئ (C_f) وَ المماس (T)

5- أحسب المساحة $A(\lambda)$ الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=\ln 4$, $x=\lambda$ و $y=0$ مع $\lambda<0$. عين λ حتى يكون: $A(\lambda)=2$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{1-x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة البيانية: 2 cm)

1- أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و أعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب نهاية f عند $-\infty$.

ج- أدرس تغيرات f .

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$

3- عين إحداثيتي نقطة الانعطاف للمنحنى (C_f) و أكتب معادلة المماس (T') للمنحنى (C_f) عندها.

4- أحسب $f(1)$ $f(2)$; و أنشئ (C_f) وَ المماسين (T) و (T').

5- باستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسب بـ: cm^2 ، المساحة $A(\lambda)$ الحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=0$, $x=\lambda$ و $y=0$ مع $\lambda>0$. عين λ حتى يكون: $A(\lambda)=4(e-1-\lambda)cm^2$.

6- g دالة عددية ذات متغير حقيقي معرفة كما يلي: $g(x)=xe^{1+x}$. نسمي (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- أحسب $g(-x)+f(x)$

ب- استنتج أن (Γ) يستنتج من (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

ج- أنشئ (Γ).

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2e^{1-x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

-1 أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب نهاية f عند $-\infty$.

ج- أدرس تغيرات f.

-2أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

-3أحسب $f(-1)$ و أنشئ (C_f) وَ المماس (T).

-4 h دالة عددية معرفة كما يلي: $h(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$.

أ- عين b,a و c حتى تكون h دالة أصلية للدالة f.

ب- أحسب بـ: cm^2 ، مساحةالحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=0$, $x=2$ و $y=0$

-5 g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^2e^{1+x}$. نسمي (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- أحسب $g(-x)-f(x)$.

ب- استنتج أن (Γ) يستنتج من (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه. أنشئ (Γ).

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)^2e^{x+1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

-1 أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب نهاية f عند $+\infty$.

ج- أدرس تغيرات f.

-2أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

-3عين فاصلتي نقطتي الانعطاف للمنحنى (C_f).

-4أحسب $f(-3)$ $f(2)$; و أنشئ (C_f) وَ المماس (T).

-5 h دالة عددية معرفة كما يلي: $h(x)=(ax^2+bx+c)e^{x+1}$

أ- عين b,a و c حتى تكون h دالة أصلية للدالة f.

ب- أحسب بـ: cm^2،مساحةالحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=1$, $x=-1$ و $y=0$

-6ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2-2x+1-me^{-x-1}=0$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+2-\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

-1 أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك.

-2 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\frac{e^{2x}-e^{x}+1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$ و استنتج اتجاه تغيرات f على المجال $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

-3 بين أن النقطة $\omega(0,\frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$. ماذا تستنتج ؟

-4 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة ω.

-5 أنشئ $\left(C_f\right)$ و (T).

-6 لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=\frac{x^{2}}{2}+3x-3\ln\left(e^{x}+1\right)$

أ- بين أن F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب- أحسب مساحة الحيز الحيز المستوى المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=0$, $x=1$ و $y=x$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=x-\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

نسمي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

-1 احسب $f(-x)+f(x)$. ماذا تستنتج ؟

-2 أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك. استنتج معادلة للمستقيم المقارب لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$

ب- أحسب $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ج- بين أن $f'(x)=1+\frac{2e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^{2}}$ و استنتج إتجاه تغيرات f على المجال $]0,+\infty[$ ثم جدول تغيرات f .

-3 بين أن $\left(C_f\right)$ يقطع (xx') عند نقط, فاصلتها x_1 حيث: $1{,}1<x_1<1{,}2$ . . أنشئ $\left(C_f\right)$,

-4 أحسب المساحة $A(\lambda)$ الحيز المستوى المحدد بالمنحنى $\left(C_f\right)$ وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=1$, $x=\lambda$ و $y=x-1$ مع $\lambda>1$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$ بـ: $f(x)=x+\frac{e^{x}}{2\left(e^{x}-2\right)}$.

نسمي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة البيانية: 2 cm)

-1 احسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

-2 أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+\frac{1}{2})]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك.

-3 أدرس تغيرات f .

-4 بين أن: $\omega(\ln 2,\ln 2+\frac{1}{4})$ مركز تناظر للمنحنى $\left(C_f\right)$. أنشئ $\left(C_f\right)$.

5-أحسب، بـ: cm^2، المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=\ln 4$, $x=\lambda$ و $y=x+\frac{1}{2}$ مع $\lambda>\ln 4$.

6-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو معادلة: $y=x+m$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=x-\frac{2e^x}{e^x-1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة البيانية: $2\ cm$).

1- احسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$ و أعط تفسيرا هندسيا لذلك.

3- أدرس تغيرات f .

4- بين أن: $\omega(0,1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل x_0 حيث: $2,2<x_0<2,3$ . . أنشئ (C_f).

6- أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=-2$, $x=\lambda$ و $y=x$ مع $\lambda<-2$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1+\frac{1}{e^x+1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ و اعط تفسيرا هندسيا لذلك

ج- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\frac{e^{2x}+e^x+1}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغيرات f على $\mathbb{R}$

د- ثم شكل جدول تغيرات f

2- بين أن (C_f) يقطع (xx') عند نقط, فاصلتها x_1 حيث: $-1,9<x_1<-1,8$ . .

3- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$.

4- بين أن $\omega\left(0,\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) . ماذا تستنتج؟

5- أنشئ (C_f) و المماس (T).

6- أحسب المساحة A للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=0$, $x=\ln 2$ و $y=x+2$.

مسألة:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب $f(-x)+f(x)$. ماذا تستنتج ؟

2- أ- أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم أعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ و أعط تفسيرا هندسيا لذلك.

ج- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=1+\dfrac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$ و استنتج اتجاه تغيرات f على كل مجال من $\mathbb{R}^*$

د- أنشئ جدول تغيرات f .

3- بين أن (C_f) يقطع (xx') عند نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث: $-1,4<x_0<-1,3$ و $0,8<x_1<0,9$.

4- أنشئ (C_f).

5- عين العددين الحقيقيين a وَ b حيث من كل عدد حقيقي x غير معدوم، : $f(x)=x+a+\dfrac{be^x}{e^x-1}$.

أحسب المساحة A للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (C_f) وَ المستقيمات ذات معادلات: $x=\ln 2$, $x=\ln 3$ و $y=x$.

1 الدوال الاصلية و التكاملات:

تمرين:

احسب $I=\int\dfrac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$.

الحلّ:

نضع $x=t^2$ أو بالضّبط $t=\sqrt{x}$ ، إذن $dx=2tdt$ و

$$I=\int\frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)t}$$
$$=2\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$\frac{1}{1-t^2}=\frac{1}{(1-t)(1+t)}$$
$$=\frac{a}{1-t}+\frac{b}{1+t}$$

تعيين a و b.

بالحساب نجد: $a=-\dfrac{1}{2}$ و $b=\dfrac{1}{2}$.

و منه

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)t} \\
&= 2\int \frac{dt}{1-t^2} \\
&= 2\int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1-t} + \frac{\frac{1}{2}}{1+t} \right) dt \\
&= \int \left(\frac{-1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\
&= -\ln\left|1-t\right| + \ln\left|1+t\right| + c \ \ / \ \ c \in \mathbb{R} \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c \ \ / c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

و بالرّجوع إلى x، نجد

$$I = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} = \ln\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right| + c \quad / \ \ c \in \mathbb{R}$$

تمرين:

احسب : $I = \int \sin^2 x \cos x dx$.

الحلّ:

نضع $t = \sin x$ و منه $dt = \cos x dx$

وبالتالي

$$\begin{aligned}
I &= \int \sin^2 x \cos x dx \\
&= \int t^2 dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 + c \ \ / c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

و منه $\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + c \ \ / c \in \mathbb{R}$.

تمرين:

احسب $I = \int (2x+1)^3 dx$.

الحلّ:

لنضع $t = 2x+1$، إذن $dx = \frac{dt}{2}$ أو $dt = 2dx$

$$\begin{aligned} I &= \int (2x+1)^3\, dx \\ &= \int t^3 \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int t^3 dt \\ &= \frac{t^4}{8} + c \ / \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

و بالتّالي:

$$I = \int (2x+1)^3\, dx = \frac{1}{8}(2x+1)^4 + c \ / \ c \in \mathbb{R}$$

تمرين:

احسب $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

الحلّ:

لنضع $x = \sin t$ ، إذن $dx = \cos t dt$ ، و بما أنّ x يتغيّر من 0 إلى 1 لمّا t يتغيّر من 0 إلى $\frac{\pi}{2}$ فإنّ

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\, \cos t dt \end{aligned}$$

و بما أنّ الدالة cos موجبة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنّ:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos^2 t} &= |\cos t| \\ &= \cos t \end{aligned}$$

و

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t}\cos t dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

إذن : $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$

تمرين:

احسب $I=\int_{-\frac{3}{2}}^{\sqrt{5}}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

الحلّ:

لنضع $t=x^2+4$ إذن $dt=2xdx$ ،

فمن أجل $x=-\frac{3}{2}$ فإنّ $t=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4=\frac{9}{4}+4=\frac{25}{4}$ ،

و من أجل $x=\sqrt{5}$ فإنّ $t=\left(\sqrt{5}\right)^2+4=5+4=9$ ،

و منه

$$I=\int_{\frac{25}{4}}^{9}\frac{dt}{\sqrt{t}}$$
$$=\left[2\sqrt{t}\right]_{\frac{25}{4}}^{9}$$
$$=2\left(\sqrt{9}-\sqrt{\frac{25}{4}}\right)$$
$$=2\left(3-\frac{5}{2}\right)=1$$

و بالتّالي $I=\int_{-\frac{3}{2}}^{\sqrt{5}}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx=1$

التكامل بالتجزئة

تمرين:

أحسب التكامل $\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$.

الحلّ:

لدينا : $\int fg' = fg - \int gf'$.

تضع

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = -\cos x \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx &= -x\cos(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos(x))\,dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx \\ &= \sin(x)\Big]_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

تمرين:

أحسب $I = \int (x^2 - 5x + 7)e^{-x}dx$

الحلّ:

الدالة الأصليّة هي $F : x \longrightarrow (a_0x^2 + a_1x + a_2)e^{-x} + C$

حساب a_0, a_1, a_2 : لدينا

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2a_0x + a_1 - a_0x^2 - a_1x - a_2)e^{-x} \\ &= \left[-a_0x^2 + 2(a_0 - a_1)x + (a_1 - a_2)\right]e^{-x} \end{aligned}$$

و مقارنة $F'(x)$ مع $(x^2 - 5x + 7)e^{-x}$ ، نجد

$$\begin{aligned} -a_0 &= 1 \Rightarrow a_0 = -1 \\ 2a_0 - a_1 &= -5 \Rightarrow a_1 = 3 \\ a_1 - a_2 &= -5 \Rightarrow a_2 = -4 \end{aligned}$$

و بالتّالي

$$I = \int (x^2 - 5x + 7)e^{-x}dx = (-x^2 + 3x - 4)e^{-x} + C .$$

تمرين:

أحسب $I=\int e^{-2x}\cos x dx$

الحلّ:

إن الدالة الأصلية هي على الشّكل $G:x\longrightarrow e^{-2x}(\lambda\cos x+\mu\sin x)+C$ ،

و منه

$$\begin{aligned}G'(x)&=e^{-2x}(\lambda\sin x+\mu\cos x-2\lambda\cos x-2\mu\sin x)\\&=e^{-2x}((\mu-2\lambda)\cos x-(-\lambda+2\mu)\sin x)\end{aligned}$$

و بمقارنة $G'(x)$ و $e^{-2x}\cos x$ نجد $\mu-2\lambda=1$ و $-\lambda+2\mu=0$

و بالتّالي $\mu=-\frac{1}{3}$ $-3\mu=1\Rightarrow$ و $\lambda=2\mu=\frac{2}{3}$ ، إذن

$$I=\int e^{-2x}\cos x dx=\frac{e^{-2x}}{3}(2\cos x-\sin x)+c\ \ /\ \ c\in\mathbb{R}$$

تذكير :

يمكن حساب هذا التّكامل حسب الخاصيتين التاليتين

$$n=1\Rightarrow\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|$$

$$n\geq 2\Rightarrow\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

تمرين :

أحسب $\int\frac{dx}{x^3-1}$.

الحلّ:

لدينا

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{(x+1/2)^2+3/4}$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{(x+1/2)+3/2}{(x+1/2)^2+3/4}$$

وبالتالي

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|$$

$$\int\frac{x+1/2}{(x+1/2)^2+3/4}dx=\frac{1}{2}\ln((x+1/2)^2+3/4)$$

$$\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} = \arctan \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/2}$$

ونجد أخيرا أن

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left(1+x+x^2\right) - \frac{1}{2}\arctan\frac{2(x+1)}{\sqrt{3}}$$

تمرين :

أحسب $I(x) = \int \frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}dx$.

الحل :

المقام المشترك للكسور $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ هو 4 إذن نضع $x = t^4, dx = 4t^3dt$ إذن

$$I(t) = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}\right)dt$$

$$= 4\int t^2dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1}dt = \frac{4t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + k$$

وأخيرا نجد أن $I(x) = \frac{4}{3}\left[x^{3/4} - \ln\left|x^{3/4}+1\right|\right] + k$

مثال

أحسب $I(x) = \int \frac{(x+4)^{1/2}}{x}dx$.

الحلّ:

نضع $t^2 = x+4, dx = 2tdt$ ومنه نجد أن

$$\begin{aligned} I(x(t)) &= 2\int \frac{t^2}{t^2-4}dt \\ &= 2\int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right)dt \\ &= 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} \\ &= 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| \end{aligned}$$

تمرين:

أحسب $I(x) = \int \frac{dx}{\sin x}$.

الحلّ:

بوضع $t = \tan\frac{x}{2}$ نحصل على:

$$\begin{aligned} I\left(x(t)\right) &= \int \frac{1+t^2}{2t} 2 \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t| + c \quad / c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

أو بعبارة أخرى $I(x) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + k$

تمرين:

احسب $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

الحلّ:

نجد باستعمال الدستور الأوّل :

$$\begin{aligned} I\left(x\right) &= \int \frac{1}{2}\left(\sin\left(3x+2x\right)+\sin\left(3x-2x\right)\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sin 5x dx + \frac{1}{2}\int \sin x dx \\ &= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + c \ / \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

تمرين:

احسب $I = \int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

الحل:

لدينا

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^3 x \cos^2 x dx \\ &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x \sin x dx \\ &= \int \cos^2 x \sin x dx - \int \cos^4 x \sin x dx \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c \ / \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

طريقة ثانية:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^3 x \cos^2 x dx \\ &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx \\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 x \sin x dx \end{aligned}$$

و بوضع $t = \cos x$ فإنّ $dt = -\sin x dx$ و منه

$$I = -\int \left(1-t^2\right)t^2 dt + \int t^4 dt$$
$$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c \ \ / \ c \in \mathbb{R}$$

و بالتالي

$$I = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + \frac{1}{5}\cos^5(x) + c \ / \ c \in \mathbb{R}$$

تمرين:

أحسب $\int \cos^5 x dx$.

الحل:

لدينا $I = \int \cos^4 x \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cos x dx$

و بوضع $t = \sin x$ فإنّ $dt = \cos x dx$ و

$$I = \int \left(1-t^2\right)^2 dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C$$

و بالرّجوع إلى x نجد

$$\int \cos^5 x dx = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

الطّريقة 1

نستعمل القواعد التّاليّة

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ، $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ، $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ ،

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

تمرين :

احسب $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

الحلّ:

الطّريقة 1 :

لدينا $\sin^2 x\cos^4 x=\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 x=\frac{\sin^2 x}{4}\frac{1+\cos 2x}{2}$

أو $\sin^2 x\cos^4 x=\frac{1}{16}(1-\cos 4x)(1+\cos 2x)$

أي $\sin^2 x\cos^4 x=\frac{1}{16}(1+\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\cos 4x)$

و بما أنّ $\cos 2x\cos 4x=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)$

فإنّ $\sin^2 x\cos^4 x=\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{2}\cos 2x-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 6x\right)$

و منه $I=\frac{1}{16}\left(x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{4}-\frac{\sin 6x}{12}\right)+C$

الطّريقة 2 :

كما في الطّريقة الأولى، نكتب $\sin^{2p} x$ و $\cos^{2q} x$ على شكل مزج خطّي لـ sin و cos من مضعفات x، باستعمال

$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ، $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

تمرين:

احسب $I=\int\cos^6 xdx$

الحلّ:

لدينا
$$\cos^6 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^6$$
$$=\frac{1}{2^6}\left[\left(e^{6ix}+e^{-6ix}\right)+6\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+15\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+20\right]$$

أي $\cos^6 x=\frac{1}{2^6}(2\cos 6x+12\cos 4x+30\cos 2x+20)$

$$=\frac{1}{2^5}(\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10)$$

إذن $I=\frac{1}{2^5}\left(\frac{\sin 6x}{6}+\frac{6\sin 4x}{4}+\frac{15\sin 2x}{2}+10x\right)+C$

تمرين:

أحسب $I=\int\frac{dx}{\sin^4 x}$.

الحلّ :

يمكننا أن نكتب $I=\int \frac{1}{\sin^2 x}\frac{dx}{\sin^2 x}$

و بوضع $t=\cot x$ فإنّ $dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}$

و $\frac{1}{\sin^2 x}=1+t^2$

و منه $I=-\int\left(1+t^2\right)dt=-t-\frac{t^3}{3}+C$

و بالعودة إلى x نجد $\int\frac{dx}{\sin^4 x}=-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C$.

تمرين:

احسب $I=\int\frac{dx}{\cos x}$

الحلّ :

ملاحظة:

إنّ أسهل طريقة هي أخذ $t=\tan\frac{x}{2}$.

نضع $t=\tan\frac{x}{2}$ إذن $x=2\arctan t$

و منه $dx=\frac{2t}{1+t^2}dt$

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

و

$$=\int\frac{2}{1-t^2}dt$$

$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

أي $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$.

تمرين:

احسب $I=\int\tan^4 x dx$

الحلّ:

نكتب $I=\int \tan^2 x\left[\left(\tan^2 x+1\right)-1\right]dx$

و منه $I=\int \tan^2 x\left(\tan^2 x+1\right)dx-\int\left(\tan^2 x+1\right)dx+\int dx$ ،

إنّ الحدّين الأخيرين هما دالتين أصليتن عاديتن. بالنّسبة للحدّ الأوّل نضع $t=\tan x$

إذن $dt=\left(1+\tan^2 x\right)dx$

و $\int \tan^2 x\left(1+\tan^2 x\right)dx=\int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\tan^3 x+C$

و منه $\int \tan^4 dx=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$.

تمرين:

1) أحسب $I=\int \tan^3 xdx$ ،

2) أحسب $J=\int \frac{dx}{\tan^3 x}$

الحلّ :

ملاحظة:

بتبديل x بـ $(-x)$، $(\pi+x)$ و $(\pi-x)$ فإنّ $\tan^n xdx$ لا يتغيّر و بالتّالي نختار: $t=\cos x$ إذا كان n موجب، و $t=\sin x$ إذا كان n سالب.

1) لدينا $I=\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx$ ،

و بوضع $t=\cos x$ فإنّ $dt=-\sin xdx$

و

$$\begin{aligned}I&=-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\left(-\sin x\right)dx\\&=-\int \frac{1-t^2}{t^3}dt\\&=-\int \frac{dt}{t^3}+\int \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

و منه $I=\frac{1}{2t^2}+\ln|t|+C$

و العودة إلى x نجد

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$$

2) لدينا $J = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx$ ،

و بوضع $t = \sin x$ فإنّ $dt = \cos x dx$

و

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} (\cos x) dx \\ &= \int \frac{1-t^2}{t^3} dt \\ &= \int \frac{dt}{t^3} - \int \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

و منه $J = -\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + C$

و العودة إلى x نجد

$$\int \frac{1}{\tan^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \ln|\sin x| + C .$$

حالات خاصّة: $\int \frac{dx}{K^2 + x^2}$ و $\int \frac{dx}{K^2 - x^2}$

الحالة الأولى:

$$\int \frac{dx}{K^2 + x^2}$$

لدينا

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{K} \int \frac{\frac{dx}{K}}{1 + \frac{x^2}{K^2}} \\ &= \frac{1}{K} \arctan \frac{x}{K} + C \end{aligned}$$

الحالة الثّانية:

$$I = \int \frac{dx}{K^2 - x^2}$$

نضع $x = K \sin \varphi$ مع $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ ومنه $dx = K \cos \varphi d\varphi$

وبالتّالي
$$I=\int\frac{K\cos\phi\,d\phi}{K^2\left(1-\sin^2\phi\right)}$$
$$=\frac{1}{K}\int\frac{d\phi}{\cos\phi}+C$$

$$\frac{1}{K^2-x^2}=\frac{1}{(K+x)(K-x)}$$
$$=\frac{A}{K+x}+\frac{B}{K-x}$$

نستنتج أنّ $A=\frac{1}{2K}$ و $B=\frac{1}{2K}$.

$$I=\frac{1}{2K}\int\frac{dx}{K+x}+\frac{1}{2K}\int\frac{dx}{K-x}$$
$$=\frac{1}{2K}\left[\ln|K+x|-\ln|K-x|\right]$$

و منه $I=\frac{1}{2K}\ln\left|\frac{K+x}{K-x}\right|+C$

الحالة العامّة: $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$

نعلم أنّ : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right]$

لنضع $u=x+\frac{b}{2a}$ و $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\pm K$ (حسب إشارة $\left(b^2-4ac\right)$)

إذن لدينا ثلاثة حالات:

1) $\left(b^2-4ac=0\right)$

يبقى معنا $I=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{a}\frac{1}{u}=-\frac{1}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)}+C$

2) $\left(b^2-4ac<0\right)$

نضع $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=-K^2$ ومنه $I=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2+K^2}=\frac{1}{aK}\arctan\frac{u}{K}+C$

3) $\left(b^2-4ac>0\right)$

نضع $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=K^2$ ومنه

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u^2-K^2}$$
$$=-\frac{1}{a}\int\frac{du}{K^2-u^2}$$
$$=-\frac{1}{2aK}\ln\left|\frac{K+u}{K-u}\right|+C$$

الدوال الأصليّة للدوال الأساسيّة

$\int udv=uv-\int vdu$ (1

$r\neq -1$ ، $\int u^r du=\frac{1}{r+1}u^{r-1}+C$ (2

$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$ (3

(4 $\int e^u du=e^u+C$

(5 $\int a^u du=\frac{1}{\ln a}a^u+C$

(6 $\int \sin u du=-\cos u+C$

(7 $\int \cos u du=\sin u+C$

(8 $\int\frac{1}{\cos^2 u}du=\tan u+C$

(9 $\int\frac{1}{\sin^2 u}du=-\cot u+C$

(10 $\int\frac{1}{\cos u}\tan u du=\frac{1}{\cos u}+C$

(11 $\int\frac{1}{\sin u}\cot u du=-\frac{1}{\sin u}+C$

(12 $\int \tan u du=\ln|\cos u|+C$

(13 $\int \cot u du=\ln|\sin u|+C$

(14 $\int\frac{1}{\cos u}du=\ln\left|\frac{1}{\cos u}+\tan u\right|+C$

(15 $\int\frac{1}{\sin u}du=\ln\left|\frac{1}{\sin u}-\cot u\right|+C$

(16 $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C$

$$(17\ \int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$$

$$(18\ \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$$

$$(19\ \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

الدوال الأصليّة للأشكال المثلّثيّة

$$(1\ \int \sin^2 u du = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$$

$$(2\ \int \cos^2 u du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$$

$$(3\ \int \tan^2 u du = \tan u - u + C$$

$$(4\ \int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$$

$$(5\ \int \sin^3 u du = -\frac{1}{3}\left(2+\sin^2 u\right)\cos u + C$$

$$(6\ \int \cos^3 u du = \frac{1}{3}\left(2+\cos^2 u\right)\sin u + C$$

$$(7\ \int \tan^3 u du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$$

$$(8\ \int \cot^3 u du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$$

$$(9\ \int \frac{du}{\cos^3 u} = \frac{1}{2}\frac{\tan u}{\cos u} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\cos u} + \tan u\right| + C$$

$$(10\ \int \frac{du}{\sin^3 u} = -\frac{1}{2}\frac{\cot u}{\sin u} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{\sin u} - \cot u\right| + C$$

$$(11\ \int \sin^n u du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u du$$

$$(12\ \int \cos^n u du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u du$$

$$(13\ \int \tan^n u du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$$

$$(14\ \int \cot^n u du - = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$$

$$(15\ \int \frac{du}{\cos^n u} = \frac{1}{n-1}\frac{\tan u}{\cos^{n-2} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^{n-2} u} du$$

$$(16\ \int \frac{du}{\sin^n u} = \frac{-1}{n-1}\frac{\cot u}{\sin^{n-2} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\sin^{n-2} u} du$$

$$(17\ \int \sin au \sin bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$(18\ \int \cos au \cos bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$(19\ \int \sin au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$$

$$(20\ \int u \sin u du = \sin u - u\cos u + C \int u \cos u du$$

$$= \cos u + u \sin u + C$$

$$(21\ \int u^n \sin u du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u du$$

$$(22\ \int u^n \cos u du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u du$$

الدوال الأصليّة للأشكال المثلّثيّة العكسيّة

$$(1\ \int \arcsin u du = u \arcsin u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$(2\ \int \arccos u du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$(3\ \int \arctan u du = u \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$$

$$(4\ \int u \arcsin u du = \frac{2u^2-1}{4}\arcsin u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$(5\ \int u \arccos u du = \frac{2u^2-1}{4}\arccos u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$$

$$(6\ \int u \arctan u du = \frac{u^2+1}{2}\arctan u - \frac{u}{2} + C$$

$n \neq -1$ ، $(7\ \int u^n \arcsin u du = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}\arcsin u - \int \frac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right)$

$n \neq -1$ ، $(8\ \int u^n \arccos u du = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}\arccos u + \int \frac{u^{n+1}du}{\sqrt{1-u^2}}\right)$

$n \neq -1$ ، $(9\ \int u^n \arctan u du = \frac{1}{n+1}\left(u^{n+1}\arctan u - \int \frac{u^{n+1}du}{1+u^2}\right)$

التّوابع الأصليّة للأشكال الأسّية و اللّوغرثميّة.

(1 $\int ue^{au}du=\frac{1}{a^2}(au-1)e^{au}+C$

(2 $\int u^n e^{au}du=\frac{1}{a}u^n e^{au}-\frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du+C$

(3 $\int e^{au}\sin bu du=\frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\sin bu-b\cos bu)+C$

(4 $\int e^{au}\cos bu du=\frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu+b\sin bu)+C$

(5 $\int \ln u du=u\ln u-u+C$

(6 $\int u^n \ln u du=\frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}((n+1)\ln u-1)+C$

(7 $\int \frac{1}{u\ln u}du=\ln|\ln u|+C$

الدوال الأصليّة لأشكال القطع الزّائديّة

(1 $\int \sinh u du=\cosh u+C$

(2 $\int \cosh u du=\sinh u+C$

(3 $\int \tanh u du=\ln(\cosh u)+C$

(4 $\int \coth u du=\ln|\sinh u|+C$

(5 $\int \frac{du}{\sinh u}=\ln\left|\tanh\frac{u}{2}\right|+C$

(6 $\int \frac{du}{\cosh u}=\arctan|\sinh u|+C$

(7 $\int \frac{du}{(\sinh)^2 u}=-\coth u+C$

(8 $\int \frac{du}{(\cosh)^2 u}=\tanh u+C$

(9 $\int \frac{1}{\cosh u}\tanh u du=-\frac{1}{\cosh u}+C$

(10 $\int \frac{1}{\sinh u}\coth u du=-\frac{1}{\sinh u}+C$

1.1 تمارين محلولة

تمرين 1:

1) أحسب التّكامل $\int \cosh x \sin 2x dx$.

2) تعميم: احسب التّكامل $\int \cosh ax \sin bx dx$ حيث $a, b \in IR^*$.

تمرين 2:

ليكن التّابعين الأصليّين التّاليّين $I_n = \int x^n \cos ax dx$ و $J_n = \int x^n \sin ax dx$ حيث $a \in IR^*$ و $n \in IN$.

1) أحسب I_0 ، J_0 ، I_1 ، J_1.

2) أوجد علاقة بين I_n و J_{n-1} ، J_n و I_{n-1} ، I_n و I_{n-2} ، J_n و J_{n-2}.

3) استنتج أنّ $I_n = P_n(x)\cos ax + Q_n(x)\sin ax + C \quad \ldots\ldots (1)$

$$J_n = R_n(x)\cos ax + S_n(x)\sin ax + C \quad \ldots\ldots (2)$$

حيث P_n ، Q_n ، R_n ، S_n كثيرات حدود ذات عوامل حقيقيّة و نعطي زوجيّته حسب قيمة $n \in IN$.

4) ماذا يمكن القول عن $\int P(x)\cos ax dx$ (على التّوالي $\int P(x)\sin ax dx$) إذا كان $P \in C[X]$ ؟

5) باستعمال طريقة السّؤالين الأوّل و الثّاني أوجد الشّكل العام للتّكاملين:

$K_n = \int x^n \cosh ax dx$ و $L_n = \int x^n \sinh ax dx$ حيث $a \in IR^*$ و $n \in IN$.

تمرين 3:

أحسب التّابع الأصلي $I = \int x^\alpha \ln x dx$، (حيث $x > 0$ و $\alpha \in IR$).

تمرين 4:

أحسب التّكاملات التّاليّة :

$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x(x-1)}}$ ، $J = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}}$ و $K = \int \sqrt{1+2x^2} dx$.

تمرين 5:

أحسب التّوابع الأصليّة التّالية:

$I_1 = \int \frac{dx}{(x+2)(x^2+2x+5)}$ ، $I_2 = \int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$ ، $I_3 = \int \frac{dx}{(1+x^3)^2}$ ، $I_4 = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^3}$ ، $I_5 = \int \frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x} dx$

تمرين 6:

ليكن التّكامل $I_n = \int \frac{dx}{(x^4+1)^n}$ حيث $n \in IN^*$.

1) أحسب I_1.

2) أوجد علاقة تراجع بين I_n و I_{n-1}.

تمرين 7:

أحسب التّوابع الأصليّة التّاليّة

$$I_1=\int \sin^2 x\cos^2 x dx \text{ ، } I_2=\int \sin^3 x\cos^4 x dx \text{ ، } I_3=\int \frac{dx}{1+2\cos x} \text{ ، } I_4=\int \frac{dx}{1+2\sin x} \text{ ، }$$

$$I_5=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx \text{ ، } I_6=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx \text{ ، } I_7=\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}.$$

تمرين 8:

أحسب التّوابع الأصليّة التّاليّة

$$I_1=\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}dx \text{ ، } I_2=\int \frac{4x^3-x+12}{x(x^2+4)}dx \text{ ، } I_3=\int \frac{4x+2}{x^2+x+1}dx \text{ ، } I_4=\int \frac{\ln x}{(x-1)^3}dx.$$

تمرين 9:

احسب التّكاملات التّاليّة

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\sin x} \text{ ، } I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x dx}{\sqrt{2}\cos x+2\sin^2 x} \text{ ، } I_3=\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+4}dx \text{ ، } I_4=\int_{-7}^{-3} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x-3}} \text{ ، }$$

$$I_5=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} \frac{x^3dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \text{ ، } I_6=\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \text{ ، } I_7=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x^2+1}} \text{ ، } I_8=\int_0^2 \sqrt{x^3(2-x)}.$$

تمرين 10 :

احسب $I=\int (x+1)\arctan\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}dx$.

1.2 حلّ التّمارين

تمرين 1:

1) نكامل بالتّجزئة مرّتين متتاليّتين

$$\int \cosh x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \cosh x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \sinh x dx$$

$$\int \cos 2x \sinh x dx = \frac{1}{2}\sin 2x \sinh x - \frac{1}{2}\int \sin 2x \cosh x dx$$

و منه
$$\int \cosh x \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x \cosh x + \frac{1}{4}\sin 2x \sinh x - \frac{1}{4}\int \sin 2x \cosh x dx$$

إذن
$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\int \cosh x \sin 2x dx = \frac{1}{4}\left(\sin 2x \sinh x - 2\cos 2x \cosh x\right)$$

و بالتّالي
$$\int \cosh x \sin 2x dx = \frac{1}{5}\left(\sin 2x \sinh x - 2\cos 2x \cosh x\right)$$

2) بالتّكامل بالتّجزئة مرّتين نجد

$$\int \cosh ax \sin bx dx = \frac{a\sin bx \sinh ax - b\cos bx \cosh ax}{a^2+b^2} \cdot$$

تمرين 2:

1) لدينا

$$I_0 = \int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

$$J_0 = \int \sin ax dx = \frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$I_1 = \int x\cos ax dx = \frac{x\sin ax}{a} - \frac{1}{a}\int \sin ax dx$$

إذن
$$I_1 = \frac{x\sin ax}{a} + \frac{1}{a^2}\cos ax + C$$

$$J_1 = \int x\sin ax dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{1}{a}\int \cos ax dx$$

إذن
$$J_1 = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{1}{a^2}\sin ax + C$$

2) نستعل دائما تكامل بالتّجزئة لنجد

- $I_n = \int x^n \cos ax dx = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} \sin ax dx$

$$I_n = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a} J_{n-1}$$

- $J_n = \int x^n \sin ax dx = -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1} \cos ax dx$

$$J_n = -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a} I_{n-1}$$

نستنتج من أجل $n \geq 2$:

$$I_n = \frac{x^n \sin ax}{a} - \frac{n}{a}\left(\frac{n-1}{a} I_{n-2} - \frac{x^{n-1} \cos ax}{a}\right)$$

$$I_n = \frac{x^n \sin ax}{a} + \frac{n x^{n-1} \cos ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$$

$$J_n = -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n}{a}\left(\frac{x^{n-1} \sin ax}{a} - \frac{n-1}{a} J_{n-2}\right)$$

$$J_n = -\frac{x^n \cos ax}{a} + \frac{n x^{n-1} \sin ax}{a^2} - \frac{n(n-1)}{a^2} J_{n-2}$$

3) العلاقتين (1) و (2) محقّقتين من أجل $n=0$ و $n=1$ حسب السّؤال الأوّل. لنفرض أنّ (1) و (2) محقّقتين من أجل $0 \leq n \leq p$ ، $p \in IN$:

$$I_{p+1} = \frac{x^{p+1} \sin ax}{a} + (p+1)\frac{x^{p-1} \cos ax}{a^2} - \frac{p(p-1)}{a^2} I_{n-1}$$

و بالتّالي (1) محقّقة من أجل $n = p+1$ بحيث

$$Q_{p+1} = \frac{x^{p+1}}{a} - \frac{p(p+1)}{a^2} Q_{p-1} \text{ و } P_{p+1}(x) = \frac{(p+1)x^p}{a^2} - \frac{p(p+1)}{a^2} P_{p-1}.$$

من جهة أخرى لدينا

$$J_{p+1} = -\frac{x^{p+1} \cos ax}{a} + (p+1)\frac{x^{p-1} \sin ax}{a^2} - \frac{p(p-1)}{a^2} J_{n-1}$$

أي (2) محقّقة من أجل $n = p+1$ بحيث

$$R_{p+1} = -\frac{x^{p+1}}{a} - \frac{p(p+1)}{a^2} R_{p-1} \text{ و } S_{p+1}(x) = \frac{(p+1)x^p}{a^2} - \frac{p(p+1)}{a^2} S_{p-1}.$$

من السّؤال الأوّل و العلاقات السّابقة نستنتج بسهولة من أجل أيّ $n \in IN$

$d^\circ(P_n)=n-1$ ، $d^\circ(Q_n)=n$ ، $d^\circ(R_n)=n-1$ ، $d^\circ(S_n)=n-1$ و أن P_n ، Q_n ، R_n ، S_n لهم زوجيّة درجاتهم أي:

- إذا كان n زوجي يكون P_n و S_n فرديّين

- إذا كان n فردي يكون Q_n و R_n زوجيّين.

4) ليكن $P(x)=\sum_{n=0}^{p}a_nx^n$ ، إذن

$$\int P(x)\cos axdx=\sum_{n=0}^{p}\alpha_nI_n \text{ و } \int P(x)\sin axdx=\sum_{n=0}^{p}\alpha_nJ_n .$$

نستنتج $\int P(x)\cos axdx=A(x)\cos ax+B(x)\sin ax+C$

$\int P(x)\sin axdx=E(x)\cos ax+D(x)\sin ax+C$

حيث A ، B ، E ، D كثيرات حدود من درجة أقّل أو تساوي من $d^\circ(P)$.

و نحسبهم باستعمال طريقة المقارنة بعد اشتقاق المعادلات السّابقة. يمكننا أيضا استعمال الطّريقة العامّة بالتّكامل بالتّجزئة الّتي استعملناها من قبل:

$$\int P(x)\cos axdx=\frac{1}{a}P(x)\sin ax-\frac{1}{a}\int P'(x)\sin axdx$$

و نعيد العمليّة على $\int P'(x)\sin axdx$، وهكذا حتّى نصل إلى I_0 أو J_0.

5) باستعمال تكامل بالتّجزئة نجد

$K_n=\frac{1}{a}x^n\sinh ax-\frac{n}{a}L_{n-1}$ و $L_n=\frac{1}{a}x^n\cosh ax-\frac{n}{a}K_{n-1}$ ،

و $K_0=\frac{1}{a}\sinh ax+C$ ، $L_0=\frac{1}{a}\cosh ax+C$.

<u>تمرين 3:</u>

بالتّكامل بالتّجزئة نحصل على تكامل لتابع القوى لـ x.

نلاحظ حالتين ($\alpha=-1$ و $\alpha\neq-1$).

<u>الحالة الأولى:</u> $\alpha=-1$ $I=\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2dx$

<u>الحالة الثّانية:</u> $\alpha\neq-1$

نكامل بالتّجزئة بأخذ $u=\ln x$ ، $dv=x^\alpha dx$ ، فنجد

$$\int x^{\alpha}\ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C$$

$$I = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}\left[(\alpha+1)\ln x - 1\right] + C \text{ .}$$

تمرين 4:

- حساب I.

نضع $x = \frac{1}{t}$ و بالتّالي $I = \int \frac{-dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

و بأخذ $u = 1-t$ ، نجد $I = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

- حساب J.

نضع $1 + x = \frac{1}{u}$ و بالتّالي $dx = -\frac{du}{u^2}$ و

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{-du}{u^2 \cdot \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + 2}} \\ &= -\int \frac{du}{\sqrt{1 - 2u + 2u^2}} \\ &= -\int \frac{du}{\sqrt{2\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

و منه $J = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}\right|$.

- حساب K.

نضع $x\sqrt{2} = \sinh u$ إذن $\cosh u du = \sqrt{2}dx$ و $1 + 2x^2 = \cosh^2 u$

و بالتّالي $K = \int \sqrt{1 + 2x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \cosh^2 u du$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int (\cosh 2u + 1)\, du \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\sinh 2u + \frac{1}{2\sqrt{2}}u + C \end{aligned}$$

و بالرّجوع إلى x، نجد

$$K=\int\sqrt{1+2x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{1+2x^2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arg\,sinh}\left(x\sqrt{2}\right)+C$$.

تمرين 5:

- حساب I_1.

لدينا $$\frac{1}{(x+2)(x^2+2x+5)}=\frac{1}{5(x+2)}-\frac{2}{5(x^2+2x+5)}$$

إذن

$$I_1=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{5}\int\frac{xdx}{(x+1)^2+4}$$

لنضع $x+1=2t$

$$\begin{aligned}\int\frac{xdx}{(x+1)^2 4}&=\int\frac{2(t-1)dt}{2(t^2+1)}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}\\&=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-\frac{1}{2}\arctan t+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{4}+1\right)-\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C\end{aligned}$$

و منه $$I_1=\frac{1}{5}\ln|x+2|-\frac{1}{10}\ln\left(x^2+2x+5\right)+\frac{1}{10}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$$

- حساب I_2.

لدينا $I_2=\int\frac{xdx}{x^2(1+x^2)^2}=\int\frac{dx}{x(1+x^2)^2}$ و نضع $t=x^2$، إذن $I_2=\int\frac{dt}{2t(1+t)^2}$.

و بالتّالي $$\frac{1}{t(1+t)^2}=\frac{1}{2t}-\frac{1}{2(1+t)}-\frac{1}{2(1+t)^2}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+\frac{1}{2(1+t)}+C=\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+C$$.

- حساب I_3.

ليكن التّكامل $\int\frac{dx}{1+x^3}$، و لنجري تكامل بالتّجزئة بأخذ $u=\frac{1}{1+x^3}$ ، و $dv=dx$ ، إذن

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{x}{1+x^3} + \int \frac{3x^3dx}{\left(1+x^3\right)^2} = \frac{x}{1+x^3} + 3\int \frac{dx}{1+x^3} - 3\int \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2}$$

و منه $\int \frac{dx}{\left(1+x^3\right)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{1+x^3} + \frac{x}{3\left(1+x^3\right)}$.

لنحسب $J_3 = \int \frac{dx}{1+x^3} = \int \frac{dx}{(1+x)\left(1-x+x^2\right)}$

$$\frac{1}{(1+x)\left(x^2-x+1\right)} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}$$

$$\int \frac{2-x}{3\left(x^2-x+1\right)}dx = \frac{2}{3\sqrt{3}}\int \frac{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t}{t^2+1}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan t - \frac{1}{6}\ln\left(t^2+1\right)$$

و منه $J_3 = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{6}\ln\left(x^2-x+1\right) + C$

نستنتج أنّ $I_3 = \frac{x}{3\left(1+x^3\right)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

- <u>حساب I_4</u>.

باستعمال التحويل $x = \tan t$ ، نتحصّل على

$$\int \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^3}dx = \int \frac{\tan^2 t\left(1+\tan^2 t\right)}{\left(1+\tan^2 t\right)^3}dt = \int \tan^2 t\cos^4 t\,dt$$

$$= \int \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t + C$$

و لكن $\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = 2\frac{2x}{1+x^2}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ و منه $I_4 = \frac{1}{8}\arctan x - \frac{1}{8}\frac{x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} + C$.

- <u>حساب I_5</u>.

نضع $u = \sqrt[4]{1+x^3}$ و منه $u^4 = 1+x^3$ و $4u^3du = 3x^2dx$ أي

و بالتّالي $4u^3du = 3\frac{x^3}{x}dx = 3\left(u^4-1\right)\frac{dx}{x}$

$$I_5 = \int u\frac{4u^3}{3\left(u^4-1\right)}du = \frac{4}{3}\int \frac{u^4du}{u^4-1} = \frac{4}{3}\int du + \frac{4}{3}\int \frac{du}{u^4-1}.$$

إنّ الكسر النّاطق يقبل التّفكيك إلى عناصر بسيطة على الشّكل التّالي

$\frac{1}{u^4-1}=\frac{a}{u-1}+\frac{b}{u+1}+\frac{cx+d}{u^2+1}$ لنتحصّل على $a=\frac{1}{4}$ ، $b=-a=-\frac{1}{4}$ ، $c=0$ و $d=-\frac{1}{2}$. ومنه

$I_5=\frac{4}{3}u+\frac{1}{3}\ln|u-1|-\frac{1}{3}\ln|u+1|-\frac{2}{3}\arctan u+C$ و في النّهاية

$$I_5=\frac{4}{3}\sqrt[4]{1+x^3}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right|-\frac{2}{3}\arctan\sqrt[4]{1+x^3}+C.$$

تمرين 6:

1) حساب I_1.

لدينا $\frac{1}{x^4+1}=g(x)+g(-x)$ حيث $g(x)=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}$.

إذن ، إذا كان x حلّا لـ $x^2+x\sqrt{2}+1=0$ ، فإنّ

$$Ax+B=\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}=-\frac{1}{2x\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{2}\right)$$

نستنتج ($x\notin IR$ و $A,B\in IR$)، $A=\frac{1}{2\sqrt{2}},B=\frac{1}{2}$.

إذن
$$g(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

نكتب $x^2+x\sqrt{2}+1=\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ و منه

$$\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right)$$

$$G(x)=\int g(x)dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right)$$

$I_1=\int\frac{dx}{x^4+1}=G(x)-G(-x)$ و بالتّالي

$$I_1=\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan\left(x\sqrt{2}+1\right)-\arctan\left(1-x\sqrt{2}\right)\right)$$

2) علاقة التّراجع بين I_n و I_{n+1}.

$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^4+1\right)^n}$ ، بعد استعمال تكامل بالتّجزئة نجد

$$I_n = \frac{x}{\left(x^4+1\right)^n} + \int \frac{4nx^4\,dx}{\left(x^4+1\right)^{n+1}}$$

إذن $I_n = \frac{x}{\left(x^4+1\right)^n} + 4n\left(I_n - I_{n+1}\right)$ و بالتّالي

$$I_{n+1} = \frac{1}{4n}\left[\frac{x}{\left(x^4+1\right)^n} + (4n-1)I_n\right].$$

تمرين 7:

- حساب I_1.

لدينا $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x$ و منه

$$I_1 = \frac{1}{4}\int(\sin 2x)^2\,dx = \frac{1}{8}\int(1-\cos x)dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

- حساب I_2.

لدينا قوّة ال sin فرديّة ، إذن لنأخذ $\cos x = u$ و منه

$$I_2 = \int\left(u^2-1\right)u^4\,du = \frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{(\cos x)^7}{7} - \frac{(\cos x)^5}{5} + C.$$

- حساب I_3.

نضع $\tan\frac{x}{2} = t$ و منه

$$I_3 = \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int\frac{2dt}{3-t^2} = \int\frac{2dt}{\left(\sqrt{3}-t\right)\left(\sqrt{3}+t\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\int\frac{dt}{\sqrt{3}-t} + \int\frac{dt}{\sqrt{3}+t}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t} + C$$

و في النّهاية $I_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}} + C$.

- حساب I_4.

نضع $\tan\frac{x}{2} = t$ و منه

$$I_4=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$I_4=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C \ .$$

- <u>حساب</u> I_5 <u>و</u> I_6.

لنحسب I_5+I_6 و I_5-I_6.

$I_5+I_6=\int dx=x+C_1$ و $I_5-I_6=\int\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ إذن بوضع $u=\sin x+\cos x$ نجد

$$I_5-I_6=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C_2=\ln|\sin x+\cos x|+C_2 \ .$$

و منه $I_5=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$

و $I_6=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$.

- حساب I_7.

لدينا

$$I_7=\int\frac{\sin x\cos xdx}{\cos^2 x\sin^4 x}=\int\frac{\frac{1}{2}\sin 2xdx}{\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2}$$

لنضع $u=\cos 2x$ ، إذن

$$I_7=\int\frac{-\frac{1}{2}du}{\frac{1}{4}(1+u)(1-u)^2}=-2\int\frac{du}{(1+u)(1-u)^2}$$

لنفكّك الكسر إلى عناصر بسيطة

$\frac{1}{(1+u)(1-u)^2}=\frac{a}{1+u}+\frac{b}{1-u}+\frac{c}{(1-u)^2}$ فنجد $a=\frac{1}{4}$ ، $b=\frac{1}{4}$ و $c=\frac{1}{2}$. و بالتّالي

$$I_7=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{1-u}-\int\frac{du}{(1-u)^2}$$

$$I_7=\ln\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}}-\frac{1}{1-u}+C=\ln\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sqrt{1+\cos 2x}}-\frac{1}{1-\cos 2x}+C \ .$$

<u>تمرين 8:</u>

- <u>حساب</u> I_1.

لنفكّك إلى عناصر بسيطة الكسر النّاطق $\frac{x^3+1}{x(x+1)^2}$.

$$\frac{x^3+1}{x(x+1)^2}=1+\frac{2x^2-x+1}{x(x-1)^2}=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(c-1)^2}$$

باستعمال المقارنة نجد $A=B=1$ و $C=2$، و منه

$$I_1=\int\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$I_1=x+\ln|x(x-1)|-\frac{2}{x-1}+C.$$

- حساب I_2.

لدينا $\frac{4x^3-x+12}{x(x^2+4)}=4+\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$ نجد $A=3$، $B=-3$، $c=-17$.

و منه $I_2=\int\left(4+\frac{3}{x}-\frac{3x}{x^2+4}-\frac{17}{x^2+4}\right)dx$، إذن

$$I_2=4x+3\ln|x|-\frac{3}{2}\ln(x^2+4)-\frac{17}{2}\arctan\frac{x}{2}+C.$$

- حساب I_3.

لدينا $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$، لنضع $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$

$$I_3=\int\frac{2t\sqrt{3}-2}{\frac{3}{4}(t^2+1)}\frac{3}{2}dt=4\int\frac{tdt}{t^2+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$I_3=2\ln(x^2+x+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

- حساب I_4.

لنضع $u=\ln x$ و $dv=\frac{1}{(x-1)^3}dx$ إذن $du=\frac{1}{x}dx$ و $v=\frac{-1}{2(x-1)^2}$

و بالتّالي $$I_4=\frac{-1}{2(x-1)^2}\ln x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(x-1)^2}$$

و لكن $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$ حيث $A=1$، $B=-1$، $C=1$

إذن $I_4=\frac{-1}{2x(x-1)^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{2(x-1)}+C$.

تمرين 9:

- حساب I_1.

نضع $t=\tan\frac{x}{2}$، و منه

$$I_1=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}}.\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+t+1}=\int_0^1\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

و بالتّالي $I_1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

- حساب I_2.

نضع $t=\cos x$، إذن $I_2=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{dt}{t\left[\sqrt{2}t+2-2t^2\right]}$.

لدينا $\frac{1}{t\left[\sqrt{2}t+2-2t^2\right]}=\frac{1}{2t}-\frac{1}{6\left(t-\sqrt{2}\right)}-\frac{2}{3\left(2t+\sqrt{2}\right)}$ و منه

$$I_2=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{dt}{t}+\frac{1}{6}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{-dt}{\left(\sqrt{2}-t\right)}-\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{2dt}{\left(2t+\sqrt{2}\right)}$$

$$I_2=\frac{1}{2}\left[\ln t\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}+\frac{1}{6}\left[\ln\left(\sqrt{2}-t\right)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-\frac{2}{6}\left[\ln\left(2t+\sqrt{2}\right)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$I_2=\frac{1}{6}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{2}{6}\ln\left(2+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}-\frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{6}\ln 2\sqrt{2}$.

- حساب I_3.

لدينا $I_3=\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}\,dx=\int_1^2 x\sqrt{(x-1)^2+4}\,dx$

نضع $x-1=\sinh t$ فنجد

$$I_3=\int_0^a(1+2\sinh t).2\cosh t.2\cosh t.dt$$

$$=\int_0^a 4\cosh^2 t.dt+8\int_0^a \sinh t.\cosh^2 t.dt$$

حيث $a=\arg\sinh\frac{1}{2}$ و منه نستنتج

$$I_3=2\left[t+\frac{\sinh 2t}{2}\right]_0^a+\frac{8}{3}\left[\cosh^3 t\right]_0^a=2a+\sinh 2a+\frac{8}{3}\cosh^3 a-\frac{8}{3}$$

- <u>حساب</u> I_4.

لدينا $I_4=\int_{-7}^{-3}\frac{(x-1)}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$، نضع $x+1=-2\cosh t$ حيث $t\in IR_+$.

إذن $$I_4=\int_a^0\frac{-2-2\cosh t}{2\sinh t}(-2\sinh t)dt=-\int_0^a(2+2\cosh t)dt$$

حيث $a=\arg\cosh 3$، و منه

$$I_4=-(2a+2\sinh a)=-\left(2\arg\cosh 3+4\sqrt{2}\right).$$

- <u>حساب</u> I_5.

لدينا $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\frac{x^3dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\frac{x^3dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ نضع $x-1=\frac{3}{2}\sin t$ حيث $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، فنجد

$$I_5=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+3\sin t)^3.\frac{\frac{3}{2}\cos t.dt}{\frac{3}{2}\cos t}=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+3\sin t)^3dt$$ ، و منه

$$I_5=\frac{1}{8}\left[t-9\cos t+\frac{27}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)-27\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

أي $$I_5=\frac{1}{8}\left(\frac{29}{12}\pi-18\sqrt{3}+27\right).$$

- <u>حساب</u> I_6.

نضع $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ و منه $x=\frac{1-t^2}{1+t}$ و $dx=-\frac{4t}{\left(1+t^2\right)^2}dt$.

إذن $I_6=-\int_1^0 \frac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt=4\left(\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}\right)$

لدينا $\int_0^1 \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\int_0^1 \frac{1+t^2-t^2dt}{\left(1+t^2\right)^2}=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t.2tdt}{\left(1+t^2\right)^2}$

$$=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan t\Big|_0^1+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$$

و منه $I_6=4\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{2}+1$.

- <u>حساب</u> I_7 .

لدينا $I_7=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{4x^2+1}}=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x^2-1}dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x^2+1}dx$$

لنحسب $J_1=\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x^2+1}dx$ ، لنضع $x=\frac{1}{2}\sinh t$ ، و بالتّالي $J_1=\frac{1}{2}\int_a^b \cosh^2 t.dt$ حيث $a=\arg\sinh 1$ و $a=\arg\sinh 2$

و منه .

$$J_1=\frac{1}{4}\int_a^b (1+\cosh 2t)dt=\frac{1}{4}\left[t+\frac{\sinh 2t}{2}\right]_a^b .$$

لنحسب هذه المرّة $J_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x^2-1}dx$ ، لنضع $x=\frac{1}{2}\cosh t$ ، $t\in IR_+$ و بالتّالي $J_2=\frac{1}{2}\int^c \sinh^2 t.dt$ حيث

$c=\arg\cosh 2$. و منه

$$J_2=\frac{1}{4}\int_a^b (\cosh 2t-1)dt=\frac{1}{4}\left[\frac{\sinh 2t}{2}-t\right]_0^c$$

و بالتّالي $I_7=\frac{1}{2}\left(J_2-J_1\right)$.

- <u>حساب</u> I_8 .

لدينا $I_8=\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

نضع إذن $x-1=\cos t$ حيث $t\in[0,\pi]$ ، فنجد

$$I_8=-\int_\pi^0(1+\cos t)\sin^2 t.dt=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2t}{2}dt+\int_0^\pi\sin^2 t.\cos t dt$$

$$I_8=\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^\pi+\left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^\pi=\frac{\pi}{2}$$.

تمرين 10:

لنضع $u=\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}$ أي $x=\frac{u^2-3}{1-u^2}$ ، $u\in IR_+\setminus\{1\}$ إذن $dx=-\frac{4u}{(u^2-1)^2}du$ و $x+1=\frac{2}{u^2-1}$ و بالتّالي

$$I=-8\int\frac{4\arctan u}{(u^2-1)}du$$

لنكامل بالتّجزئة ، بملاحظة ، أنّ $-\frac{4u}{(u^2-1)^3}=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{(u^2-1)^2}\right)$

$$I=2\frac{\arctan u}{(u^2-1)^2}-2\int\frac{du}{(u^2-1)^2(u^2+1)}$$.

لنفكّك إلى عناصر بسيطة الكسر الذي نريد أن نكامله.

$\frac{1}{(u^2-1)^2(u^2+1)}=\frac{A}{u^2-1}+\frac{B}{(u^2-1)^2}+\frac{C}{u^2+1}$ ، نجد $C=\frac{1}{4}$ ، $A=-\frac{1}{4}$ ، $B=\frac{1}{2}$ ، و منه

$$I=4\frac{\arctan u}{(u^2-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-1}-\int\frac{du}{(u^2-1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}$$

و بما أنّ $2\int\frac{du}{(u^2-1)^2}=-\int\frac{du}{u^2-1}-\frac{u}{u^2-1}$ فإن

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-1}-\int\frac{du}{(u^2-1)^2}=\int\frac{du}{u^2-1}+\frac{u}{2(u^2-1)}$$

$$I=4\frac{\arctan u}{(u^2-1)^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+\frac{u}{2(u^2-1)}-\frac{1}{2}\arctan u+C$$

و بالعودة إلى x، نجد

$$I=\int (x+1)\arctan\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}dx==\frac{x(x+2)}{2}\arctan\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}-1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}+1}\right|+\frac{(x+1)}{4}\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}+C$$

تمارين للحلّ

تمرين 1:

أحسب التّكاملات

$\int\frac{1}{x-a}dx$ ، $\int\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^5}dx$ ، $\int\frac{1+tg^2x}{\sqrt{1-tg^2x}}dx$ ، $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$

$\int\left[1+tg^2\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)\right]dx$ ، $\int sh(chx).shxdx$.

تمرين 2

أحسب $\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$ ، $\int\sqrt{x^2-x+1}dx$ ، $\int\sqrt{-2x^2+3x+2}dx$ ، $\int x\sqrt{-2x^2+3x+2}dx$ ،

$\int\frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+2}}dx$

تمرين 3

احسب $\int\frac{dx}{2+\sin x}$ ، $\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx$ ، $\int\sin^5 xdx$.

تمرين 4

أحسب $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$ ، $\int\frac{\log t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}dt$

تمرين 5

$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ، نضع $t=tg\frac{\theta}{2}$ ، أوجد علاقات بين $\cos\theta,\sin\theta,tg\theta$ و t .

احسب قيمة التّكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{4+5\sin\theta}$

تمرين 6

استعمل تبديل أوّل $x=\sin\theta$ ، ثمّ تبديل ثاني $y=tg\frac{\theta}{2}$ لحساب التّكامل

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{4\left(1-x^2\right)+(5-3x)\sqrt{1-x^2}}$$

تمرين 7

أكتب العبارة $\frac{x^2}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$ على الشّكل $\frac{\beta x+\gamma}{\left(x^2+4x+5\right)^2}+\frac{\alpha}{x^2+4x+5}$.

احسب $\int \frac{x^2}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$

تمرين 8

أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$

2 المتتاليات العددية :

تمرين :

لنعتبر المتتاليّة التّراجعيّة التّاليّة: $\forall n\in IN, u_{n+1}=\frac{u_n}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$ و $u_0=1$

1) برهن بالتّراجع أنّ : $\forall n\in IN\ ,\ u_n>0$.

2) برهن أنّ (u_n) متناقصة تماما.

3) برهن أنّ: $\forall n\in IN\ ,\ u_n\leq\frac{1}{2^n}$.

4) استنتج نهاية المتتاليّة (u_n) .

الحل :

لتكن المتتاليّة التّراجعيّة التّاليّة: $\forall n\in IN, u_{n+1}=\frac{u_n}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$ و $u_0=1$

1) لنبيّن أنّه $\forall n\in IN, u_n>0$.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1>0$ ومنه الخاصّية محقّقة.

لنفرض أنّ الخاصّية محقّقة حتّى الرّتبة n أي $u_n>0$ ، ولنبيّن صحّتها من أجل الرّتبة $(n+1)$.

بالفعل : $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+\sqrt{1+u_n^2}}=u_n\frac{1}{1+\sqrt{1+u_n^2}}\overset{(u_n>0)}{>}0$. وبالتّالي $\forall n\in IN, u_n>0$.

2) لنبيّن أنّ المتتاليّة (u_n) متناقصة تماما.

لدينا $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\sqrt{1+u_n^2}}$ وبما أنّ $1+\sqrt{1+u_n^2}>2$ فإنّ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1+\sqrt{1+u_n^2}}<\frac{1}{2}<1$

أي أنّ المتتاليّة (u_n) متناقصة تماما.

3) لنبرهن بالتّراجع أنّ : $\forall n \in IN, u_n \le \frac{1}{2^n}$.

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 \le 1 = \frac{1}{2^0}$ إذن الخاصّية محقّقة.

لنفرض أنّ الخاصّية محقّقة حتّى الرّتبة n أي $u_n \le \frac{1}{2^n}$ ، ولنبيّن صحّتها من أجل الرّتبة $(n+1)$.

بالفعل : $$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+\sqrt{1+u_n^2}} = u_n \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+u_n^2}} \le \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

(لأنّ $\frac{1}{1+\sqrt{1+u_n^2}} < \frac{1}{2}$ و $u_n \le \frac{1}{2^n}$ (فرض التّراجع)). إذن . $\forall n \in IN, u_n \le \frac{1}{2^n}$

4) المتتاليّة (u_n) متناقصة و محدودة من الأدنى بـ 0 فهي متقاربة، إذن نهايتها موجودة . بما أن $0 < u_n \le \frac{1}{2^n}$ فإنّ $0 < \lim\limits_{n\to 0} u_n \le \lim\limits_{n\to 0} \frac{1}{2^n} = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to 0} u_n = 0$.

تمرين:

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليّتين معرّفتين كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \ \forall n \ge 1 \end{cases}$$ و

$$\begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}, \ \forall n \ge 1 \end{cases}$$

1) نضع $\forall n \ge 1, w_n = v_n - u_n$

a) أدرس إشارة المتتاليّة $(w_n)_n$.

b) أدرس رتابة المتتاليّة $(w_n)_n$.

c) استنتج تقارب المتتاليّة $(w_n)_n$.

2) برهن أنّ المتتاليّتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متجاورتان.

3) نضع : $\forall n \ge 1, t_n = 3u_n + 8v_n$.

a) برهن أنّ $(t_n)_n$ متتاليّة ثابتة .

b) استنتج نهايتي $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$.

الحل:

لتكن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متتاليّتين معرّفتين كما يلي:

$$\begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \ , \ \forall n \geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ , \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1) نضع $\forall n \geq 1 \ , w_n = v_n - u_n$

(a) إشارة (w_n): لدينا

$$w_{n+1} = (v_{n+1} - u_{n+1}) = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{1}{12}(v_n - u_n) = \frac{1}{12} w_n$$

وبكتابة هذه العلاقة من أجل $n \in IN^*$

$$w_n = \frac{1}{12} w_{n-1}$$

$$w_{n-1} = \frac{1}{12} w_{n-2}$$

……………

$$w_3 = \frac{1}{12} w_2$$

$$w_2 = \frac{1}{12} w_1 = \frac{1}{12}(12 - 1) = \frac{11}{12}$$

و بالضرب طرف إلى طرف هذه المعادلات نجد: $w_n = \dfrac{11}{(12)^{n-1}} > 0$

(b) رتابة (w_n). لدينا

$$w_{n+1} - w_n = \frac{11}{(12)^n} - \frac{11}{(12)^{n-1}} = \frac{11}{(12)^{n-1}}\left(\frac{11}{12} - 1\right) = -\frac{11}{(12)^n} < 0$$

وبالتّالي (w_n) متناقصة.

(c) المتتاليّة (w_n) محدودة من الأدنى بـ 0 ومتناقصة فهي متقاربة.

• 2) لدينا $v_n - u_n = w_n = \dfrac{11}{(12)^n}$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{11}{(12)^n} = 0$

من جهة أخرى

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2v_n - 2u_n}{3} = \frac{2}{3} w_n > 0$$

و $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{-v_n + u_n}{4} = -\frac{1}{4} w_n < 0$$

أي المتتاليّة (u_n) متزايدة و المتتاليّة (v_n).

وبالتّالي المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان. فهي إذن متقاربتان.

3) نضع : $\forall n \geq 1 \,,\, t_n = 3u_n + 8v_n$.

(a) لدينا

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4}$$
$$= u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) = 3u_n + 8v_n = t_n$$

وبكتابة هذه العلاقة من أجل $n \in IN^*$

$$t_n = t_{n-1}$$

$$t_{n-1} = t_{n-2}$$

…………….

$$t_3 = t_2$$

$$t_2 = t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 3 + 96 = 99$$

و بالضرب طرف إلى طرف هذه المعادلات نجد: $t_n = 99$ ، $\forall n \in IN^*$.

(b) إذن $\forall n \geq 1 \,,\, t_n = 3u_n + 8v_n$

$$v_n = \frac{t_n - 3u_n}{8} = \frac{99 - 3u_n}{8} \text{ و } u_n = \frac{t_n - 8v_n}{3} = \frac{99 - 8v_n}{3}$$

من جهة أخرى

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{u_n + 2\dfrac{99 - 3u_n}{8}}{3} = \frac{u_n + 99}{12}$$

أي $12u_{n+1} = 99 + u_n$. وبما أنّ المتتاليّة (u_n) فإنّ نهايتها l تحقّق $12l = 99 + l$ ومنه $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l = \dfrac{99}{11} = 9$.

وبما أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان فإنّ : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 9$.

المتتاليات العددية

المتتاليات العددية

أسئلة متعددة الاختيار (Q C M)

تمرين 1:

لكل سؤال، يوجد بالضبط جوابان صحيحان، أذكرهما. التبرير غير مطلوب.

1) المتتاليات التالية متقاربة:

أ) $\left(\dfrac{2^n}{n^{2022}}\right)_{n>0}$ ؛ ب) $\left(\dfrac{2n+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ ؛ ج) $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n>0}$ ؛ د) $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2) نعتبر المتتاليات $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ التي تحقق، من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq v_n \leq w_n$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$ فإن:

أ) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ؛ ب) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأسفل

ج) من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq v_n \leq 1$ ؛ د) لا نعرف إن كان للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نهاية أم لا.

3) متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1\,,\ (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

أ) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و تتقارب الى 1، فاصلة نقطة تقاطع المستقيمين ذات معادلتين $y = x$ و $y = 2x-1$

ب) المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n - 1$، هي متتالية هندسية.

ج) المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ محدودة من الأعلى

د) المتتالية $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = \ln(u_n - 1)$، هي متتالية حسابية.

4) متتاليتان (x_n) و (y_n) معرفتان من أجل $n > 0$ بالعلاقتين:

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots\dots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots\dots + \frac{1}{2n}$$

أ) المتتاليتان (x_n) و (y_n) متزايدتان

ب) $x_3 = \dfrac{19}{20}$ و $y_3 = \dfrac{37}{60}$.

ج) المتتاليتان (x_n) و (y_n) ليستا محدودتان من الأعلى.

د) المتتاليتان (x_n) و (y_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية.

المتتاليات الحسابية :

تمرين 1: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2n+3$

1) أحسب u_0, u_1, u_2. ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 2021$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_9 + u_{10} + \dots\dots + u_{22}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$ بدلالة n.

تمرين 2: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 5n-4$

1) أحسب u_0, u_1, u_2. ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 2023$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_5 + u_6 + \dots\dots + u_{33}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$ بدلالة n.

تمرين 3: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \dfrac{1}{2}n + \dfrac{2}{3}$

1) أحسب u_0,u_1,u_2. ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 200$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_{10} + u_{11} + ... + u_{28}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 4: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -3n + 2$

1) أحسب u_0,u_1,u_2. ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > -444$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_{41} + u_{42} + ... + u_{88}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 5: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -2n + 5$

1) أحسب u_0,u_1,u_2. ما هي طبيعة المتتالية (u_n) ؟

2) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < -500$

3) أحسب المجموع S حيث: $S = u_{11} + u_{12} + ... + u_{55}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 6: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 2$ و أساسها $r = 2$.

1) أحسب u_{88} ثم u_n بدلالة n.

2) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < 1988$.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

4) عين n علما أن $S_n = 1230$.

تمرين 7: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $r = -2$.

1) أحسب u_{22} ثم u_n بدلالة n.

2) عين أكبر حد أصغر تماما من -188.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

4) عين n علما أن $S_n = -130$.

تمرين 8: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ و أساسها $r = -5$.

1) أحسب u_{10} ثم u_n بدلالة n.

2) عين أكبر حد أصغر تماما من -675.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

4) عين n علما أن $S_n = -336$.

تمرين 9: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها $r = -3$ وتحقق $u_{10} = 35$

1) أحسب u_1 و u_{30} ثم u_n بدلالة n.

2) عين أصغر حد أصغر تماما من -666

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 10: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها $r = 4$ وتحقق $u_{10} = 3$

1) أحسب u_1 وu_{30} ثم u_n بدلالة n.

2) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 2002$

3) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 11: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r وتحقق $u_2 = 11$ و $u_6 = 31$.

1) عين الأساس r ثم أحسب u_0, u_{20} و u_5.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 9993$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 12: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r وتحقق $u_8 = -45$ و $u_{15} = -94$.

1) عين الأساس r ثم أحسب u_0, u_7 و u_{11}.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > -2009$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+1}$ بدلالة n.

تمرين 13: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r وتحقق $u_{10} = -39$ و $u_2 = -7$.

1) عين الأساس r ثم أحسب u_{10}, u_7 و u_{11}.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < -2013$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+11}$ بدلالة n.

تمرين 14: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r وتحقق $u_2 = 25$ و $u_{10} = 67$.

1) عين الأساس r ثم أحسبالحد الأول u_0.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < -2222$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+11}$ بدلالة n.

5) عين n علما أن $S_n = 1400$

تمرين 15: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r وتحقق $u_2 = 25$ و $u_{10} = 67$.

1) عين الأساس r ثم أحسبالحد الأول u_0.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < -2222$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+11}$ بدلالة n.

5) عين n علما أن $S_n = 1400$

تمرين 16: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 وتحقق: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1+u_2+.....+u_n=4n^2+5n$$

1) عين u_1, u_2, u_{10} ثم عين u_n بدلالة n.

2) ما هي طبيعة المتتالية (u_n)؟

تمرين 17: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 وتحقق: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1+u_2+.....+u_n=7n^2-2n$$

1) عين u_1, u_2, u_{10} ثم عين u_n بدلالة n.

2) ما هي طبيعة المتتالية (u_n)؟

تمرين 18: c, b, a ثلاثة أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.

1) أثبت أن الأعداد الحقيقية $c^2-ab,\ b^2-ac,\ a^2-bc$ هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.

2) أثبت أن الأعداد الحقيقية $b^2+bc+c^2\ ,\ c^2+ac+a^2\ ,\ a^2+ab+b^2$ هي حدود متتابعة من متتالية حسابية.

تمرين 19: إذا كانت الأعداد: $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$ تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية فأثبت أن: c^2, b^2, a^2 تشكل أيضا حدود متعاقبة من متتالية حسابية.

تمرين 20: a عدد حقيقي.

بين أن الأعداد الحقيقية $\left(a^2-2a-1\right)^2, \left(a2+1\right)^2, \left(a^2+2a+1\right)^2$ حدود متتابعة من متتالية حسابية.

تمرين 21: a عدد حقيقي غير معدوم و لا يساوي $\frac{1}{2}$

بين أن الأعداد الحقيقية $\frac{2a^2-2a+1}{2a^2-2a}, \frac{2a}{2a-1}, \frac{a+1}{a}$ حدود متتابعة من متتالية حسابية.

تمرين 22: c, b, a ثلاثة أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية ، عينها علما أن:

$$\begin{cases}a+b+c=21\\ a\times b\times c=-105\end{cases}......(1)\ ,\ \begin{cases}a+b+c=93\\ a\times b\times c=3720\end{cases}......(2)\ ,\ \begin{cases}a+b+c=15\\ a\times b\times c=80\end{cases}......(3).$$

$$\begin{cases}a+b+c=333\\ a^2+b^2+c^2=37205\end{cases}.....(6)\ \begin{cases}a+b+c=336\\ a\times b\times c=1391376\end{cases}......(4)\ ,\ \begin{cases}a+b+c=963\\ a\times b\times c=3306405\end{cases}....(5),$$

$$\begin{cases}a+b+c=15\\ a+2b+3c=34\end{cases}......(9)\ \begin{cases}a+b+c=9\\ a^2+b^2+c^2=35\end{cases}...(7),\ \begin{cases}a+b+c=312\\ c-a=192\end{cases}....(8),$$

$$\begin{cases}a+b+c=6\\ a-5b+6c=-11\end{cases}......(10),$$

تمرين 23: عين d, c, b, a أربع أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية تحقق: $\begin{cases}a+b=30\\ c\times d=45\end{cases}$

تمرين 24: عين d, c, b, a أربع أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية حسابية تحقق: $\begin{cases}a+b=30\\ c\times d=35\end{cases}$

تمرين 25: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=24\\ u_4+u_5+u_6=69\end{cases}$

1) عين u_2 و u_5 و استنتج الأساس r و الحد الأول u_1.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < 566$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

5) عين n علما أن: $S_n = 497$

تمرين 26: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماأساسها r و الحدها الأول u_1. تحقق:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 165 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 6655 \end{cases}$$

1) عين u_3 والأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة و استنتج u_1.

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 5661$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

5) عين n علما أن: $S_n = 497$

تمرين 27: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماأساسها r و الحدها الأول u_1. تحقق:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 45 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 1045 \end{cases}$$

1) عين u_3 والأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة و استنتج u_1.

3) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 2222$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

5) عين n علما أن: $S_n = 497$

تمرين 28: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماأساسها r و الحدها الأول u_1. تحقق:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = -25 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 285 \end{cases}$$

1) عين u_3 والأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة و استنتج u_1.

3) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < 566$

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

5) عين n علما أن: $S_n = 497$

تمرين 29: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماأساسها r و الحدها الأول u_1. تحقق:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 12 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 116 \end{cases}$$

1) عين u_1 والأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أكبر حد أصغر تماما من 666

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 30: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماأساسها r و الحدها الأول u_1.تحقق:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -2 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 46 \end{cases}$$

1) عين u_1 والأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) عين أكبر حد أصغر تماما من 2009

4) أحسب المجموع S_n حيث:: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 31: (u_n) متتالية حسابية حيث: $u_0 + u_3 = 18$ و $u_1 + u_5 = 34$

1) أوجد الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية .

2) أكتب الحد العام u_n بدلالة n.

3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

4) أوجد العدد الطبيعي n بحيث: $s_n=78$

تمرين 32: (u_n) متتالية حسابية حيث : $u_3 + u_5 = 26$ و $u_7 - u_4 = 12$.

1) عين الحد الأول u_0 والأساس r لهذه المتتالية .

2) بفرض $u_0 = -3$ و $r = 4$

3) -أكتب عبارة الحد العام u_n لهذه المتتالية بدلالة n.

4) - عين الحد ذو الرتبة 201 من هذه المتتالية .

5) - هل العددان 2009 و2011 حدان من هذه المتتالية ؟

6) - أحسب مجموع المئة حدا الأولى من حدودها .

تمرين 33:

لتكن المتتالية الحسابية للأعداد :...,-4,-7,-10- نريد حساب 25 حدا من حدودها ليكون مجموعها 1400 . ما هي رتبة الحد الذي نبدأ به ؟ و ما قيمته؟.

طريق مستقيم طوله 166 ميلا .بدأ شخصان الحركة معا من نهايتيه فإذا قطع أحدهما في اليوم الأول مسافة10 أميال ثم قطع في كل يوم من الأيام التالية مسافة تزيد ميلا واحد عن مسافة اليوم السابق . أما الأخر فقطع في اليوم الأول مسافة 9أميال ثم قطع في كل يوم من الأيام التالية مسافة تنقص نصف ميل عن مسافة اليوم السابق. أوجد بعد كم يوم يتقبلان.

أ) رسم الدخول إلى معرض في يومه الأول $45\ DA$ ثم ينقص بمقدار $1{,}5\ DA$ في كل يوم من الأيام التالية.

أوجد رسم الدخول في اليوم الخامس عشرا.

أراد رجلا أن يدخل المعرض يوميا في أسبوعه الثالث فأوجد ما يوفره إذا أشترى تذكرة أسبوعية بمبلغ $100\ DA$

تمرين 34: متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 18 \\ u_2 + 2u_3 = 28 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r.
2) أحسب u_n بدلالة n ثم استنتج u_1
3) عين أصغر حد أكبر تماما من 994
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين35: (u_n) متتالية حسابية الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=9 \\ u_3-u_4=2 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r ثم أحسب u_1
2) أحسب u_n بدلالة n
3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < -504$
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n
5) عين n علما أن: $S_n=-280$

تمرين36: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=69 \\ u_1+3u_3=106 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r ثم أحسب u_1
2) أحسب u_n بدلالة n
3) عين أكبر حد أصغر تماما من 5999
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين37: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=12 \\ u_1^2-u_0=15 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r ثم أحسب u_0
2) أحسب u_n بدلالة n
3) عين أكبر حد أصغر تماما من 5999.
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n ثم عين n علما أن: $S_n=176$

تمرين38: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها $r=-4$ تحقق: $3u_1-u_2+4u_3=50$

1) عين u_1
2) أحسب u_n بدلالة n
3) عين أكبر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > -7980$
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين39: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_2-u_4=4 \\ u_5+u_{10}=-24 \end{cases}$

1) عين u_0 و الأساس r
2) أحسب u_n بدلالة n.
3) عين n علما أن: $u_n=-2995$
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين40: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ u_3^2-4u_1=84 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r ثم أحسب u_1

2) أحسب u_n بدلالة n

3) أحسب u_{20} ثم المجموع S حيث $S=u_2+u_3+.....+u_{20}$

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 41: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدها الأول u_0 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=12 \\ u_0\times u_1\times u_2=-132 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r ثم أحسب u_0

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين أصغر حد أكبر تماما من 2491

4) أحسب المجموع S حيث $S=u_5+u_6+.....+u_{10}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 42: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=312 \\ u_2-u_0=192 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r ثم أحسب u_0

2) أحسب u_n بدلالة n

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n ثم عين n علما أن: $S_n=5368$

تمرين 43: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=9 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=35 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r ثم أحسب u_1

2) أحسب u_n بدلالة n و استنتج u_{10}

3) أحسب المجموع S حيث $S=u_2+u_3+.....+u_{10}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 44: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=15 \\ u_1+2u_2+3u_3=34 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r ثم أحسب u_1

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n>1998$

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 45: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=3 \\ u_0-2u_1+3u_2=\frac{14}{5} \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r ثم أحسب u_0

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n>2004$

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 46: (u_n) متتالية حسابية متناقصة تماما حدها الأول u_0 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=3 \\ u_3^2-u_2^2=8 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r ثم أحسب u_0

2) أحسب u_n بدلالة n

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 47: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=9 \\ 2u_1+u_3=7 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r

2) استنتج u_1 ثم أحسب u_n بدلالة n

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

4) عين n علما أن: $S_n=225$

تمرين 48: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_3-u_0=15 \\ 4u_1+3u_3=79 \end{cases}$

1) عين u_0 و الأساس r

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين أكبر حد أصغر تماما من 2000

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 49: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \\ u_4+u_5+u_6+u_7=74 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n>597$

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n ثم عين n علما أن: $S_n=185$

تمرين 50: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \\ u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=65 \end{cases}$

5) عين u_2 و الأساس r

6) استنتج u_1 ثم أحسب u_n بدلالة n

7) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

8) يحتوي كيس على 30 كرة متجانسة و مرقمة من 1 إلى 30

نسحب كرتين منه في آن واحد ما هو احتمال الحصول على عددين هما حدين من (u_n)

تمرين 51: لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=15 \\ u_2+4u_0=82 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r ثم استنتج u_0

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين أكبر حد أصغر تماما من 2009

4) احسب المجموع S حيث $S=u_5+u_6+.....+u_{19}$ ثم المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 52: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=15 \\ u_2^2+4u_0=36 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r ثم استنتج u_0

2) عين u_n بدلالة n

3) عين أكبر حد أصغر تماما من 2009

4) احسب المجموع S حيث $S=u_5+u_6+.....+u_{19}$ ثم المجموعS_nحيث $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين53: (u_n) متتالية حسابية حدها الأولu_1

1) أحسب حدها الثانيu_2 علما أن $u_1+u_3=12$

2) أحسب حدها الرابعu_4 علما أن $u_3+u_4+u_5=30$

3) عين أساس هذه المتتالية و حدها الأولu_1

4) أكتب الحد العام u_n بدلالة n ثم عين n بحيث $u_n=32$.

5) أحسب المجموع S حيث $S=u_1+u_2+.....+u_{15}$

تمرين54: (u_n) متتالية حسابية متزايدة تماماً حدها الأولu_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=-6 \\ u_0^2-3u_1=31 \end{cases}$

1) عينu_1 و الأساس r ثم استنتجu_0.

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين n علماً أن $u_n=2001$

4) احسب المجموع S حيث $S=u_5+u_6+.....+u_{670}$ثم المجموعS_nحيث $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين55: (u_n) متتالية حسابية حدها الأولu_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_2+u_6=\frac{18}{5} \\ u_5+u_7=\frac{27}{5} \end{cases}$

1) عينu_4 وu_6 ثم استنتجu_0 و الأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة n

3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 2004$

1) احسب المجموعS_nحيث $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين56: (u_n) متتالية حسابية حدها الأولu_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=\frac{13}{5} \\ u_2+3u_0=\frac{77}{15} \end{cases}$

1) عينu_1 و الأساس r ثم استنتجu_0.

2) أحسب u_n بدلالة n. أدرس تغيرات (u_n)

3) احسب المجموعS_nحيث $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين57: (u_n) متتالية حسابية حدها الأولu_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_4=14 \\ u_2+u_5=22 \end{cases}$

1) عينu_0 و الأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة n. هل 2005 حد من (u_n) ؟

4) أدرس تغيرات (u_n)

3) احسب المجموع S حيث$S=u_0+u_1+.....+u_{502}$

تمرين58: (u_n) متتالية حسابية حدها الأولu_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_5+3u_3=68 \\ u_2-3u_1=-10 \end{cases}$

1) عينu_0 و الأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة n

3) أدرس تغيرات (u_n)

4) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$ بدلالة n

تمرين 59: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_5+u_9=-39 \\ u_2+u_7=-23 \end{cases}$

1) عين u_5 و الأساس r ثم استنتج u_1.

2) أحسب u_n بدلالة n. عين n علما أن: $u_n=-2005$

3) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ بدلالة n

تمرين 60: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_3-4u_4=56 \\ u_2+3u_1=-13 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r

2) أحسب u_n بدلالة n

3) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ بدلالة n

تمرين 61: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_6=\frac{39}{2} \\ u_2+u_7=\frac{47}{2} \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r .

2) أحسب u_n بدلالة n

3) هل 501 حد من (u_n)؟ ما هي رتبته؟ .

4) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ بدلالة n

تمرين 62: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+u_6=14 \\ u_5+u_{10}=46 \end{cases}$

1) عين الحد الأول u_1 وأساسها r

2) أحسب u_n بدلالة n

3) أدرس تغيرات (u_n)

4) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$ بدلالة n

تمرين 63: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_2+u_7=19 \\ u_1+u_4=7 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة n

3) أدرس تغيرات (u_n)

4) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$ بدلالة n

تمرين 64: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+u_3=13 \\ u_1+u_4=23 \end{cases}$

1) عين u_0 والأساس r.

2) أحسب u_n بدلالة n

3) هل 2004 حد من (u_n)؟ ما هي رتبته؟ .

4) احسب المجموع S حيث $S_n=u_{10}+u_{11}+\dots+u_{401}$

تمرين 65: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r تحقق: $\begin{cases} u_0+3u_2=\frac{26}{15} \\ u_4-5u_1=-\frac{5}{3} \end{cases}$

1) عين u_0 و الأساس r.
2) أحسب u_n بدلالة n
3) أدرس تغيرات (u_n)
4) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 66: (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 وأساسها r تحقق: $\begin{cases} u_1+3u_2-u_4=33 \\ u_0+u_3=26 \end{cases}$

1) عين u_0 و الأساس r .
2) أحسب u_n بدلالة n
3) أدرس تغيرات (u_n)
4) احسب المجموع S_n حيث $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 67:

1) لتكن المتتالية الحسابية للأعداد :-10,-7,-4,.... نريد حساب 25 حدا من حدودها ليكون مجموعها 1400 . ما هي رتبة الحد الذي نبدأ به ؟ و ما قيمته؟.
2) طريق مستقيم طوله 166 ميلا .بدأ شخصان الحركة معا من نهايتيه فإذا قطع أحدهما في اليوم الأول مسافة 10 أميال ثم قطع في كل يوم من الأيام التالية مسافة تزيد ميلا واحد عن مسافة اليوم السابق . أما الأخر فقطع في اليوم الأول مسافة 9أميال ثم قطع في كل يوم من الأيام التالية مسافة تنقص نصف ميل عن مسافة اليوم السابق. أوجد بعد كم يوم يتقبلان.
3) أ) رسم الدخول إلى معرض في يومه الأول $45\ DA$ ثم ينقص بمقدار $1,5\ DA$ في كل يوم من الأيام التالية.
أوجد رسم الدخول في اليوم الخامس عشرا.
ب) أراد رجلا أن يدخل المعرض يوميا في أسبوعه الثالث فأوجد ما يوفره إذا أشترى تذكرة أسبوعية بمبلغ $100\ DA$

المتتاليات الهندسية

تمرين 68: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=2\times3^n$

1) أحسب u_2,u_1,u_0.
2) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
3) عين العدد الطبيعي n علما أن: $u_n=12288$.
4) أحسب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+.....+u_{33}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n.

تمرين 69: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=(-6)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

1) أحسب u_2,u_1,u_0.
2) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
3) أدرس تغيرات المتتالية (u_n),

4) أحسب المجموع S حيث: $S=u_{20}+u_{21}+\dots\dots+u_{111}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_{n-1}$ بدلالة n.

5) عين n علما أن: $S_n=-\frac{1024}{64}$.

تمرين 70: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3^n$

1) أحسب u_2,u_1,u_0.

2) أدرس تغيرات (u_n).

3) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_n$ بدلالة n.

5) عين العدد الطبيعي n علما أن: $S_n=-182$

تمرين 71: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

1) أحسب u_2,u_1,u_0.

2) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n=\frac{1}{4096}$.

4) أحسب المجموع S حيث: $S=u_0+u_1+\dots\dots+u_{33}$ ثم المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_n$ بدلالة n.

تمرين 72: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q=\frac{3}{4}$ تحقق $u_2=\frac{63}{16}$

1) أحسب u_0 ثم أحسب u_n بدلالة n.

2) أدرس تغيرات (u_n).

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_n$ بدلالة n.

4) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $S_n=\frac{1225}{64}$.

تمرين 73: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=-2$ و أساسها $q=\frac{1}{2}$.

1) أحسب u_1, u_2 ثم أحسب u_n بدلالة n.

2) أدرس تغيرات (u_n).

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_n$ بدلالة n.

تمرين 74: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q=\frac{1}{2}$ تحقق $u_0+2u_1=-3$

1) أحسب u_0 ثم أحسب u_n بدلالة n.

2) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n=-\frac{3}{1024}$.

3) أدرس تغيرات (u_n).

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\dots\dots+u_n$ بدلالة n.

تمرين 75: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q و تحقق $243u_7=32u_2$ مع $u_2\neq 0$.

1) أحسب الأساس q,

2) عين u_0 علما أن: $u_0+u_1=20$.

3) أحسب u_n بدلالة n.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots\ldots+u_n$ بدلالة n.

تمرين 76: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q و تحقق $27u_4=8u_1$ مع $u_1\neq 0$.

1) أحسب الأساس q,

2) عين u_0 علما أن: $u_0+u_1+u_2=\frac{19}{3}$.

3) أحسب u_n بدلالة n.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots\ldots+u_n$ بدلالة n.

تمرين 77: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق $625u_2=81u_6$ مع $u_2\neq 0$

1) عين الأساس q.

2) أحسب u_0 علما أن: $u_0+u_1=\frac{8}{3}$

3) أحسب u_n بدلالة n.

4) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n=-\frac{3125}{243}$.

5) أدرس تغيرات (u_n).

6) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots\ldots+u_{n+2}$ بدلالة n.

تمرين 78: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0\neq 0$ و أساسها $q>0$ تحقق $4u_3=49u_5$

1) عين الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n و u_0.

3) أدرس تغيرات (u_n).

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots\ldots+u_n$ بدلالة n و u_0.

5) عين u_0 علما أن: $\lim_{n\to+\infty}S_n=5$.

6) نضع:من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=7u_n-25$

i. أحسب v_n بدلالة n.

ii. هل (v_n) متقاربة ؟

تمرين 79: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q>0$ تحقق $u_5=\frac{81}{64}$ و $u_3=\frac{9}{4}$

1) عين الأساس q و u_0.

2) أحسب u_n بدلالة n

3) أدرس تغيرات (u_n).

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n

تمرين 80: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق $u_1 = -48$ و $u_4 = 6$

1) عين الأساس q و u_0.
2) أحسب u_n بدلالة n
3) أدرس تغيرات (u_n).
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n

تمرين 81: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_1 = -48$ و أساسها q و $u_8 = \frac{3}{8}$

5) عين الأساس q.
6) أحسب u_n بدلالة n
7) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = \frac{3}{128}$.
8) أدرس تغيرات (u_n).
9) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n

تمرين 82: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ، حدها الأول $u_0 = 1$ و أساسها q و $u_4 = 625$

1) عين الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n
3) أدرس تغيرات (u_n).
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n

تمرين 83: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 و أساسها q وتحقق $u_3 = -24$ و $u_6 = -192$

1) عين الأساس q و u_1.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = -1536$.
4) أدرس تغيرات (u_n).
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.
6) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $S_n = -3069$.

تمرين 84: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 3$ و أساسها $q > 0$ وتحقق $u_0 + u_1 + u_2 = \frac{21}{4}$.

1) عين الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = \frac{3}{2048}$.
4) أدرس تغيرات (u_n).
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

6) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $S_n=-3069$.

تمرين 85: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=16$ و أساسها q وتحقق $u_1\times u_2=4$.

1) عين الأساس q .
2) أحسب u_n بدلالة n ,
3) أدرس تغيرات (u_n) .
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n .

تمرين 86: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=9$ و أساسها $q>0$ وتحقق $u_1\times u_3=1$.

1) عين u_2 ثم الأساس q .
2) أحسب u_n بدلالة n ,
3) أدرس تغيرات (u_n) .
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n .

تمرين 87: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q=\frac{1}{4}$ وتحقق $u_0\times u_1\times u_2=8$.

1) عين u_1 .
2) أحسب u_n بدلالة n ,
3) أدرس تغيرات (u_n) .
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n .

تمرين 88: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q=\frac{2}{3}$ وتحقق $u_0+3u_2=\frac{35}{3}$.

1) عين u_0 .
2) أحسب u_n بدلالة n ,
3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n=\frac{320}{729}$.
4) أدرس تغيرات (u_n) .
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n .

تمرين 89: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 و أساسها $q=\frac{1}{3}$ وتحقق $u_k=2$ و $u_1+\ldots..+u_k=728$.

1) عين k و u_0 .
2) أحسب u_n بدلالة n ,
3) أدرس تغيرات (u_n) .
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n .

تمرين 90: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q>0$ وتحقق $\begin{cases}u_0+u_1+u_2=26\\ u_2-u_0=16\end{cases}$.

1) عين u_0 ثم الأساس q .
2) أحسب u_n بدلالة n ,

3) أدرس تغيرات (u_n).

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+11}$ بدلالة n.

تمرين 91: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 2 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 1250 \end{cases}$.

1) عين u_0 ثم الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n,

3) أدرس تغيرات (u_n).

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+11}$ بدلالة n.

تمرين 92: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 30 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 120 \end{cases}$.

1) عين u_0 ثم الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n,

3) أدرس تغيرات (u_n).

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n+11}$ بدلالة n.

تمرين 93: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 70 \\ u_1 - u_2 + u_3 = 30 \end{cases}$.

1) عين u_1, u_2, u_3 ثم الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n,

3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = 640$.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 94: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_2 + u_4 = 10 \\ u_1 \times u_3 \times u_5 = 27 \end{cases}$.

1) عين u_3 ثم الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n,

3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = 59049$.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 95: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 42 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 512 \end{cases}$.

1) عين u_3 ثم الأساس q.

2) أحسب u_n بدلالة n,

3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = 2048$.

4) أدرس تغيرات (u_n).

5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.

تمرين 96: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q وتحقق $\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = \dfrac{7}{4} \\ u_3 + u_4 + u_5 = \dfrac{7}{16} \end{cases}$.

1) عين u_1 ثم الأساس q.
2) أحسب u_n بدلالة n,
3) عينالعدد الطبيعي n علما أن: $u_n = 2048$.
4) أدرس تغيرات (u_n).
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.
6) ماهي $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ؟
7) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق $|S_n - 4| < 10^{-6}$:

تمرين 97: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1) أ) أحسب u_2 و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول u_1 .
ب) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
ج) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ بدلالة n.
د) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{2} v_n + u_n \end{cases}$

أ) أحسب v_2 و v_3 .
ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $w_n = \dfrac{v_n}{u_n} - \dfrac{2}{3}$.
i. بين أن (w_n) متتالية هندسية .
ii. أكتبعبارة الحد العام w_n بدلالة n.
iii. استنتج عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

تمرين 98: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q > 0$ حيث: $\begin{cases} u_0 + u_1 = -\dfrac{13}{2} \\ u_0 \times u_2 = \dfrac{25}{4} \end{cases}$

1) عين u_0 و الأساس q.
2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.
3) عين أصغر عدد طبيعي n حيث : $|u_n| < 10^{-3}$

4) أحسب المجموع الحدود العشرة الأولى المتتالية لهذه المتتالية.

تمرين 99: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=\dfrac{61}{50} \\ \dfrac{1}{u_0}+\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}=\dfrac{61}{8} \end{cases}$

1) عين u_0, u_1, u_2 و الأساس q.

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.

تمرين 100: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=21 \\ u_0^2+u_1^2+u_2^2=189 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس q ثم عين u_0 .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.

تمرين 101: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q حيث: $\begin{cases} u_0\times u_1\times u_2=64 \\ u_0^2+u_1^2+u_2^2=84 \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس q ثم عين u_0 .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+\ldots..+u_n$ بدلالة n.

تمرين 102:

1) بين أنه إذا كانت a,b,c ثلاثة أعداد تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن:

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$$

2) أوجد ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها 78 و مجموع مربعاتها 3276 .

تمرين 103: a,b,c ثلاثة أعداد حقيقية هي حدود متتابعة من متتالية هندسية، عينها علما أن:

$$\begin{cases} a+b+c=63 \\ a\times c=144 \\ b<0 \end{cases}\ldots\ldots(3) \quad \begin{cases} a+b+c=63 \\ a\times b\times c=1728 \end{cases}\ldots\ldots(1) \quad , \quad \begin{cases} a+b+c=16 \\ a\times b\times c=27 \end{cases}\ldots\ldots(2) \quad ,$$

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ a^2+b^2+c^2=189 \end{cases}\ldots\ldots(6) \quad \begin{cases} a+b+c=26 \\ a+2b+3c=68 \end{cases}\ldots\ldots(4) \quad , \quad \begin{cases} a+b+c=312 \\ c-a=192 \end{cases}\ldots\ldots(5) \quad ,$$

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ a^2+b^2+c^2=21 \end{cases}\ldots\ldots(9) \quad \begin{cases} a+b+c=21 \\ a+2b+3c=51 \end{cases}\ldots\ldots(7) \quad , \quad \begin{cases} a+b+c=78 \\ a^2+b^2+c^2=3276 \end{cases}\ldots\ldots(8) \quad ,$$

$$\begin{cases} a+b+c=13 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{13}{9} \\ a<b<c \end{cases}\ldots\ldots(10) \quad , \quad \begin{cases} a+b+c=26 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{26}{3} \\ a<b<c \end{cases}\ldots\ldots(11) \quad ,$$

تمرين 104: c,b,a ثلاثة أعداد حقيقية تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية ،أثبت أن $a^2+2b^2+c^2$ مربع تام.

تمرين 105: c,b,a ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة.

1) أثبت أنه إذا كان c,b,a حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن $\frac{1}{c},\frac{1}{b},\frac{1}{a}$ هي حدود متتابعةمن متتالية هندسية

2) نفرض أن c,b,a حدود متتابعة من متتالية هندسية تحقق: $a+b+c=1994$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{1994}$. عين c,b,a

3) نضع: $a+b+c=S$ و $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=P$. ما هو الشرط الذي يحققه S وَ P حتى يكون c,b,a حدود متتابعة من متتالية هندسية. عين في هذه الحالة c,b,a حتى يكون: $S=4P$ وَ $\frac{a}{c^2}=4$.

تمرين 106:

أوجد الحدود الخمس الأولى لمتتالية هندسية علما أن مجموع الحد الأول والأخير يساوي $\frac{82}{11}$ ومجموع حدودها يساوي 11

تمرين 107: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1+u_2+\ldots..+u_n=3^n-1$$

1) عين u_1 و u_{10} .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_n=468$.

4) ما هي طبيعة (u_n) ؟

5) أدرس تغيرات (u_n)

6) لدينا زهرة نرد متجانسة ذات ستة أوجه مرقمة: 18,12,6,2,2,1. نرميها ثلاث مرات متتابعات.
ما هو احتمال الحصول على ثلاثة أعداد هي حدود متتابعة من المتتالية (u_n) ؟

تمرين 108: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1+u_2+\ldots..+u_n=\frac{2}{3}\left(4^n-1\right)$$

1) عين u_1 و u_{15} .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_n=512$.

4) ما هي طبيعة (u_n) ؟

5) أدرس تغيرات (u_n)

تمرين 109: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1+u_2+\ldots..+u_n=2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)$$

1) عين u_1 و u_{25} .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_n=\frac{1}{1024}$.

4) ما هي طبيعة (u_n) ؟

5) أدرس تغيرات (u_n)

تمرين 110: (u_n) متتالية عددية حدها الأول u_1 و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$$u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n=\frac{9}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right)$$

1) عين u_1 و u_{25} .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

3) عين العدد الطبيعي n بحيث يكون: $u_n=-\frac{1}{2187}$.

4) ما هي طبيعة (u_n) ؟

5) أدرس تغيرات (u_n)

تمرين 111:

نضع مبلغ مالي u_0 في البنك مع فائدة سنوية قدرها 10% و ذلك سنة 1990

1) إذا كان u_n المبلغ سنة $1990+n$، عبر عن u_n بدلالة n و u_0

2) بعدكم سنة يكون $u_n>2u_0$ ؟

تمرين 112:

عدد سكان مدينة ما يتزايد كل سنة بنسبة 5%, نفرض أن عدد سكانها سنة 1980 هو 200000 نسمة.

1) ما هو عدد سكانها سنة 2000 ؟

2) في أي سنة يصبح عدد سكانها ضعفما كان عليه في 1980؟

تمرين 113:

الضغط الجوي على سطح البحر هو $760\ mm$ من الزئبق.

نفرض أن الهواء هو غاز متجانس و أنه يزداد بالنصف كلما ارتفعنا بـ: $5,5\ km$.

ما هو الضغط في ارتفاع $2250\ m$ ، $16,5\ km$ ، $11\ km$

تمرين 114: خريج جامعة قبل طلبه للتوظيف من قبل مؤسسة خاصة التي اقترحت عليه مرتب شهري قدره $12000\ DA$ للشهر الأول وزيادة في المرتب الشهري تقدر بـ 10%

نسمي u_1 المرتب الشهري خلال السنة الأولى و نرمز ب u_n للمرتب الشهري خلال السنة $n,(n\geq1)$.

1) احسب u_2 و u_3 .

2) اكتب u_{n+1} بدلالة u_n .

3) بعد 30 سنة، ما مجموع الأجور التي يكون الخريج قد تقضاها؟ يطلب التعليل.

llllllllllllllllllllllll

تمرين 115: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $q>0$ تحقق: $u_7=81u_3$ مع $u_3\neq 0$

1) عين الأساس q
2) أحسب u_0 علما أن: $u_0+u_1+u_2=26$
3) أحسب u_n بدلالة n.
4) أدرس تغيرات (u_n)
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 116: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $u_6=64u_3$ مع $u_3\neq 0$

1) عين الأساس q
2) أحسب u_0 علما أن: $u_0+u_1+u_2=\frac{7}{2}$
3) أحسب u_n بدلالة n.
4) أدرس تغيرات (u_n)
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 117: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $u_5=8u_2$ و $u_3=-1$

1) عين الأساس q ثم عين u_0
2) أحسب u_n بدلالة n.
3) أدرس تغيرات (u_n)
4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 118: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و $q>0$ تحقق: $u_3=9u_1$ مع $u_1\neq 0$

1) عين الأساس q
2) أحسب u_0 علما أن: $u_0+u_1+u_2=26$
3) أحسب u_n بدلالة n.
4) أدرس تغيرات (u_n)
5) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 119: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $625u_2=81u_6$ مع $u_2\neq 0$

7) عين الأساس q
8) أحسب u_0 علما أن: $u_0+u_1=\frac{8}{3}$
9) أحسب u_n بدلالة n ثم عين n علما أن $u_n=\frac{3125}{243}$
10) أدرس تغيرات (u_n)
11) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 120: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0\neq 0$ و أساسها $q>0$ تحقق: $4u_3=49u_5$

1) عين q

2) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n وu_0

3) عينu_0علما أن: $\lim_{+\infty} S_n=5$.

4) نضع:من أجل كل عدد طبيعيn، $v_n=7u_n-25$.أحسبv_n بدلالة n. هل (v_n)متقاربة ؟

تمرين121: (u_n) متتالية هندسية حدها الأولu_0 و أساسها q تحقق: $u_2=1$ و$u_7=\frac{32}{243}$

1) عينالأساس q و أحسبu_0

2) أحسبu_n بدلالة n.

3) أدرس تغيرات (u_n)

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين122: (u_n) متتالية هندسية حدها الأولu_0 و أساسها q تحقق: $u_4=3$ و $u_7=24$

1) عينالأساس q و أحسبu_0

2) أحسبu_n بدلالة n.

3) أدرس تغيرات (u_n)

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين123: (u_n) متتالية هندسية حدها الأولu_0 و أساسها q تحقق: $u_3=8$ و$u_8=\frac{1}{2}$

1) عينالأساس q و أحسبu_0. أحسب u_n بدلالة n.

2) أدرس تغيرات (u_n)

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

4) عين n علما أن$n=\frac{8191}{64}$

تمرين124: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0=1$ و أساسها q تحقق:$u_3=-\frac{27}{64}$

1) عينالأساس q

2) أحسبu_n بدلالة n ثم عين nعلما أن$u_n=\frac{729}{4096}$

3) أدرس تغيرات (u_n)

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين125: (u_n) متتالية هندسية حدها الأولu_0 و أساسها q تحقق: $u_3=24$ و $u_5=96$

1) عين الأساس qثم عينu_0

2) أحسبu_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n. عين n التي يكون من أجلها $S_n=381$

نضع: $v_n=u_1\times u_2\times....\times v_n$. أحسب$v_n$ بدلالة n

تمرين126: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأولu_1 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=26 \\ u_1+2u_2+3u_3=68 \end{cases}$

1) عينu_1، u_2،u_3 و الأساس q. أحسبu_n بدلالة n.

2) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 127: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_1 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ u_1+2u_2+3u_3=51 \end{cases}$

1) عين u_1، u_2، u_3 و الأساس q
2) أحسب u_n بدلالة n.عين n علما أن $u_n=3072$
3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 128: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_1 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=312 \\ u_3-u_1=192 \end{cases}$

1) عين u_1،u_2،u_3 و الأساس q
2) أحسب u_n بدلالة n.
3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 129: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها $r>0$ تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=\frac{63}{16} \\ u_0\times u_2\times u_4=\frac{27}{4096} \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس r
2) أحسب u_n بدلالة n.
3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 130: (u_n) متتالية هندسية متناقصة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=\frac{63}{16} \\ u_0\times u_1\times u_2=\frac{27}{64} \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس q
2) أحسب u_n بدلالة n.
3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 131: (u_n) متتالية هندسية متناقصة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=\frac{35}{4} \\ u_0\times u_1\times u_2=\frac{125}{8} \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس q
2) أحسب u_n بدلالة n. عين n علما أن $u_n=\frac{5}{1024}$
3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 132: (u_n) متتالية هندسية متناقصة تماما حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=-\frac{31}{3} \\ u_0\times u_1\times u_2=-\frac{125}{27} \end{cases}$

1) عين u_1 و الأساس q ثم u_0
2) أحسب u_n بدلالة n. عين n علما أن $u_n=-\frac{3125}{3}$

أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 133: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_2-u_4=72 \\ u_1\times u_5=729 \end{cases}$

1) عين u_3 و الأساس qثم أحسب u_n بدلالة n.
2) أدرس تغيرات (u_n)

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 134: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_0+u_1+u_2=7 \\ u_0\times u_4=\frac{256}{9} \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس q ثم عين u_0

2) أحسب u_n بدلالة n ثم عين n علما أن $u_n=\frac{1024}{3}$

3) أدرس تغيرات (u_n)

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 135: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_2+u_4=\frac{20}{3} \\ u_1\times u_5=4 \end{cases}$

1) عين u_3 و الأساس q

2) عين u_0 ثمّ أحسب u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 136: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_2\times u_4=25 \\ u_2+u_3+u_4=\frac{35}{2} \end{cases}$

1) عين u_3 و الأساس q

2) عين u_0 ثمّ أحسب u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 137: (u_n) متتالية هندسية متناقصة تماما، حدها الأول u_0 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_2\times u_4=81 \\ u_2+u_3+u_4=39 \end{cases}$

1) عين u_3 و الأساس q

2) عين u_0 ثمّ أحسب u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+.....+u_n$ بدلالة n

تمرين 138: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما؛ حدها الأول u_1 و أساسها q تحقق: $\begin{cases} u_1\times u_2\times u_3=27 \\ u_1+u_2+u_3=13 \end{cases}$

1) عين u_2 و الأساس q

2) أحسب u_n بدلالة n.

3) أدرس تقارب (u_n)

4) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$ بدلالة n

متتاليات حسابية و هندسية

تمرين 139: (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_1=6$ و أساسها q تحقق: $u_4=\frac{2}{9}$

1) أوجد r ثم أكتب u_n بدلالة n . هل (u_n) متقاربة ؟

2) نضع: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $v_n=3^n\times u_n-n$. بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ ثم المجموع S'_n حيث $S'_n=v_1+v_2+....+v_n$

تمرين 140: (u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما تحقق: $u_0=2$ و $u_4=128$

1) أحسب الأساس r ثم أحسب u_n بدلالة n

2) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = ln(u_n{}^2)$. بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

تمرين 141: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما أساسها q . نضع: $v_n=ln(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r بدلالة q. ما هي قيم q حتى تكون (v_n) متناقصة ؟

2) عين u_n بدلالة n علما أن: $u_0 + u_1 + u_2 = \frac{21}{2}$ و $u_0\times u_1\times u_2= 8$. عين حينئذ v_n بدلالة n

تمرين 142: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدها الأول u_1 أساسها q تحقق: $\begin{cases} ln\, u_1 + ln\, u_5 = -12 \\ ln\, u_2 - ln\, u_4 = 4 \end{cases}$

1) عين u_3 و q ثم عين u_1 ثم u_n بدلالة n

2) نضع: $v_n=ln(u_n)+ln(u_{n+1})$. بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_1+v_2+....+v_n$. عين علما أن: $S_n{}^2=2^{30}$.

تمرين 143: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدّها الأول u_1 وَ أساسها q تحقق:

$$\begin{cases} ln\, u_1 + ln\, u_2 + ln\, u_3 = ln\, 5832 \\ lnu_4 - lnu_1 = ln27 \end{cases}$$

1) عين u_2 و الأساس q ثم u_1 ثم احسب u_n بدلالة n

2) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+..... +u_n$ بدلالة n

3) يحتوي كيس على 30 كرة مرقمة من 1 إلى 30 لا نفرق بينها عند اللمس.

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الكيس. ما احتمال الحصول على عددين جداءهما حد من المتتالية (u_n)

تمرين 144: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدّها الأول u_1 وَ أساسها q تحقق:

$$\begin{cases} ln\, u_1 + ln\, u_3 = ln\, 324 \\ lnu_4 - lnu_2 = ln9 \end{cases}$$

1) عين u_2 و الأساس q ثم u_1 ثم احسب u_n بدلالة n

2) أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+..... +u_n$ بدلالة n

تمرين 145: لتكن a عدد حقيقي و (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 2 \\ u_{n+2} = \frac{1}{2}a^2 u_{n+1} + (a-3)u_n \end{cases}$

نضع: $v_n=u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) نضع $a=2$. تحقق أن (v_n) متتالية ثابتة.استنتج أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

عبر عن u_n بدلالة n و أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n =u_0+u_1+ ...+u_n$.

استنتج مجموع الأعداد الفردية الأصغر تماما من 100

2) نضع $a= - 4$. تحقق أن (v_n) متتالية هندسية.

أ) عين v_n بدلالة n.

ب) أحسب بدلالة n ثم بدلالة u_n المجموع S_n حيث $S_n =v_0+v_1+v_2+....+v_{n-1}$.

ج) استنتج u_n بدلالة n

تمرين 146: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $a_n = e^{2n-\frac{1}{3}}$

1) أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

2) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = a_0+a_1+a_2+....+a_n$.عين n علما أن $S_n = \frac{e^{\frac{1}{3}}(1-e^{10})}{1-e^2}$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $b_n=ln(a_n)$. ما هي طبيعة المتتالية (b_n)؟

4) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث $S'_n = b_0+b_1+b_2+....+b_n$. عين n علما أن: $S_n = \frac{160}{3}$

تمرين 147: x, y, z ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة و غير معدومة.

أثبت أن: $\frac{2}{x-y}, \frac{1}{x}, \frac{2}{x-z}$ حدود متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كانت: y, x, z حدود متتابعة من متتالية هندسية

تمرين 148: a, b, c أعداد حقيقية مختلفة هي بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية ،

و إذا أخذت بالترتيب a, c, b تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية. أوجد a, b, c علما أن: $a+b+c = 18$

تمرين 149: a, b, c أعداد حقيقية مختلفة هي بهذا الترتيب حدود متتابعة لمتتالية حسابية، و a, c, b بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة لمتتالية هندسية. أوجد a, b, c علما أن: $a.b.c = 125$

تمرين 150: a, b, c هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية و b, a, c هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية.أحسب a, b, c علما أن: $a\times b\times c = -512$

تمرين 151: a, b, c أعداد حقيقية مختلفة هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية و a, c, b هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية. أحسب a, b, c علما أن: $a+b+c=30$

تمرين 152: عين x و y عددان حقيقيان موجبان تماما حيث:

- $x, x+2y, 2x+y$ هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية.
- $(x+1)^2, xy+5, (y+1)^2$ هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية.

تمرين 153: عين x و y عددان حقيقيان موجبان تماما حيث:

- $x; 6x-y, x+2y$ هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية.
- $x, y+1, 4y-x$ هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية.

تمرين 154: a, b, c أعداد حقيقية مختلفة حيث $a \neq 0$ تحقق:

- $3a, 2b, c$ هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية.
- a, b, c هي بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q . عين q

تمرين 155:

1) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=1$ و أساسها $r=2$

أ) أكتب u_n بدلالة n

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = u_0+u_1+...+u_n$

2) (v_n) متتالية هندسية حيث $v_5=32$ و $v_8=256$

أ) عين أساس هده المتتالية و حدها الأول v_0 ثم أكتب v_n بدلالة n

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0+v_1+v_2+....+v_n$.

3) (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2^n+2n+1$

د) أحسب بدلالة n المجموع S''_n حيث $S''_n = w_0+w_1+v_2+....+w_n$

I. المتتاليات التراجعية

تمرين 156: ﴿ امتحان بكالوريا –الجزائر- دورة جوان 2010-شعبة : العلوم التجريبية -الموضوع الثاني ﴾

في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على التوالي: $y=x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

1- لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}$

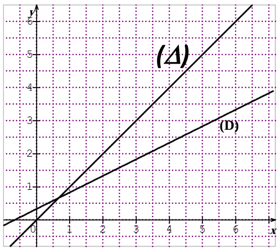
أ. أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية: u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 ؛ دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب. عين إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D)

ج. أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2- أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)



3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n = u_n - \frac{2}{3}$

أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب. أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n و استنتج عبارة u_n بدلالة n

4- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0+v_1+...+v_n$ و استنتج المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0+u_1+...+u_n$

تمرين 157: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

(Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n > 1$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 1$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

4) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

6) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times .... \times v_n$

تمرين 158: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{3}x - 4$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

(Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+6$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 +u_1 +u_2 +....+u_n$

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n =u_0^2+u_1^2+u_2^2+....+u_n^2$

تمرين159: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 =1$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}= 2u_n - 5$

f دالة عددية معرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x-5$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

(Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n - 5$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 +u_1 +u_2 +....+u_n$

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n =u_0^2+u_1^2+u_2^2+....+u_n^2$

تمرين160: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 =1$ و $u_{n+1}= 3u_n - 4$

f دالة عددية معرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=3x- 4$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n - 2$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + ... + {u_n}^2$

تمرين 161: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = 2u_n + 3$

f دالة عددية معرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 3$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

(Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n + 3$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + ... + {u_n}^2$

تمرين 162: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{4}{3}$

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$

(Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n + 2$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = {u_0}^2 + {u_1}^2 + {u_2}^2 + ... + {u_n}^2$

تمرين 163: (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$. (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-2$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 +u_1 +u_2 +....+u_n$

5) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n =u_0^2+u_1^2+u_2^2+....+u_n^2$

تمرين 164: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\alpha$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$

1) عين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

2) نأخذ $\alpha\neq 6$. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 6$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 بدلالة α.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n و α.

3) أدرس تقارب المتتالية (u_n)

4) عين α حتى تكون (u_n) متناقصة تماما.

5) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 +u_1 +u_2 +....+u_n$

6) أحسب بدلالة n و α المجموع S'_n حيث: $S'_n =u_0^2+u_1^2+u_2^2+....+u_n^2$

تمرين 165: ﴿ امتحان بكالوريا – الجزائر- دورة جوان 2009 - الشعبة : تسيير و اقتصاد - الموضوع الثاني ﴾

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n -2$

1- أحسب $u1$ و $u2$

2- لتكن المتتالية العددية (vn) المعرفة بـ: $vn = un -1$

أ) أثبت أن (vn) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول $v0$

ب) أكتب عبارة الحد العام vn بدلالة n

3- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $un+1 - un=(-4)\times 3n$، ثم استنتج تغير المتتالية (un).

4- عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $u0+u1+....+un = -79$

تمرين 166: (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} =u_n+4$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون $u_n\leq 2$

2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n =u_n - 2$

أ) بين أن المتتالية (vn) هندسية، يطلب تحديد حدها الأول و أساسها.

ب) أكتب الحد العام vn بدلالة n ثم استنتج الحد العام un بدلالة n.

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to\infty} u_n$

أحسب بدلالة n المجموع Sn حيث : $Sn=u0+u1+....+un$

تمرين 167: (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة $u_{n+1}=\alpha\, u_n+3$ من أجل كل عدد طبيعي n مع $|\alpha|<1$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\frac{3}{\alpha-1}$

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 بدلالة α

2) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n و α

3) بين أن (u_n) متقاربة. عين α حتى تكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$

4) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$

5) أحسب بدلالة n و α المجموع S'_n حيث: $S'_n={u_0}^2+{u_1}^2+{u_2}^2+....+{u_n}^2$

تمرين 168: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و بالعلاقة $u_{n+1}=\alpha\, u_n+2$ مع $\alpha\in\mathbb{R}$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-\frac{8}{3}$

1) عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

2) أحسب حينئذ v_n ثم u_n بدلالة n

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$

تمرين 169: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=2$ و بالعلاقة $u_{n+1}=2\alpha\, u_n+3$ مع $0<\alpha<\frac{1}{2}$

1) أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\frac{3}{2\alpha-1}$

أ) بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 و α

ب) أحسب حينئذ v_n ثم u_n بدلالة n و α.

3) أثبت أن (u_n) متزايدة تماما.

6) بين أن (u_n) متقاربة. . عين α حتى تكون $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=9$

7) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$

4) أحسب بدلالة n و α المجموع S'_n حيث: $S'_n={u_0}^2+{u_1}^2+{u_2}^2+....+{u_n}^2$

تمرين 170: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=1$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=2u_n-3$

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x-3$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

(Δ) مستقيم معادلة له $y=x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ)

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=2u_n+\alpha$

أ) عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) و تقاربها.

4) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

تمرين 171: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = -3$ و بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$

1) عين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+18$

أ) عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

3) أدرس اتجاه تغيرات و تقارب المتتالية (u_n)

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

تمرين 172: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = -3$ و بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - \alpha)$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$

1) عين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-1$

أ) عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

3) أدرس اتجاه تغيرات و تقارب المتتالية (u_n)

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

تمرين 173: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \alpha$ مع $\alpha \in \mathbb{R}$

1) عين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n+\beta$ مع $\beta \in \mathbb{R}$.

أ) أوجد علاقة بين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 بدلالة α

ب) أحسب حينئذ v_n ثم u_n بدلالة n و α.

ج) بين أن (u_n) متقاربة. • عين α حتى تكون $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$

3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

تمرين 174: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=\alpha u_n - 3$ مع $|\alpha| < 1$

1) هل توجد قيم للعدد α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة ؟

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-\beta$ مع $\beta \in \mathbb{R}$

أ) أوجد علاقة بين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 بدلالة α

ب) أحسب حينئذ v_n ثم u_n بدلالة n و α.

ج) بين أن (u_n) متقاربة. • عين α حتى تكون $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

3) أحسب بدلالة n و α المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

تمرين 175: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \alpha + 1$ مع $\alpha \in \mathbb{R}^*$

1) عين α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \alpha\, u_n + \alpha^2$

أ) أوجد α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب) أحسب حينئذ v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات و تقارب المتتالية (u_n)

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

تمرين 176: (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = -\frac{5}{4} \\ u_{n+1} = (2 + u_n)^2 - 2 \end{cases}$

1- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n $-2 < u_n < -1$

2- بين أن (u_n) متتالية متناقصة ، أستنتج أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \ln(u_n + 2)$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

تمرين 177:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$

1- أحسب u_1 ، u_2 و u_3

2- أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ ، $u_n \geq 0$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ ، $u_n \geq n - 3$

ج- استنتج النهاية للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3- نعرف المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ب: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ- برهن أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

تمرين 178: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ وبالعلاقة التراجعية $2u_{n+1} = u_n - 2n - 3$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n + \alpha\, n - 1$

1) عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

2) أحسب حينئذ v_n ثم u_n بدلالة n

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

تمرين 179: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \frac{2}{3}$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{2}}{4}n + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n\sqrt{2} - n$

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

2) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2 = \frac{32}{27}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

تمرين 180: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=1$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = 4u_n - 6n + 15$

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

2) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

4) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2 = \frac{32}{27}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

تمرين 181: (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 4n - 1) \end{cases}$

-1 أحسب u_1 و u_2

-2 نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n + n - 1$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب. أحسب v_n بدلالة n و استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

تمرين 182:

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$.

(v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $u_{n+1} = u_n + \alpha n + \beta$ حيث α و β عددان حقيقيان.

1) عين α و β بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2) أحسب v_n و u_n بدلالة n.

3) أحسب المجموعين S و S' حيث: $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

4) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5.

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها u_n مضاعفا للعدد 5

تمرين 183: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=0$ و بالعلاقة التراجعية $u_n = u_{n-1} + n$

1) أحسب u_n بدلالة n.

2) أدرس تقارب (u_n)

تمرين 184: (u_n) متتالية عددية على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=\frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$

1- أحسب u_1 و u_2

2- نضع: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-\frac{2}{3}n$

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب. أحسب v_n بدلالة n و استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+....+u_n$

تمرين 185: (u_n) متتالية معرفة كما يلي: $\begin{cases}u_1=3\\ n\times u_{n+1}=(3n+3)u_n-8n-12\end{cases}$

1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و يختلف عن 1: $u_n\leq 0$

ب- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة.

2) نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $n\times v_n=4-u_n$

أ. بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها.

ب. احسب v_n ثم u_n بدلالة n

3) أ- حلل 405 إلى جداء عوامل أولية.

ب- عين العدد الطبيعي n غير المعدوم الذي يحقق: $u_n=-401$

تمرين 186: (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0=2$ وبالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$ من أجل كل عدد طبيعي n

f دالة عددية معرفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (Δ) مستقيم معادلة له $y=x$.

1- أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\neq 1$.

3- (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) بين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$ ثم استنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

4- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{3^{x+1}+1}{3^{x+1}-1}$

أ. تحقق أن: $u_n=g(n)$

ب. بين أن : $g'(x)=-\frac{2(\ln 3)e^{(x+1)\ln 3}}{\left(e^{(x+1)\ln 3}-1\right)^2}$ و استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n).

5- (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n=\frac{2}{u_n-1}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

تمرين 187: (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 0$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n+3}{u_n-1}$

1) أ- أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}- \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود: u_3 , u_2 , u_1 , u_0

ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n \neq - 1$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+1}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول.

ب) عين عبارة v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و استنتج تقارب (u_n)

تمرين 188: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \frac{4u_n-2}{u_n+1}$

f دالة معرفة على المجال $]-1 ; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ)

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 2$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n-2}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

4) (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = \frac{1}{u_n-2}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

تمرين 189: (u_n) متتالية عددية على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = \frac{1}{4}$ وَ من أجل كل عدد طبيعي: $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$

1) أ) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-4\}$ بـ: $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$

ب- باستعمال الرسم السابق، مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب، الحدود: u_0 , u_1 , u_2 , u_3 وَ u_4

ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq 1$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n+2}{1-u_n}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين عبارة v_n ثم u_n بدلالة n.

ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ و استنتج تقارب (u_n)

تمرين190:

1) لتكن u المتتالية المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

أ) أحسب u_1،u_2،u_3. نعبر عن كل عدد على شكل كسر غير قابل للاختزال.

ب)قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية u و الحدود الأربعة الأولى للمتتالية w المعرفة على$\mathbb{N}$ كما يلي:

$$w_n = \frac{n}{n+1}$$

ج) باستعمال البرهان بالتراجع، برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = w_n$

2) لتكن v المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

أ) بين أن $v_1 + v_2 + v_3 = -ln4$

ب) نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. عبر عن S_n بدلالة n ثم عين نهايتها عندما n يؤول إلى $+\infty$

تمرين191:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 1$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5}$

f دالة عددية معرفة على المجال $\left]-\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x-1}{2x+5}$ و C_f تمثيلها البياني

في معلم متعامد ومتجانس $(; \vec{i} ; \vec{j})$، (Δ) مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \neq -1$.

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0.

ب) أحسب v_n بدلالة n.

ج) بين أن، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1+\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$ ثم استنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

4) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0 ; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}+1}{2-2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}}$

أ) تحقق أن: $u_n = g(n)$

ب) عين $g'(x)$ و استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

5) (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n = -\frac{2}{u_n + 1}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n$

تمرين192:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$

f دالة عددية معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{4x-2}{x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، (Δ) مستقيم معادلة له $y=x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ)

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) أ- بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>2$

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n-2)(u_n-1)}{u_n+1}$

ج-استنتج اتجاه تغيرات (u_n)

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n-2}{u_n-1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$. عين حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n بدلالة n

ج) بين أن، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}$ ثم استنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$

4) (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n=-\frac{1}{u_n-1}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=w_0+w_1+w_2+....+w_n$

تمرين 193: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=1$ و بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=\frac{u_n+4}{u_n-2}$

f دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty;-2[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x+4}{x-2}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(;\vec{i};\vec{j})$، (Δ) مستقيم معادلة له $y=x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطتي تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ)

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2، u_3 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) بر هن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\neq -1$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\frac{u_n-4}{u_n+1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{2}{3}$. عين حدها الأول v_0

ب) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

ج) عين نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$

4) (w_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $w_n=-\frac{5}{u_n+1}$

أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=w_0+w_1+w_2+....+w_n$

تمرين 194: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\frac{5u_n-3}{3u_n-1}\end{cases}$

f دالة عددية معرفة على المجال $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\frac{5x-3}{3x-1}$ و C_f تمثيلها البياني في

معلم متعامد ومتجانس $(\Delta)\left(; \overrightarrow{\ } ; \vec{j}\right)$ مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \neq 1$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n+1}{u_n-1}$

أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

5) بين أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

تمرين 195: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n+1} \end{cases}$

f دالة عددية معرفة على المجال $\left]\frac{1}{3} ; +\infty\right[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(\Delta)(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{u_n}$

أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n

5) أدرس تغيرات و تقارب (u_n)

تمرين 196: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n} \end{cases}$

f دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty ; 4[$ كما يلي: $f(x) = \frac{4}{4-x}$ و C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(\Delta)(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ مستقيم معادلة له $y = x$

1) أ- عين إحداثيتي نقطة تقاطع C_f و (Δ) و ارسم C_f و (Δ).

ب- مثل بيانيا المتتالية (u_n) مع تعيين u_0، u_1، u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 على محور الفواصل (لا يطلب حسابها).

ج- أعط تخمينا حول تغيرات (u_n) و تقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n \neq 2$

3) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{u_n-2}$

أثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4) أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

5) أدرس تغيرات و تقارب (u_n)

تمرين 197: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0;\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 7u_{n+1} + 8u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1}+u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n.

2) (w_n) و (k_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n=(-1)^n\ u_n$ و $k_n=w_{n+1}-w_n$

أ) عين k_n بدلالة n

ب) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = k_0 + k_1 + k_2 +....+k_{n-1}$

ج) أحسب بدلالة w_n المجموع S_n

د) استنتج w_n و u_n بدلالة n.

هـ) ما هي $\lim\limits_{+\infty} \frac{u_n}{8^n}$ ؟

تمرين 198: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2;\ u_1 = 1 \\ 3u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n.

ج) استنتج تغيرات (u_n)

2) أ- أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 +....+v_{n-1}$

ب- أحسب بدلالة u_n المجموع S_n

ج- استنتج u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 +....+u_n$

تمرين 199: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1;\ u_1 = 4 \\ 5u_{n+2} = 7u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n.

ج) استنتج تغيرات (u_n)

2) أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 +....+v_{n-1}$

ب) أحسب بدلالة u_n المجموع S_n

ج) استنتج u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 +....+u_n$

تمرين 200: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = -1;\ u_1 = 1 \\ 4u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n.

ج) استنتج تغيرات (u_n)

2) أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 +....+v_{n-1}$

ب) أحسب بدلالة u_n المجموع S_n

ج) استنتج u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 +....+u_n$

__تمرين 201:__ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0;\ u_1 = 1 \\ 5u_{n+2} = u_{n+1} + 4u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n.

ج) استنتج تغيرات (u_n)

2) أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 +....+v_{n-1}$

ب) أحسب بدلالة u_n المجموع S_n

ج) استنتج u_n بدلالة n.

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 +....+u_n$

__تمرين 202:__ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 3;\ u_1 = 2 \\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1} - u_n$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n

ج) استنتج تغيرات (u_n)

2) أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 +....+v_{n-1}$

ب) أحسب بدلالة u_n المجموع S_n

ج) استنتج u_n بدلالة n

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 +....+u_n$

__تمرين 203:__ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 0;\ u_1 = 1 \\ 2u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n.

ج) استنتج تغيرات (u_n)

2) أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 +....+v_{n-1}$

ب) أحسب بدلالة u_n المجموع S_n

ج) استنتج u_nبدلالة n.

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

تمرين 204:

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\boldsymbol{u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n}$ و $\boldsymbol{u_1 = 2}$ و $\boldsymbol{u_0 = 1}$.

المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\boldsymbol{v_n = u_{n+1} - u_n}$.

1) أحسب v_0 و v_1 .

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

ج) بين أن (u_n) متقاربة.

تمرين 205:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 1;\ u_1 = 3 \\ 3u_{n+2} = 5u_{n+1} + \alpha u_n \end{cases}$

1) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) عين α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية. عين أساسها و حدها الأول.

ب) عين حينئذ v_n بدلالة n.

ج) استنتج تغيرات (u_n)

2) أ) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

ب) أحسب بدلالة u_n المجموع S_n و استنتج u_nبدلالة n.

3) أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

تمرين 206:

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

1) أحسب u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 (تعطى النتائج على الشكل 2^k).

2) (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n - \ln 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عين v_n ثم u_n بدلالة n ثم ما هي $\lim\limits_{+\infty} u_n$ ؟

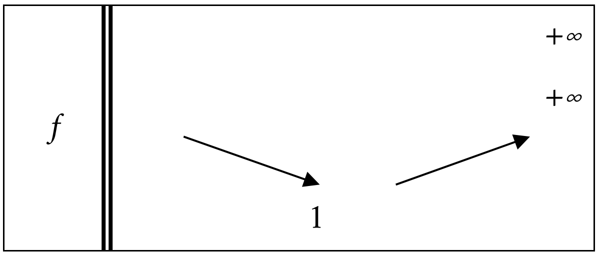
3) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n < 3{,}96$

تمرين 207:

-1 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y = x$

جدول تغيرات الدالة f معطى كما يلي:

x	$\frac{1}{2}$		1	
$f'(x)$	‖	-	0	+



أ. استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ، $f(x) > 1$

ب. بين ان المستقيم ذو معادلة $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

ج. أنشئ (C_f) و المستقيم (Δ).

-2 لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ. مثل بيانيا المتتالية (u_n)

ب. أعط تخمينا حول تغيرات و تقارب (u_n)

ج. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n > 1$

-3 (v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = ln\ (v_n)$

أ. بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب. عين w_n ثم v_n بدلالة n

ج. استنتج أن $u_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$

د. استنتج نهاية u_n لما n يؤول إلى $+\infty$

تمرين 208:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O\ ; \vec{i}\ ; \vec{j})$ (الوحدة على المحورين $2\ cm$)

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و فسر النتيجة هندسيا.

أ– أدرس تغيرات الدالة f.

ب– باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى (C) .

ج– ارسم في نفس المعلم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

2) نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة N كالآتي: $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

أ) باستعمال (Δ) و (C)، مثل الحدود u_0 و u_1 و u_2 على محور الفواصل.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 209:

تمرين210:

نعتبر الدالة العددية f على المجال $[1\,;5]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$. ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. الوحدة على المحورين $3\ cm$.

أ) أدرس تغيرات الدالة f

ب) أنشئ المنحنى (C) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم.

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=5$ و بالعبارة $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{5}{u_n}\right)$

أ) أحسب u_1 و u_2

ب) استعمل المنحنى (C) و المستقيم (Δ) لتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq\sqrt{5}$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب (u_n) ؟

3) أ) برهن أنه مهما يكن عدد طبيعي n فإن: $\left(u_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leq\frac{1}{2}\left(u_n-\sqrt{5}\right)$

ب) استنتج أن $\left(u_n-\sqrt{5}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(u_0-\sqrt{5}\right)$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ ؟

3 السلاسلالعددية:

مثال:

من أجل $n \geq 1$ نعتبر السلسلة ذات الحد العام $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} U_i \\ &= U_0 \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \end{aligned}$$

إذن: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

مثال:

السلسلة $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ متباعدة و بالتالي متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n \in IN}$ ليست لكوشي أي:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N} : m = 2n \in \mathbb{N} m \geq n \geq N_{\varepsilon} \wedge \left| \sum_{k=n+1}^{k=2n} u_k \right| \geq \varepsilon$$

$$\sum_{k=m+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \succ \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

من أجل $\varepsilon = \frac{1}{2}$ لدينا $(S_n)_{n \in IN}$ غير متتالية كوشي ومنه $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n}$ متباعدة و تسمى سلسلة توافقية.

مثال:

$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ متباعدة لأن $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \neq 0$

مثال:

لنعتبر في $\mathbb{R}$ المتتالية العددية $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$$

لكن متتالية المجاميع الجزئية $(S_n)_{n\in IN}$ متباعدة

لأن:

$$\begin{aligned} S_n &= u_0+u_1+\ldots+u_n \\ &= 1+\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

$$S_n=\sqrt{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=+\infty$$

و منه السلسلة $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ متباعدة

مثال:

السلسلتان $\sum_{n\geq 1}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ متباعدتان.

مثال:

السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة لأنها تحقق معيار آبال و هدا لأنه من أجل :

$a_n=\left(\frac{1}{n}\right)$ و $b_n=(-1)^n$

لدينا:

المتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ تحقق:

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\in\mathbb{R}_+$.
2. $(a_n)_{n\geq 0}$متتالية متناقصة.

3. الحد العام للمتتالية $(a_n)_{n\geq 0}$ يؤول نحو الصفر لما يؤول n نحو ألما لانهاية.

$$|B_n| = \left|\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\right| \leq 3$$

مثال:

لنعتبر السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{1+3^n}$

لدينا: $\frac{2^n}{1+3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و بما أن $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ سلسلة متقاربة لأن $q = \frac{2}{3} < 1$

فإن: $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{1+3^n}$ متقاربة.

2. لنعتبر السلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

لدينا: $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$ و بما أن $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة .

لندرس طبيعة السلاسل التالية:

مثال:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$$

$$U_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} < 1$$

و منه $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}$ متقاربة

مثال:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n^2}}$$

$$U_n = \frac{1}{2^{n^2}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(2^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

و منه $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^{n^2}}$ متقاربة.

مثال:

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

بما أن $:U_n=\frac{1}{n^2}\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{n}}}=\lim_{n\to+\infty}e^{-\frac{2}{n}\log n}=1$

فإنه لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$

مثال:

- $\sum_{n\geq 1}U_n=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ نحسب القيمة $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$

  السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ متقاربة حسب آلمبار لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=1:$

- $\sum_{n\geq 1}U_n=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ نحسب القيمة $\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بما أن : $\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$

  إذن لا يمكن القول أي شيء عن طبيعة السلسلة.

مثال:

دراسة طبيعة السلسلة:

$\sum_{n\geq 0}\frac{1\times 4\times 7\times\ldots\times(3n+1)}{(n+1)!}\times k^n$ و $k\in\mathbb{R}_+$

باستعمال قاعدة آلمبار

نجد :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\times 4\times 7\times\ldots\times(3n+1)\times(3n+4)\times k^{n+1}\times(n+1)!}{(n+2)!\times 1\times 4\times 7\times\ldots\times(3n+1)\times k^n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{n+2}\times k$$
$$=3k$$

- إذ ا كانت القيمة $1<3k$ أي $\frac{1}{3}<k$ فإن السلسلة متباعدة .
- إذ ا كانت القيمة $1>3k$ أي $\frac{1}{3}>k$ فإن السلسلة متقاربة .

- إذ ا كانت القيمة $k=\frac{1}{3}$ فإننا لا يمكن قول أي شيء عن طبيعة السلسلة.

مثال:

لنعتبر السلسلة العددية $\sum_{i=1}^{n}\frac{3+(-1)^i}{2^i}$:

1. **لنستعمل قاعدة دآلمبار** لدراسة طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2^{1n+1}}\times\frac{2^n}{3+(-1)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{2\left[3+(-1)^n\right]}=\begin{cases}1/4 & \text{n ن زوجى}\\ 1 & \text{n كان ف ردى}\end{cases}$$

- إذا كان n زوجي لحسب قاعدة آلمبار, إن السلسلة متقاربة $\left(l=\frac{1}{4}<1\right)$.
- إذا كان n فردي فإنه لا يمكن قول أي شيء عن طبيعة السلسلة $(l=1)$.

من أجل n فردى, استعمال قاعدة دآلمبار تكون بدون جدوى.

2. **لنستعمل قاعدة كوشي :**

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$$

حسب قاعدة كوشي فالسلسلة متقاربة وبالتالي فإن قاعدة كوشي أقوى من قاعدة دآلمبار.

مثال:

لدينا السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

نضع $a_n=\frac{1}{n^2}=f(n)$.

أي
$$\begin{aligned}f:&[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+\\ &n\mapsto f(n)=\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$.

f مستمرة و متناقصة.

و منه

$$\begin{aligned}\lim_{A\to+\infty}\int_1^A f(n)dn&=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{1}{n^2}dn\\ &=\lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{n}\right]_1^A\\ &=1\end{aligned}$$

و بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة .

تمرين:

أدرس حسب قيم العدد الحقيقي الموجب $\propto$ تقارب السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\propto}}$

مثال:

السلسلتان $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3-n}$; $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ لهما نفس الطبيعة لأن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3-n}}{\frac{1}{n^3}}=1\in\mathbb{R}_+^*$$

مثال:

دراسة طبيعة السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2\log n}$ ، لنعتبر السلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_n}{V_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2\log n}\times n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n}=0$$

بما أن $\sum\frac{1}{n^2}$ سلسلة متقاربة فإن السلسلة $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2\log n}$ متقاربة.

مثال:

لنعتبر السلسلة : $\sum_{n\geq 1}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{2n+1}{2n+2}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=1$$

$$n\left(\frac{U_n}{U_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right)=\frac{n}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}<1$$

وبالتالي السلسلة متباعدة .

مثال:

لنعتبر السلسلة $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha\alpha}=1$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha}=1-\frac{\alpha}{n+1}+0\left(\frac{1}{n+1}\right)\ /\ \frac{0\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}\to 0$$ لما $n \to +\infty$

لأن النشر المحدود للتابع $x\mapsto(1+x)^{\alpha}$ من الرتبة n في جوار الصفر هو :

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\frac{x}{1!}+\alpha.(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!}+...+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

- إذا كانت $\alpha<1$ فان السلسلة متباعدة.
- إذا كانت $\alpha>1$ فان السلسلة متقاربة.

تطبيق:

أوجد القيمة التقريبية بتقريب 3-10 لمجموع السلسلة عددية $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^3}$

$$|S-S_n|<|R_{n+1}|\leq a_{n+1}\leq\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{(n+1)^3}\leq 10^{-3}$$
$$\Rightarrow n\geq 9$$

و بالتالي:

$|S-S_n|<10^{-3}$.

تمرين1:

أدرس طبيعة السلاسل المتتالية واحسب مجموعها في حالة التقارب:

$$1^0)U_n=\frac{1}{n^2+n};\quad 2^0)U_n=Log\left[1+\frac{2}{n(n+3)}\right];\quad 3^0)U_n=Arctg\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

$$4^0)U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n};\quad 5^0)U_n=Log\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right];\quad 6^0)U_n=3^{x^n}\cos(nx)$$

تمرين2:

لتكن $U_n\geq 0$ و $V_n\geq 0$

- بين أنه إذا كانت $\sum U_n$ متقاربة فإن السلسلة $\sum {U_n}^2$ متقاربة. هل العكس صحيح؟
- بين أنه إذا كانت $\sum U_n$ و $\sum V_n$ متقاربين فإن السلسلة $\sum \sqrt{U_n V_n}$ متقاربة. هل العكس صحيح؟
- بين أن السلسلتين $\sum U_n$ و $\sum Log(1+U_n)$ لهما نفس الطبيعة؟

تمرين 3:

أدرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام:

$$2°)U_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n} \quad 1°)U_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\propto}};$$

$$4°)U_n = \frac{n^{\log(n)}}{(\log(n))^n} \quad 3°)U_n = \frac{Sin^2(n)+(-1)^n n^{\alpha}}{n^{2\alpha}} \quad \propto = R;$$

تمرين 4:

1. بين أن السلسلة ذات الحد العام $U_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ متقاربة و غير متقاربة مطلقا.

ملاحظة:

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ لما $n \leftarrow +\infty$

2. أدرس طبيعة السلسلة ذات الحد العام مع a عدد حقيقي.

$$U_n = (-1)n - \cos\left[\pi\left(n+\frac{a^n}{u}\right)\right]$$

تمرين 5:

أدرس حسب قيم الوسيط $a \in R$ تقارب السلسلة.

$$\sum_{n-1}^{+\infty}[Cos(2na)+Sin(2na)]\frac{Log(1)}{n^{1/3}}$$

تمرين 6:

أدرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام:

$$2°)-U_n=\frac{2^n Sin^{2n}(a)}{n^2}/0\prec a\prec\frac{\pi}{2}\quad 1°)-U_n=\frac{n!}{n_n};$$

$$4°)-U_n=\frac{2.4.6................2a}{n^2}\quad 3°)-U_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n2};$$

تمرين 7:

أدرس طبيعة السلاسل التالية ذات الحد العام:

$$3^0)U_n=Cos\frac{1}{n}\quad 2°)U_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\quad 1°)U_n=\left(n^3-n\right)^{-1}$$

$$6°)U_m=ne^{-m2}\quad 5°)U_m=(nLogn)^{-1}\quad 4°)U_m=\frac{1}{\sqrt{n-1}}\log\frac{n}{n-2}$$

تمرين 8:

أدرس طبيعة السلاسل ذات الحد العام المعرف ب:

$$3°)U_n=(n+1)^{-\frac{1}{2}}(SinnLog)^2\quad 2°)U_n=e^{-\sqrt[4]{n^2+1}}\quad 1°)U_n=\frac{n^{Logm}}{(Logn)^m}$$

$$6°)U_n=\frac{(-1)^n}{n^2+Sinn^2}\quad 5°)U_n=\frac{(-1)^{m-1}n}{n^2-1}\quad 4°)U_n=\frac{(-1)^m}{n^4 3+Cosn}$$

$$8°)U_n=\frac{2^m Sin^{2n}\propto}{n^2},0\prec\propto\prec\frac{\pi}{2}\quad 7°)U_n=\frac{2.4.6..........2n}{n^n}$$

الحل :

1. وجه المقارنة:

أ- $\sum_{K=1}\frac{1}{2^K(2+\sin k)}$

لدينا $-1\leq\sin k\leq 1$

بإضافة العدد 2 نجد $1\leq\sin k+2\leq 3$

و منه $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin k} \le 1$

بالضرب في $\frac{1}{2^k}$ نجد $\frac{1}{2^k} \times \frac{1}{3} \le \frac{1}{2^k(2+\sin k)} \le \frac{1}{2^k}$

السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ هندسية فهي متقاربة.

و بالتالي السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{{}_2k(2+\sin k)}$ متقاربة.

ب- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}$

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^3+1 > n^3$

و منه : $\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{n}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$.

لكن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ متقاربة و بالتالي $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}$ا لسلسلة متقاربة .

2. اختبار الجذر النوني:

أ- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$

حساب $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n}$.

نضع $U_n = \frac{2^{3n+1}}{n^n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{3n+1}}}{\sqrt[n]{n^n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{\frac{3n+1}{n}}}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n} \\
&= 0 \\
&< 1
\end{aligned}$$

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$متقاربة.

ب- $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n$

حساب $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n}$.

نضع $U_n=\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{U_n} &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)\\ &=2>1\end{aligned}$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n+5)}{n+1}\right)^n$ متباعدة .

3. اختبار المقارنة النسبي:

أ- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}=a_n$

لدينا $\frac{3n^2}{2^n\times n^2}=\frac{3}{2^n}$ نضع $b_n=\frac{1}{2^n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3n^2+5n}{2^n\times(n^2+1)}}{\frac{1}{2^n}}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n\times(n^2+1)}\times 2^n\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+5n}{(n^2+1)}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2}{n^2}\\ &=3\\ &>1\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ سلسلة هندسية متقاربة و بالتالي السلسلة (a_n) متقاربة.

ب- $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}$

نضع : $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ مع $b_n = \frac{1}{n}$ •

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} \times n$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$
$$= 1 > 0$$

لكن السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة و بالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ السلسلة متباعدة •

1. <u>**اختبار النسبة :**</u> $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n}$

نضع : $a_n = \frac{4^n}{n}$ ز منه $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{n+1}$ •

حساب $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{n+1}}{\frac{4^n}{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{4^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 4\frac{n}{n+1}$$
$$= 4 > 1$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n}$ متباعدة

اختبار النسبة:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

نضع : $a_n = \frac{1}{n!}$ و منه $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ •

حساب $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)!}\times n!$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)}$$
$$=0$$

السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ متقاربة.

المتسلسلة باستخدام التعريف: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}$

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1\neq 0$

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n\,(n+2)}$ متباعدة

اختبار التقارب المتسلسلة المتناوبة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\,n}{n^2+1}$

نضع $(1)\ a_n=\frac{n}{n^2+1}$

و منه
$$a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$
$$=\frac{n+1}{n^2+2n+2}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}-\frac{n}{n^2+1}$$
$$=\frac{(n+1)(n^2+1)-n(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n^3+n^2+n+1)-(n^3+2n^2+2n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$
$$=\frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$
$$=\frac{-n^2-n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}\geq 0$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متناقصة .

ومن جهة أخرى .

$$(2) \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

و بالتالي السلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$ متقاربة.

اختبار التقارب المطلق والمشروط: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$

(1) بحث التناوب:

نضع : $(i)\ a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$

ومنه $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$.

حساب $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$$
$$= \frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}$$
$$= \frac{1}{(2n+1)(2n)} < 1$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متناقصة .

و من جهة أخرى $(ii) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0$

و بالتالي السلسلة متناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$ متقاربة.

اختبار رابي: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

نضع $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$ ومنه $a_{n+1} = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$

$$\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{(2n+1)!\ (2n+1)!}{(2n+3)!\ (2n-1)!}$$

$$=\frac{4n^2+2n}{4n^2+10n+6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{4n^2+2n}{4n^2+10n+6}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{4n^2+10n+6-4n^2-2n}{4n^2+10n+6}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{8n+6}{4n^2+10n+6}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{8n^2+6n}{4n^2+10n+6}\right)$$

$$=2>1$$

و منه السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$ متقاربة .

باستخدام اختبار التكامل: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{dn}{n}$

و منه

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{n\to+\infty}\int_2^{n}\frac{dx}{x}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln x\right]_2^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n-\ln 2\right)$$

$$=+\infty$$

و منه السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{dn}{n}$ متباعدة.

4 الدوالالعددية لمتغيرين حقيقيين:

مثال 1:

لتكن

$$f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

الدالة f محدودة.

باستخدام المتباينة $2|ab| \le a^2+b^2$ نستنتج أن $|f(x,y)| \le \frac{1}{2}$ وذاك من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

مثال 2:

لتكن

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = x^2+y^2$$

الدالة f محدودة من الأسفل بـ $(0,0)$.

لدينا $f(x,y) = x^2+y^2 \ge (0,0) = f(0,0)$ وذاك من أجل كل $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

النهايات :

تعريف :

نقول أن ℓ هي نهاية الدالة f عند (a_1,a_2).

و نكتب :

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = \ell$$

مثال 1:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+xy+y^2} = 0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \sqrt{x^2+xy+y^2}=1$.

مثال 2:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}=+\infty$ لان $x^2+y^2\to 0$ مع $x^2+y^2>0$.

تمرين محلول:

1. بين انه إذا كان x و y أعداد حقيقية لدينا:

$$2|xy|\le x^2+y^2$$

2. لتكن الدالة

$$f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- بين أنه من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ لدينا: $|f(x,y)|\le 4\|(x,y)\|_2$.
حيث $\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
- ثم استنتج ان f تقبل نهاية عند $(0,0)$.

الحل:

1- لدينا:

$$(|x|-|y|)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2|xy|\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 2|xy|$$

2- نبين أنه من أجل كل (x,y) من $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ أن: $|f(x,y)|\le 4\|(x,y)\|_2$.

يمكن كتابة العلاقة السابقة كمايلي : $|xy|\le \frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}$.

و منه نستنتج و بإستخدام المتراجحة المثلثية :

$$|f(x,y)|\le \frac{3\|(x,y)\|_2^2+\frac{\|(x,y)\|_2^2}{2}}{\|(x,y)\|_2}\le 4\|(x,y)\|_2$$

و منه $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)|=0$

4.1 الاستمرارية:

تعاريف :

- نقول أن الدالة $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مستمرة عند (a_1,a_2) إذا و فقط إذا كانت :

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y) = f(a_1,a_2).$$

- نقول أن الدالة $f: X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ مستمرة على X إذا و فقط إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من X.

تمرين محلول:

لتكن الدالة f معرفة على كمايلي :

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ حيث $(x,y) \neq (0,0)$

و $f(x,y) = (0,0)$ حيث $(x,y) = (0,0)$.

- هل الدالة f مستمرة عند $(0,0)$ ؟

الحل:

نضع $x = y = t$ و $t \to 0$ نجد: $f(t,t) = \dfrac{1}{2}$.

و بالتالي $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq (0,0)$ أي أن الدالة f غير مستمرة عند $(0,0)$.

4.2 الاشتقاقية:

المشتقات الجزئية:

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقين y,x و $m_0(x_0,y_0) \in D_f$.

تعريف 1:

إذا كانت الدالة $f_x : x \mapsto f(x,y_0)$ معرفة في جوار x_0 بحيث $(x_0,y_0) \in D_f$.

- إذا قبلت الدالة f_x الاشتقاق عند x_0 نقول أن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي x عند النقطة (x_0,y_0).
- و نرمز إلى هذه المشتقة بالرمز f_x' أو $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ بحيث:

$$\begin{aligned} f_x'(x_0,y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \end{aligned}$$

تعريف 2:

إذا كانت الدالة $f_y : y \mapsto f(x_0, y)$ معرفة في جوار y_0 بحيث $(x_0, y_0) \in D_f$.

- إذا قبلت الدالة f_y الاشتقاق عند y_0 نقول أن هذه المشتقة هي المشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغير الحقيقي y عند النقطة (x_0, y_0).
- و نرمز إلى هذه المشتقة بالرمز f_y' أو $\frac{\partial f}{\partial y}$ بحيث:

$$f_y'(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

ملاحظة:

إذا وجدت المشتقات الجزئية f_x' و f_y' نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق.

قاعدة:

مشتقة الدالة f هي مشتقتها بالنسبة لأحد المتغيرين مع إبقاء المتغير الثاني ثابت .

تمرين:

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي:

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 y^3.$$

احسب مايلي : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

الحل :

لدينا : $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^4 y^3$

و منه $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 y^3$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^4 y^2$ ،

بوضع y=2,x=1 نجد : $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 36$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12$.

تمرين:

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي:

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+y^2.$$

احسب مايلي : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ،$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

الحل :

لدينا : $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+y^2$

ومنه $f'_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ ، $f'_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$.

تمرين:

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي:

$$f:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=5x+y^3-2z^2.$$

احسب مايلي : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ،$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

الحل :

لدينا : $f:(x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=5x+y^3-2z^2$

و منه $f'_x(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=5$ ، $f'_y(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3y^2$ ،

$f'_z(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-4z$.

تمرين:

لتكن الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ كمايلي :

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=\frac{2x+y}{x^2+y^2}.$$

احسب مايلي : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ،$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

الحل :

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
$$=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-(2x+y)(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=\frac{2x^2+2y^2-4x^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=\frac{-2x^2+2y^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$f'_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
$$=\frac{\left(x^2+y^2\right)-(2x+y)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=\frac{x^2+y^2-4xy-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$=\frac{x^2-y^2-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

المشتقات الجزئية من رتب أعلى:

إذا كانت f دالة ذات متغيرين حقيقين y,x تقبل الاشتقاق مرتين ، فإننا نعرف المشتقات

الجزئية من الرتبة الثانية كمايلي:

1- $f''_{x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial x}f$.

2- $f''_{y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial y}f$.

3- $f''_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}f$.

4- $f''_{yx}=\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x\right)=\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}f$.

مثال:

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^4y^3$.

لدينا : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=4x^3y^3$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^4y^2$.

4.2.1 مبرهنة شوارتز:

إذا قبلت الدالة f في جوار (x_0,y_0) مشتقات جزئية f''_{xy} و f''_{yx} مستمرة ، فهي متساوية :

$$f''_{xy}=f''_{yx}$$

ملاحظة:

يمكن تعميم المبرهنة لعدة متغيرات و مشتقات جزئية ذات رتب اكبر من 2.

مثال:

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي:

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=x^2+xyz+xyz^3+z^2 .$$

لدينا: $f^{(3)}_{xz^2}(x,y,z)=6yz=f^{(3)}_{z^2x}(x,y,z)$.

4.2.2 معادلة لابلاس:

اذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق فمعادلة لابلاس هي : $f''_{xx}+f''_{yy}=0$.

مثال:

لتكن الدالة الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^2$ كمايلي: $f:(x,y)\mapsto f(x,y)=e^{-2y}Cos(2x)$.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ &=-2e^{-2y}sin(2x) \end{aligned}$$

و منه

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y)&=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\\ &=-4e^{-2y}cos(2x) \end{aligned} .$$

ومن جهة أخرى

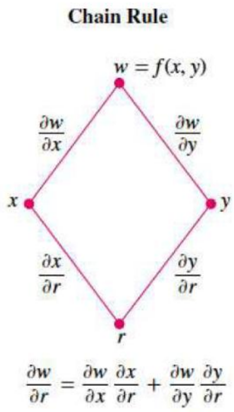
$$\begin{aligned} f'_y(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ &=-2e^{-2y}\cos(2x) \end{aligned}$$

و منه $f''_{yy}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

$= 4e^{-2y}\cos(2x)$

و بالتالي: $f''_{xx}+f''_{yy}=4e^{-2y}\cos(2x)-4e^{-2y}\cos(2x)=0$.

و منه الدالة حققت معادلة لابلاس.



4.2.3 المشتقات الدوال المألوفة: (قاعدة السلسلة)

إذا كانت $w=f(x,y)$ حيث $x=g(r,s)$ و $y=h(r,s)$ فإن:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \text{ و } \frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

مثال :

إيجاد $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ و $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ بدلالة r و s حيث: $w=x^2+y^2$، $x=r-s$، $y=r+s$.

لدينا $w'_x(x,y)=2x=2r-2s$ و $w'_y(x,y)=2y=2r+2s$.

$\dfrac{\partial x}{\partial r}=1$ ، $\dfrac{\partial x}{\partial s}=-1$ ، $\dfrac{\partial y}{\partial r}=1$ ، $\dfrac{\partial y}{\partial s}=1$.

ومنه $\dfrac{\partial w}{\partial r}=(2r-2s)\times 1+(2r+2s)\times 1=4r$.

و $\dfrac{\partial w}{\partial s}=(2r-2s)(-1)+(2r+2s)\times 1=4s$

4.3 تمارين :

تمرين 1:

أحسب f''_{x^2} ، f''_{x^2}، f''_{y^2}، f''_{xy}، f''_{yx} للدوال التالية :

1- $f(x,y)=\ln(xy)$.

2- $f(x,y)=x^2e^{3y}$.

3- $f(x,y)=e^{xy}$.

تمرين 2:

أثبت أن $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ للدوال التالية :

-1 $w(x,y)=\cos(x+y)+\sin(x-y)$.

-2 $w(x,y)=\cos(2x-2y)+e^{x}\sin(\alpha y)$.

تمرين 3:

بين أن للدوال التالية تحقق معادلة لابلاس :

.1 $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

.2 $f(x,y)=e^{-3x}\sin(3y)$.

تمرين 4:

اثبت أن $f''_{xy}=f''_{yx}$ لكل ممايلي :

.1 $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$.

.2 $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)$

.3 $f(x,y)=e^{-3x}\sin(3y)$.

تمرين 5:

باستخدام $f''_{xy}=f''_{yx}$ أوجد قيمة الثابت a و التي توجد من أجله الدالة $f(x,y)$ بحيث يكون $f'_x=axy+3y^2$ و $f'_y=x^2+6xy$.

تمرين 6:

إذا كانت $w=f(x,y)$ حيث $x=g(r,s)$ و $y=h(r,s)$.

باستخدام قاعدة السلسلة أحسب $\frac{\partial w}{\partial r}$ و $\frac{\partial w}{\partial s}$.

.1 $w=f(x,y,z)=xyz$ حيث $x=t$ ، $y=t^2$ و $z=t^3$.

.2 $w=f(x,y)=x^2-y^2$ حيث $x=\cos t$ و $y=\sin t$.

.3 $w=f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ حيث $x=2\cos t$ و $y=2\sin t$.

المراجع:

المراجع العربية:

1. سعود محمود، التحليل الرياضي، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
2. بابا حامد ،محاضرات في التحليل ، ديوان المطبوعات الجامعية، 1988.
3. بن عيسى لخضر ، التحليل الرياضي ، ديوان المطبوعات الجامعية، 2009.
4. حسن رجب محمد، أساسيات الرياضيات الجبر والهندسة التحليلية والإحصاء، دار الفجر للنشر و التوزيع، مصر، 2000.
5. أ.علي حميدة,التحليلدروسوتمارينمحلولةالجزء 2-3، جامعةمنتوريقسنطينة.

المراجع الأجنبية:

1. Classes prépas1er année MATHS MPSI par Pr Marie ALLANO-CHEVALIER et Pr Xavier OUDOT (HACHETTE supérieur).
2. Tous les exercices d'analyse PC-PSI Par Pr EL-HAJ LAAMRI ; Pr PHILIPPE CHATEAUX , Pr GÉRARD EGUETHER , Pr ALAIN MANSOUX , Pr DAVID RUPPRECHT et Pr LAURENT SCHWALD.
3. Analyse 2éme année PC-PC*-PSI-PSI*(HACHETTE supérieur).
4. Analyse Mathématique 1 UMONS université de Mons.
5. Allab K. : Eléments d'analyse, Office des Publications Universitaires, Alger, 1979.
6. Boukra M., Djadane A., Medjadi D. & Sadallah B.-K. : analyse mathématique, Office des Publications Universitaires, Alger, 1992.
7. Kolmogorov, Fomine : Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Ed. Mir, 1976
8. AnalyseDEUG Sciences 2e année G. A. Sedogbo ; Docteur en mathématiques.
9. Calcul des primitives, Bernard Ycart; Université Joseph Fourier, Grenoble.
10. Cours d'Analyse1; Laurent Schwartz-Professeur à l'école polytechniques et à la Faculté des sciences de Paris HERMANN,Paris 1967.
11. problèmes d'analyse I (nombres réels,suites et séries)exercices corrigés WieslawaJ, Kaczor et MariaT, Nowak.2008, EDP Sciences,
12. problèmes d'analyse III (intégration)exercices corrigés WieslawaJ, Kaczor et MariaT, Nowak. 2008, EDP Sciences.
13. Mathématiques en économie-gestion , Stéphane rossignol - openbook DUNOD 2015.

الفهرس

المراجع: 162