جـامـــــعـــــة ابن خلدون- تيارت-
كـلـيـة الـعـلـوم الاقـتـصـاديـــة، التجارية وعـلـوم الـتـسـيـيـــر

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى ل م د (LMD) بعنوان

محاضرات في الاحصاء2

مدعومة بتمارين محلولة

من إعداد:

الدكتور: بولعباس مختار

السنة الجامعية 2023/2022

المحور الأول

نظرية المجموعات، والتجربة العشوائية

1 – التجربة العشوائية: Random Experiment

وهي التجربة التي يكون جميع نتائجها معروفة سلفا، ولكن لا يمكن التنبؤ أو التكهن بنتيجة هذه التجربة بشكل أكيد، ومن الأمثلة على ذلك مايلي:

مثال1:قذف أو رمي قطعة نقود، تعتبر تجربة عشوائية لأننا نعلم أن لها نتيجتين (صورة أو كتابة)، ولكننا لا نستطيع تحديد نتيجة التجربة مسبقا.

مثال2:قذف قطعة نرد، تعتبر تجربة عشوائية لأننا نعلم ان لها ستة أوجه، ولكننا لا نستطيع تحديد نتيجة التجربة مسبقا.

2 – فضاء العينة (المجموعة الأساسية): Sample Space

فضاء العينة لتجربة عشوائية هي مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة، ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{S}$ أو Ω .

ويمكن أن يكون فضاء العينة منتهي (أي قابل للعد)، كما انه يمكن ان يكون غير منتهي (غير قابل للعد)

مثال1: النتائج الممكنة للتجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعة نقود هي: ظهور الكتابة ونرمز له بالرمز T أو ظهور الصورة H وعلى هذا يُعبر عن فضاء العينة لهذه التجربة كما يلي:

$$S=\{H,T\}$$

مثال2 : تجربة رمي قطعة نرد .

فضاء العينة أو المجموعة الأساسية لهذه التجربة هو: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

3– الحدث: Event

الحدث عبارة عن مجموعة جزئية من فضاء العينة S الموافقة لتجربة عشوائية E، *أي انه مجموعة من النتائج الممكنة، ويرمز للحدث برموز كبيرة مثل* A ، B ، C ، *.....الخ*

والحدث الذي يحتوي على مجموعة جزئية تتكون من عنصر واحد فقط من فضاء العينة S يسمى **بالحدث البسيط**، أما إذا كان عبارة عن مجموعة جزئية من المجموعة الأساسية S يحتوي على أكثر من عنصر واحد يسمى **بالحدث المركب.**

مثال1: فضاء العينة للتجربة الممثلة في رمي قطعة نرد هي: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

كل مجموعة جزئية من فضاء العينة S تسمى حدث.

$$A=\{1\}\ ,\ B=\{2,3\}\ ,\ C=\{4,5,6\}\ ,\ D=\{\ \},\ E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

مثال2: تجربة رمي قطعة نرد.

– المجموعة الأساسية لهذه التجربة هي: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

- الحدث $A=\{5\}$ عبارة عن حدث بسيط لانه يحتوي على عنصر واحد
- الأحداث $C=\{2,4,6\}$ $B=\{5,6\}$ $D=\{1,2,3,4,5\}$ و $F=\{1,2,3,4,5,6\}$ هي حوادث مركبة لانها تحتوي على اكثر من عنصر واحد.

3-1-الحدث الأكيد: Sure Event

الحدث الأكيد هو الحدث الذي يقع حتما مهما كانت نتيجة التجربة العشوائية، وعليه نستطيع القول بأن الحدث الأكيد هو الذي يحتوي على جميع عناصر (النتائج) فراغ العينة S، أي A=S .

مثال: لتكن التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعة نرد.

المجموعة الأساسية هي: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

الحدث A "الحصول على نتيجة أقل من 7": و عليه فإن: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

إذًا: A=S وعليه فإن الحدث A هو حدث أكيد.

3-2 - الحدث المستحيل: Impossible Event

هو الحدث الذي لا يمكن يتحقق، أي أنه لا يحتوي على أي عنصر من عناصر فراغ العينة S، وبالتالي الحدث المستحيل هو الحدث الذي يساوي المجموعة الخالية Ø

مثال: لتكن التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعة نرد.

المجموعة الأساسية هي: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

الحدث A "الحصول على نتيجة أكبر من 6": و عليه فإن: $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

إذًا لا يوجد أي عنصر من S يحقق الحدث A، وعليه فإن : $A=\{\ \}=\phi$

4- العمليات على الأحداث: Operations on Events

إن العمليات على الأحداث هي تلك العمليات المعرفة على المجموعات.

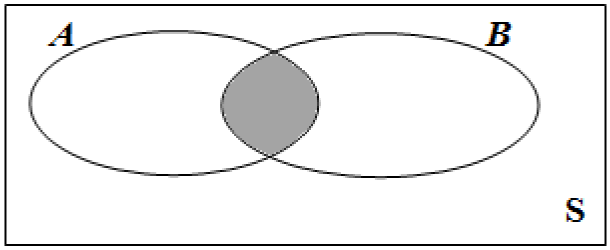
لنفرض أنه لدينا تجربة عشوائية E ، و S فراغ العينة لهذه التجربة ، وليكن A و B حادثان مرتبطين بهذه التجربة.

4-1 تقاطع حدثين: Intersection

نعرف تقاطع الحدثين A و B الحدث الذي يرمز له بالرمز $(A\cap B)$، والذي يتكون من العناصر التي تنتمي إلى A و تنتمي إلى B في آن واحد، أي:

$$(A \cap B) = \{x_i \in S \;\; ; \;\; x_i \in A \;\; and \;\; x_i \in B\}$$

وباستعمال مخطط فن نعبر عن التقاطع بالشكل التالي:

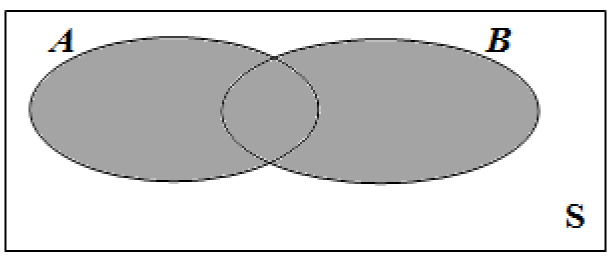


4-2-إتحاد (اجتماع) حدثين: Union

نعرف إتحاد الحدثين A و B الحدث الذي يرمز له بالرمز $(A \cup B)$ وهو الذي يتكون من العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي إلى كليهما $(A \cap B)$، و هذا ما يعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$(A \cup B) = \{x_i \in S \;\; ; \;\; x_i \in A \;\; or \;\; x_i \in B \;\; or \;\; x_i \in (A \cap B)\}$$

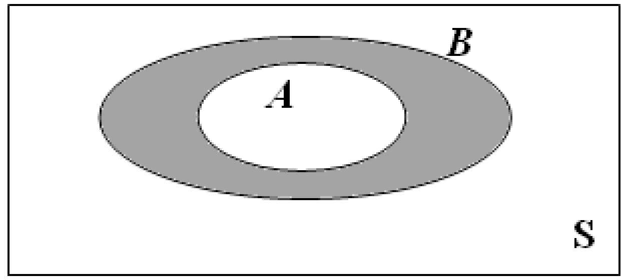
وباستعمال مخطط فن نعبر عن الاتحاد بالشكل التالي:



4-3-احتواء حدثين:

نقول أن الحدث A محتوى في الحدث B ،والذي يرمزله بالرمز $(A \subset B)$ إذا كان أي عنصر ينتمي إلى الحدث A ينتمي إلى الحدث B أيضا. $(A \subset B) \Rightarrow \forall \;\; x_i \in A \Rightarrow x_i \in B$

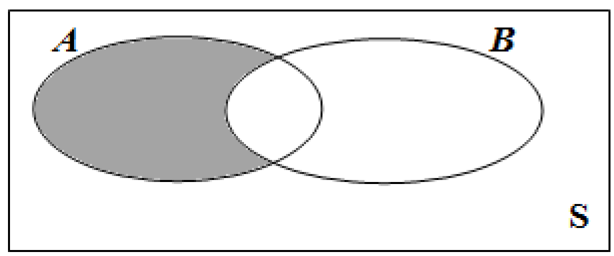
وباستعمال مخطط فن نعبر عن الاحتواء بالشكل التالي:



4-4-فـرق حدثين: Difference

نعرف فرق الحدثين A و B الحدث الذي يرمز له بالرمز $(A-B)$، والذي يتكون من العناصر التي تنتمي إلى الحدث A ولا تنتمي إلى الحدث B : $(A-B)=\left\{x_i \in S \;\; ; \;\; x_i \in A \;\; and \;\; x_i \notin B\right\}$

وباستعمال مخطط فن نعبر عن فرق حدثين بالشكل التالي:



حسب التعريف أعلاه نستطيع القول بأن الحدث $(A-B)$ يعني وقوع الحدث A وعدم وقوع الحدث B أو نقول وقوع الحدث A ووقوع الحدث $\overline{B}$ وعليه نكتب مايلي:

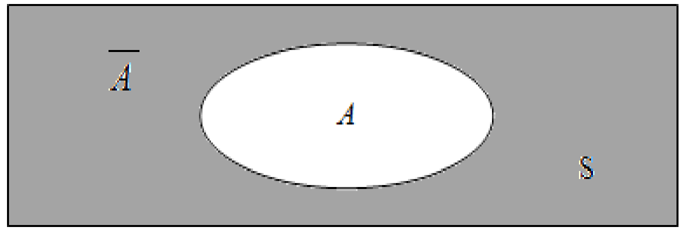
$$(A-B)=\left(A\cap\overline{B}\right)$$

4-5-الحدث المتمم (المعاكس): Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يرمز له بالرمز A^C أو $\overline{A}$ ويحتوي على كل عناصر (نتائج) التجربة العشوائية (عناصر المجموعة الأساسية S) التي لا يشملها الحدث A وتُكتب على النحو التالي:

$$A^C=\overline{A}=\left\{x_i \in S \;\; and \;\; x_i \notin A\right\}$$

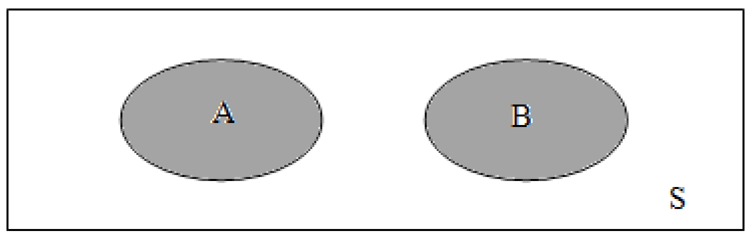
وباستعمال مخطط فن نعبر عن الحدث المتمم بالشكل التالي:



5- الأحداث المتنافيـة: Mutually Exclusive Events

الأحداث المتنافية هي الأحداث التي تمنع بعضها البعض، فنقول الحدثين A و B حدثان متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر، أي أن تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية بمعنى: $\phi = \{\ \} = (A \cap B)$

ونقول أن مجموعة الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ تكون أحداثا متنافية إذا كان كل اثنين منهما يمثلان أحداثا متنافية (متنافية مثنى مثنى)



6- الأحداث المستقلة: Independent Events

نقول أن الحدثين A وB مستقلان إذا كان حدوث أحدهما لا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الآخر، أي أن:

$(A \cap B) \neq \phi$

ونقول أن مجموعة الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ تكون أحداثا مستقلة إذا كانت لا تؤثر ولا تتأثر ببعضها البعض.

7-خواص الأحداث:

إن كل خواص المجموعات تبقى أيضا صحيحة من أجل الحوادث. هذه الخواص نوردها فيما يلي:

- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{A} \cup A = A \cup \overline{A} = S$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\overline{A} \cap A = A \cap \overline{A} = \phi$
- $S \cap A = A \cap S = A$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

قوانين مورقـان: Morgan's Law

لـ مورقان قانونين نوردهما فيما يلي:

1. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

مثـال: لنعتبر التجربة العشوائية الممثلة في اختيار بطريقة عشوائية رقم غير معدوم

المطلوب: حدد عناصر الحوادث التالية:

1. A الرقم المختار زوجي.
2. B الرقم المختار أكبر من 5.
3. C الرقم المختار أولي.
4. D الرقم المختار من مضاعفات 3.
5. $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ، $\overline{C}$ ، $\overline{D}$.
6. $(A \cap B)$ ، $(A \cap C)$ ، $(A \cap D)$.
7. $(B \cup C)$ ، $(C \cup D)$

الإجابـة:

المجموعة الأساسية أو فراغ الحوادث S الأولية لهذه التجربة S={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

1. A={2,4,6,8}
2. B={6,7,8,9}
3. C={2,3,5,7}
4. D={3,6,9}
5. $\overline{A}$={1,3,5,7,9}

6. $\overline{B}$ ={1,2,3,4,5}
7. $\overline{C}$ ={1,4,6,8,9}
8. $\overline{D}$ ={1,2,4,5,7,8}
9. A∩B ={6,8}
10.A∩C = {2}
11.A∩D = {6}
12.CUD = {2,3,5,7,6,9}
13.BUC = {6,7,8,9,2,3,5}

المحور الثاني
التحليل التوفيقي

1- طرق العد counting Methods

نعتمد في كثير من الأحيان على مبدأ العد في حل المسائل والتمارين، وبما أنه لا توجد طريقة عامة تطبق على كل المسائل، كان لزاما إيجاد طرق للعد يمكن استعمالها في حل بعض المسائل الخاصة ومنها.

1-1- المبادئ الأساسية للعد: Fundamental Principal of Counting

سوف نتطرق من خلال هذه الفقرة إلى القواعد الأساسية للعد. هذه القواعد تتمثل في قاعدتين هامتين هما:

- قاعدة الضرب.
- قاعدة الجمع.

أ- قاعدة الضرب: Rule of multiplication

إذا كان بالإمكان وقوع حادث لتجربة ما بـ m طريقة، وإذا كان بالإمكان وقوع حادث آخر بـ n طريقة ، فإن وقوع الحادث الأول و الحادث الثاني ينجز أو يتم بـ $m \times n$ طريقة.

ب- قاعدة الجمع: Addition Rule

إذا كان بالإمكان وقوع حادث لتجربة ما بـ m طريقة، وإذا كان بالإمكان وقوع حادث آخر بـ n طريقة ، فإن وقوع الحادث الأول أو الحادث الثاني ينجز أو يتم بـ: $m+n$ طريقة.

مثال: لنفرض أنه لدينا:

مجموعة تتكون من ثلاث طلبة A,B,C

مجموعة تتكون من طالبتين E,F

المطلوب:

بكم طريقة أو إمكانية يمكن اختيار طالب و طالبة.

بكم طريقة أو إمكانية يمكن اختيار طالب أو طالبة

الحل:

1- العملية الأولى اختيار طالب **و** العملية الثانية " اختيار طالبة " تحدثان معا تبعا لقاعدة الضرب بـ : $m \times n = 3 \times 2 = 6$ طريقة، بمعنى أنه يمكن اختيار طالب و طالبة بـ: 6 طرق.

2- العملية الأولى "اختيار طالب" **أو** العملية الثانية اختيار طالبة " تحدثان تبعا لقاعدة الجمع أعلاه بـ : $m+n=3+2=5$ طريقة، بمعنى أنه يمكن اختيار طالب أو طالبة بـ: 5 طرق.

2- التبديلات (المتبادلات): Permutations

هي عملية ترتيب أو تنظيم كل العناصر التي تنتمي لمجموعة ما، ونستطيع تقسيم التبديلات إلى قسمين هما:

2-1-التبديلات بدون تكرار:

العلاقة الرياضية التي يُرمز لها بالرمز $P(n)$ والتي تسمح لنا بإيجاد عدد تبديلات n عنصر كلها مختلفة تعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$P(n)=n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times..........\times 1$$

__مثال__: لنفرض أنه لدينا مجموعة من العناصر هي: 3 ، 5 ، 7.

المطلوب:

1. كم عدد مكون من 3 أرقام مختلفة يمكن تشكيله من عناصر المجموعة.

الإجابة:

لتشكيل أي عدد مكون من 3 أرقام مختلفة يكفي أن نغير ترتيب هذه الثلاثة عناصر أي الثلاثة أرقام وعليه فإن عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام مختلفة يساوي إلى عدد تبديلات هذه الثلاثة عناصر أي يساوي:

$$P(3)=3!=3\times(3-1)\times(3-2)=3\times 2\times 1=6$$

2-2-التبديلات بالتكرار

في بعض الحالات نريد إيجاد متبادلات مجموعة من العناصر ليست كلها مختلفة، أي يوجد ضمن هذه المجموعة عناصر متماثلة (متكررة). ففي هذه الحالة حتما أن العدد الإجمالي للمتبادلات يكون أقل، وبغرض الوصول إلى عدد المتبادلات نستعمل العلاقة الرياضية التالية:

$$P(n)=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times..........\times n_K!}$$

حيث أن:

n_1 عدد مرات تكرر عنصر ما.

n_2 عدد مرات تكرر عنصر ما يختلف عن الأول.

n_3 عدد مرات تكرر عنصر ما يختلف عن الأول والثاني.

....

....

n_K عدد مرات تكرر عنصر ما يختلف عن الأول و الثاني و

مثال: بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب الحروف الواردة في كلمة SCIENCES

الحل: نجد أن ثلاثة حروف مكررة مرتين في الكلمة هي: S, C, E

وعليه:

$$n=8 \qquad n_1=2 \qquad n_2=2 \qquad n_3=2$$

عدد الطرق هو:

$$P(n)=\frac{8!}{2!\times2!\times2!}=5040$$

<u>ملاحظة:</u> من أجل أي عدد صحيح n غير سالب، نعرف $n!$ (n عاملي) كمايلي:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times..........\times1$$

مع حالة خاصة: $0!=1$

مثال:

$$3!=3\times2\times1=6$$

$$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

3- الترتيبات: Arrangements

هي عملية ترتيب أو تنظيم بعض (جزء) العناصر التي تنتمي لمجموعة ما (ترتيب مجموعة جزئية مسحوبة من مجموعة كلية)، ونستطيع تقسيم الترتيبات إلى قسمين هما:

3-1-الترتيبات بدون تكرار:

من أجل إيجاد عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها مجموعة جزئية ذات r عنصر من أصل مجموعة كلية ذات n عنصر حيث أن كل مجموعة جزئية تسمى ترتيبة، يكون وفقا للعلاقة التالية: $A_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}$

<u>مثال</u>: لنفرض أنه لدينا مجموعة من العناصر هي: 3 ، 5 ، 7، 8، 9

المطلوب:

1. كم عدد مكون من 3 أرقام مختلفة يمكن تشكيله من عناصر المجموعة.

الحل:

$$A_r^n = A_3^5 \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

3-2-الترتيبات بالتكرار

من أجل إيجاد عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها مجموعة جزئية ذات r عنصر من أصل مجموعة كلية ذات n عنصر حيث أننا نسمح لأي عنصر من n أن يُختار أو يُسحب أكثر من مرة ، يكون وفقا للعلاقة التالية:

$$A_r^n = n^r$$

<u>مثال</u>: لنفرض أنه لدينا قفل يحتوي عل رمز سري مكون من 3 أرقام

المطلوب:

1. كم رقم سري يمكن تشكيله

الحل: يمكن تكوين 3 أرقام من مجموعة الأرقام 0، 1، 2، ....،9

وعليه يكون عدد الأرقام السرية التي يمكن تشكيلها هي 1000

$$A_3^{10} = 10^3 = 1000$$

4-التوافيـق: Combinations

في التوفيقات نركز الاهتمام على العناصر في حد ذاتها و ليس على ترتيب هذه العناصر، فمثلا إذا أخذنا مجموعتين جزئيتين تتكون من $r = 3$ عنصر (abc) ، فإنهما تعتبران مختلفتان إذا كانتا لا تحتويان على نفس العناصر (abc هي نفسها bac هي نفسها cab)

4-1-التوافيـق بدون تكرار

العلاقة الرياضية التي تسمح لنا بحساب عدد توافيق r عنصر مأخوذ من n عنصر حيث أن كل عنصر يستخدم مرة واحدة فقط هي كالتالي:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة من ثلاثة أشخاص من مجموعة مكونة من 7 أشخاص؟

الحل:

$$C_3^7=\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{210}{6}=35$$

4-2-التوفيقات بالتكرار:

في حالة التوفيقات بالتكرار فإن كل عنصر يمكن أن يتم اختياره أكثر من مرة واحدة.

والعلاقة الرياضية التي تسمح لنا بإيجاد أو حساب عدد توافيق r عنصر مأخوذ من n عنصر حيث أن كل عنصر يستخدم أكثر من مرة هي التالية:

$$C_n^r=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

4-3-خواص التوافيق:

هناك بعض العلاقات الخاصة في التوافيق والتي تساعدنا في عملية الحساب، وهي كالتالي:

- $C_n^0=1$
- $C_n^n=1$
- $C_n^1=n$
- $C_n^r=C_n^{n-r}$
- $C_n^r=C_{n-1}^r+C_{n-1}^{r-1}$

5- معاملات ذات الحدين: Binomial Coefficients

نُسمي الأرقام الناتجة من صيغة التوافيق بمعاملات ذات الحدين والتي تنبع من مفكوك ذات الحدين، وقد استطاع العالم الرياضي PASCAL أن يثبت كيفية الحصول على مفكوك المقدار $(x+y)^n$ ثم بعد ذلك تلاه نيوتن:

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r y^r x^{n-r}$$

مثال: أحسب $(x+y)^5$

$$(x+y)^5=\sum_{r=0}^{5} C_5^r y^r x^{5-r}$$

$$=C_5^0y^0x^{5-0}+C_5^1y^1x^{5-1}+C_5^2y^2x^{5-2}+C_5^3y^3x^{5-3}+C_5^4y^4x^{5-4}+C_5^5y^5x^{5-5}$$

$$=x^5+5yx^4+10y^2x^3+10y^3x^2+5y^4x^1+y^5$$

تقريب ستيرلنج للمضروبn! : n! **Stirling's Approximation to**

عندما تكون n كبيرة فإن إيجاد n! يكون غير عملي، وعليه نلجأ إلى التقريب على النحو التالي:

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\prod n}$$

6- الشجرة البيانية(الاحتمالية): Tree Diagram

هي طريقة تستخدم لإيجاد وحصر جميع النتائج الممكنة لحدوث عملية أو أكثر.

سوف نبين كيف نشكل الشجرة البيانية من خلال المثال التالي:

مثال: لتكن المجموعة E={1,3,7 }

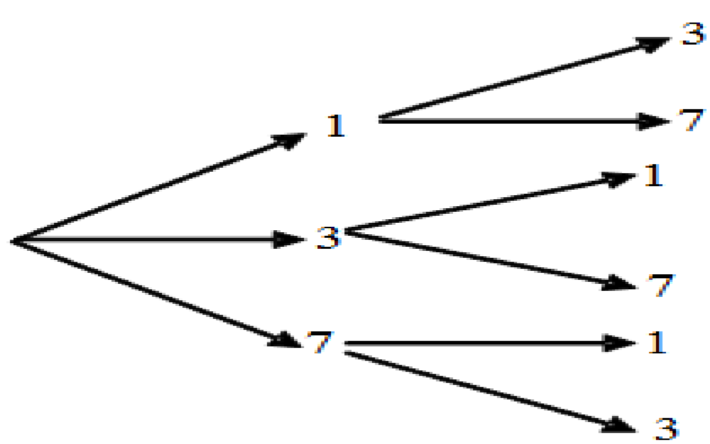
المطلوب:

1. كم عدد مكون من رقمين مختلفين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة E.
2. باستخدام الشجرة البيانية قم بذكر هذه الأعداد المتوصل إليها.

الإجابة:

1- عدد الطرق $A_r^n = A_2^3 \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

يمكن ترجمة الطرق إلى الشجرة الاحتمالية التالية:



2- الأعداد هي: 13، 17، 31، 37، 71، 73

المحور الثالث

نظرية الاحتمالات

1- التعاريف الأساسية للاحتمال:

1-1- التعريف الكلاسيكي (التقليدي) للاحتمال:

- لنفرض أنه لدينا تجربة عشوائية E و S فضاء العينة الموافق لهذه التجربة، والذي يتكون من عدد منتهي من النتائج (العناصر)، حيث أن $|S| = n$.

- وبافتراض أن جميع عناصر فضاء العينة متساوية الاحتمال أي متساوية احتمال الحدوث، حيث أن:

$$P(x_i) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{n}$$

أي: $$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = ... = P(x_i) = ... = P(x_n) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{n}$$

- إذا عرفنا الحدث A، فإن احتمال الحدث A الذي نرمز له بـ $P(A)$ حسب التعريف الكلاسيكي هو نسبة عدد الحالات الملائمة إلى عدد الحالات الممكنة أي:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة.}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$ أو

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحادث A}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة S}}$$

مثال: لتكن التجربة العشوائية الممثلة في قذف قطعة نرد.

فضاء العينة S لهذه التجربة العشوائية هي:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow |S| = 6$$

بناءا على تعريف الاحتمال أعلاه فإن احتمال الحوادث الأولية يعطى كما يلي:

$$P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = P(x_6) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{6}$$

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{6}$$

- إذا عرفنا الحدث A على انه الحصول على عدد زوجي.

ما هو احتمال الحادث A؟

عدد عناصر الحدث A هي:

$$A=\{2,4,6\}\Rightarrow |A|=3$$

وبتطبيق علاقة حساب الاحتمال، نجد أن احتمال الحادث A يساوي ما يل: $P(A)=\frac{|A|}{|S|}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0.50$

عيوب التعريف الكلاسيكي:

- يُشترط في تطبيقه أن يكون فضاء العينة منتهيا أي ذات عدد معلوم من العناصر
- يُشترط أن يكون لكل عناصر فضاء العينة نفس الاحتمال في الحدوث

وهذا مالا يمكن أن يتحقق فقد يكون فضاء العينة غير منتهي، أو لا يكون لعناصر فضاء العينة نفس الاحتمال في الحدوث.

1-2- التعريف الإحصائي للاحتمال (التجريبي)

إذا كان الحدث A المرتبط بتجربة عشوائية ما وكان S فضاء العينة المرتبط بهذه التجربة حيث يحتوي على عدد غير منتهي من العناصر، أو أن حجم المجتمع كبير.

أو أن عناصر فضاء العينة غير متساوية احتمال الحدوث فإن احتمال الحدث A يساوي:

$$P(A)=\frac{n}{N}$$

حيث أن:

- n: تمثل عدد مرات تحقق الحدث A عند انجاز التجربة العشوائية N مرة.
- N : تمثل عدد مرات انجاز أو القيام بالتجربة العشوائية

وحسب التعريف أعلاه يمكن أن نعتبر احتمال الحدث A على انه **التكرار النسبي** له أي:

$$P(A)=f(A)=\frac{n}{N}$$

عيوب التعريف الإحصائي:

قيمة الاحتمال $P(A)$ هي قيمة تقريبية ومتغيرة ومرتبطة بعدد مرات إجراء التجربة N ، أي أنه لا يمكننا معرفة قيمة الاحتمال إلا بعد إجراء التجربة.

1-3-الاحتمال حسب مسلمات كولمجوروف:

لنفرض أنه لدينا تجربة عشوائية E و S فضاء العينة الموافق لهذه التجربة، و A حدث مرتبط بهذه التجربة فإن احتمال حدوث A $(P(A))$ يمكن التعبير عنه بعدد حقيقي بحيث يحقق المسلمات (Axioms) التالية:

المسلمة الأولى: $0 \le P(A) \le 1$

المسلمة الثانية: $P(S)=1$ ، $P(\phi)=0$

المسلمة الثالثة: احتمال مجموعة من الأحداث $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ المتنافية مثنى مثنى (تقاطعها مثنى مثنى يساوي مجموعة خالية) يساوي إلى:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$$

بعبارة أخرى: $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

مثال 1: أسرة لديها ثلاثة اطفال، ما هو احتمال أن يكون لديها بنتان وولد علما أن للبنت والولد نفس الفرصة بالولادة؟

الحل:

إذا رمزنا للولد بـ(B) والبنت بـ(G) فإن فضاء العينة S سيكون كالتالي:

$$S = \{GGG, GGB, GBG, BGG, GBB, BGB, BBG, BBB\}$$

ولنعرف الحدث بـ A وعليه يكون لدينا:

$$A = \{GBB, BGB, BBG\} \Rightarrow |A| = 3$$

وبالتالي فإن:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{8}$$

2- خصائص الاحتمالات:

من خلال التعاريف السابقة يمكننا إيجاد الخصائص التالية:

2-1-احتمال الحدث المستحيل:

احتمال الحدث المستحيل يساوي الصفر أي أن:

$$P(\phi) = 0$$

البرهان:

ليكن الحدث A مرتبط بتجربة عشوائية E . يمكن أن نعتبر الحدث A على أنه عبارة عن إتحاد حدثين متنافيين هما الحدث A مع الحدث المستحيل ϕ و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$A \cup \phi = A$$

ندخل الاحتمال على الطرفين فنحصل على ما يلي:

$$P(A \cup \phi) = P(A)$$

بما أن الحدثين A و ϕ متنافيين فإن:

$$P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$$

بالتعويض في العلاقة الأخيرة أعلاه نحصل على ما يلي:

$$P(A) + P(\phi) = P(A)$$

و منه احتمال الحدث المستحيل ϕ يساوي ما يلي:

$$P(\phi) = P(A) - P(A)$$

$$P(\phi) = 0$$

2-2-احتمال الحدث المتمم (المعاكس):

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

2-3-احتمال فرق حدثين:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

أو

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

2-4-احتمال إتحاد حدثين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ويمكن تعميم علاقة احتمال اتحاد حادثين غير متنافيين إلى ثلاثة حوادث غير متنافية A, B, C

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

2-5-احتمال حدثين مرتبطين بالاحتواء :

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

3-الاحتمال الشرطي: Conditional Probability

لنعتبر التجربة العشوائية E، ولنفرض أنه في سياق هذه التجربة لدينا حدثين A و B.

إن احتمال الحدث A بوجود معلومة إضافية وهي حدوث الحدث B نسميه **بالاحتمال الشرطي**، حيث يرمز له بالرمز $P(A/B)$، **ويُقرأ احتمال الحدث A علما أن الحدث B قد وقع**، ويُعرف كمايلي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad ,P(B) > 0$$

وبالمثل يكون الاحتمال الشرطي للحدث B إذا عُلم حدوث A هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad ,P(A) > 0$$

<u>مثال:</u>

في تجربة عشوائية ممثلة في رمي قطعة نرد.

ليكن الحدث A الحصول على العدد 4، والحدث B هو الحصول على عدد زوجي

<u>المطلوب</u>: أوجد احتمال

1- الحدث A

2- الحدث B

3- الحصول على العدد 4، علما أن النتيجة المتحصل عليها هي عدد زوجي.

الحل:

فضاء العينة S لهذه التجربة العشوائية هي:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow |S| = 6$$

1- احتمال الحدث A هو:

$$A = \{4\} \Rightarrow |A| = 1$$

وعليه: $P(A)=\frac{1}{6}$

2- احتمال الحدث B هو:

$$B=\{2,4,6\}\Rightarrow |B|=3$$

وعليه: $P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3- احتمال الحصول على العدد 4، علما أن النتيجة المتحصل عليها هي عدد زوجي

في هذه الحالة يصبح فضاء العينة الجديد هو الحدث B أي: $S^{*}=B=\{2,4,6\}$

وعليه يصبح احتمال الحدث A كالتالي: $P(A)=\frac{1}{3}$

مثال :

احتمال ان ينطلق قطار لنقل البضائع في الوقت المحدد هو $P(A)=0.78$ ، واحتمال وصوله في الوقت المحدد إلى وجهته هو $P(B)=0.76$ ، كما إن احتمال الانطلاق والوصول في الوقت المحدد هو $P(A\cap B)=0.65$

المطلوب:

1- أوجد احتمال وصول القطار إلى وجهته في الوقت المحدد علما أنه انطلق في الوقت المحدد

2- أوجد احتمال انطلاق القطار في الوقت المحدد علما أنه وصل إلى وجهته في الوقت المحدد

3- أوجد احتمال وصول القطار إلى وجهته في الوقت المحدد علما أن لم ينطلق في الوقت المحدد

الحل:

1- $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.65}{0.78}=0.83$

2- $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.65}{0.76}=0.86$

3- $P(B/\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{1-P(A)}=\frac{0.76-0.65}{1-0.78}=\frac{0.11}{0.22}=0.50$

4- قاعدة الضرب للاحتمالات الشرطية: The Multiplication Rule For Conditional Probabilities

انطلاقا من علاقة الاحتمال الشرطي، وبضرب الطرفين في الوسطين، يمكن استنتاج العلاقتين التاليتين:

$$P(A\cap B)=P(B)\times P(A/B)$$
$$P(B\cap A)=P(A)\times P(B/A)$$

وبما أن التقاطع عبارة عن علاقة تبادلية فإن احتمال تقاطع A و B يكون كالتالي:

$$P(A\cap B)=P(B)\times P(A/B)=P(A)\times P(B/A)$$

يمكن تعميم قاعدة ضرب الاحتمالات إلى أكثر من حادثين لتشمل ثلاثة حوادث كالتالي:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\times P(B/A)\times P[C/(A\cap B)]$$

كما يمكن تعميم قاعدة ضرب الاحتمالات إلى أكثر من ثلاثة حوادث لتشمل عدة حوادث كما يلي:

$$P(A_1\cap.....\cap A_K)=P(A_1)\times P(A_2/A_1)\times P(A_3/(A_1\cap A_2))\times P(A_4/(A_1\cap A_2\cap A_3))\times..........$$
$$\times P(A_i/(A_1\cap A_2\cap A_3\cap.....\cap A_{i-1}))\times.......\times P(A_K/(A_1\cap A_2\cap A_3\cap.....\cap A_{K-1}))$$

مثال:

يحتوي كيس على 10 كرات منها 5 سوداء، و 3 حمراء و 2 بيضاء

نسحب على التوالي وبدون إعادة كرتين.

المطلوب: حساب احتمال الحوادث التالية:

1. الكرة الأولى سوداء والكرة الثانية حمراء.
2. إحدى الكرتين سوداء والكرة الأخرى بيضاء.

الإجابة: نعرف أولا الحوادث التالية:

- B_1: الكرة الأولى المسحوبة سوداء
- B_2: الكرة الثانية المسحوبة سوداء
- R_1: الكرة الأولى المسحوبة حمراء
- R_2: الكرة الثانية المسحوبة حمراء
- W_1: الكرة الأولى المسحوبة بيضاء
- W_2: الكرة الثانية المسحوبة بيضاء

1. احتمال الكرة الأولى سوداء و الكرة الثانية حمراء، أي $P(B_1\cap R_2)$

$$P(B_1\cap R_2)=P(B_1)\times P(R_2/B_1)=\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{6}$$

2. احتمال إحدى الكرتين حمراء و الكرة الأخرى زرقاء، أي $P[(B_1\cap W_2)\cup(W_1\cap B_2)]$

$$P[(B_1 \cap W_2) \cup (W_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap W_2) + P(W_1 \cap B_2)$$

$$= P(B_1) \times P(W_2 / B_1) + P(W_1) \times P(B_2 / W_1)$$

$$= \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$$

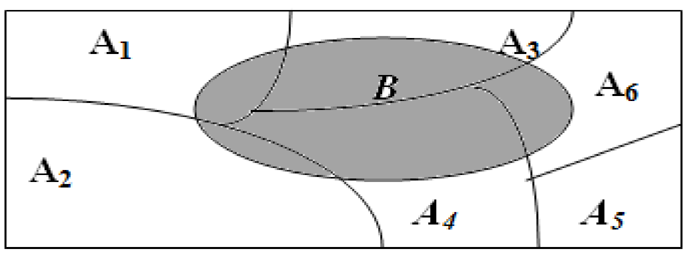
5- قانون الاحتمال الكلـي: Total Probability Law

لتكن التجربة العشوائية E، و S تمثل المجموعة الأساسية الموافقة لهذه التجربة، و لتكن $A_1, A_2, ..., A_n$ أحداث مرتبطة بالتجربة E، ولنفرض أن أي حدث من هذه الأحداث له احتمال غير معدوم أي $P(A_i) \neq 0 \quad ,i = 1,2,...,k$

إذا كان B حادث مرتبط بالتجربة E فإن:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup .... \cup (B \cap A_k)$$

يمكن توضيح فكرة علاقة الاحتمال الكلي من خلال المخطط التالي:



وبما أن الأحداث $(B \cap A_1), (B \cap A_2), ..., (B \cap A_k)$ متنافية فإن:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_k)$$

وباستعمال قانون الاحتمال الشرطي على العلاقة السابقة نستخلص قانون الاحتمال الكلي كالتالي:

$$P(B) = P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + ... + P(A_k)P(B / A_k)$$

أو

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \times P(B / A_i)$$

مثال:

نفرض أن طلبة كلية العلوم الاقتصادية يتوزعون على 3 شعب A، B، C بالنسب التالية على الترتيب: 30%، 45%، 25%. ونفرض أن نسب النجاح (الحدثS) للشعب الثلاث هي على الترتيب: 35%، 40%، 45%.

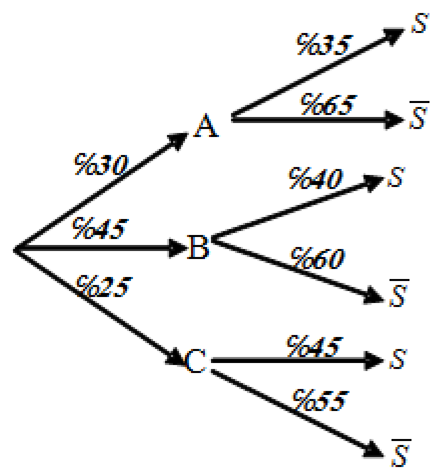
نختار عشوائيا طالبا من طلبة الكلية،

– ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب: ناجحا؟

– ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب: راسبا؟

الحل:

يمكن ترجمة الطرق إلى الشجرة الاحتمالية التالية:



حيث:

S : الطالب ناجح

$\overline{S}$: الطالب غير ناجح (راسب)

– احتمال أن يكون الطالب ناجحا:

$$
\begin{aligned}
P(S) &= P(A\cap S)+P(B\cap S)+P(C\cap S)\\
&= P(A)P(S/A)+P(B)P(S/B)+P(C)P(S/C)\\
&= 0.30\times 0.35+0.45\times 0.40+0.25\times 0.45=0.3975=39.75\%
\end{aligned}
$$

- احتمال أن يكون الطالب راسبا:

$$
\begin{aligned}
P(\overline{S}) &= P(A\cap \overline{S})+P(B\cap \overline{S})+P(C\cap \overline{S})\\
&= P(A)P(\overline{S}/A)+P(B)P(\overline{S}/B)+P(C)P(\overline{S}/C)\\
&= 0.30\times 0.65+0.45\times 0.60+0.25\times 0.55=0.6025=60.25\%
\end{aligned}
$$

أو

$$
P(\overline{S})=1-P(S)=1-0.3975=0.6025 \quad \Leftrightarrow \quad 60.25\%
$$

6- نظرية بايز : Bayes Theorem

تهدف نظرية بايز إلى حساب احتمالات صحة الفروض بناءا على معلومات ميدانية، فإذا كانت لدينا تجربة عشوائية تتكون من عدة مراحل، وإذا كان لنا علم بالنتيجة النهائية، فإن نظرية بايز تمكننا من معرفة الطريق الذي تم الحصول من خلاله على هذه النتيجة النهائية.

لتكن $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات جزئية من مجموعة جزئية S والمرتبطة بالتجربة E،

حيث : $i = 1,2,...,k$, $P(A_i) \neq 0$ من أجل أي حدث A من S لدينا:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P(B / A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i) \times P(B / A_i)}$$

مثال:

نفس المثال السابق (مثال الاحتمال الكلي)

المطلوب:

إذا علمت أن الطال المسحوب ناجح، ما هو احتمال أن يكون من الشعبة A ؟

الحل:

$$P(A / S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(A)P(S / A)}{P(S)} = \frac{0.30 \times 0.35}{0.3975} = 0.2642 \quad \Leftrightarrow \quad 26.42\%$$

7-الأحداث المستقلة: Independent Events

نقول أن الحدثين A و B مستقلان إذا كان وقوع أو عدم وقوع أحدهما لا يتأثر ولا يغير في احتمال وقوع أو عدم وقوع الآخر.

ونقول أن الحدث A مستقل عن الحدث B إذا كان الاحتمال الغير شرطي لحادث منهما يساوي الاحتمال الشرطي لهذا الحادث أي:

$$P(A / B) = P(A) \qquad \text{و} \qquad P(B / A) = P(B)$$

وباستعمال قاعدة ضرب الاحتمالات نجد أن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ويمكن تعميم العلاقة المتعلقة باستقلال الحوادث إلى أكثر من حادثين ليشمل عدة حوادث

ونقول أن الحوادث $A_1, A_2, ..., A_k$ مستقلة إذا كان:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_i \cap ... \cap A_K) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times .... \times P(A_k)$$

مثال:

لنعتبر التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعة مرتين.

نعرف الحوادث التالية:

A: مجموع النتيجتين عدد فردي.

B: عدد الوجه الأول 6.

المطلوب: هل الحادثين مستقلين.

الحل:

الفضاء العيني لهذه التجربة هو:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

الأحداث:

$$A = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$$

$$B = \{(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

$$(A \cap B) = \{(6,1),(6,3),(6,5)\}$$

بالتالي:

$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ و $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

بغرض معرفة فيما إذا كان الحادثين A و B مستقلين نحسب:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

وعليه فإن الحدثين مستقلان.

ملاحظة:

يجب التمييز بين الحوادث المستقلة والحوادث المتنافية، فنشير هنا بأن الحوادث غير المتنافية قد تكون مستقلة، وقد تكون غير مستقلة، في حين أن الحوادث المستقلة ليست حوادث متنافية.

المحور الرابع

المتغيرات العشوائية وأهم مميزاتها العددية

1. تعريف المتغير العشوائي

يعرف المتغير العشوائي على أنه دالة تربط كل حادث أولي e_i (نتيجة) من المجموعة الأساسية S ، بعدد حقيقي.

يرمز للمتغير العشوائي بحرف كبير (Lettre Majuscule) كما يلي: X أو Y أو Z …… ويرمز للقيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي بنفس الحرف ولكن مؤشر صغير (Par La Même Lettre Minuscule Indicée) كما يلي: $x_1, x_2, ..., x_n$ أو $y_1, y_2, ..., y_n$ أو $z_1, z_2, ..., z_n$ …..

وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

- المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)
- المتغير العشوائي المتصل (المستمر)

2. المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة):

نقول عن متغير عشوائي أنه متغير عشوائي متقطع أو منفصل إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها (الممكنة) هذا المتغير العشوائي معدودة أي قابلة للعد فقط سواء كانت هذه القيم محدودة (منتهية) أو غير محدودة (غير منتهية)، ومن أمثلة هده المتغيرات:

- عدد الأفراد في مجموعة من الأسر
- عدد الوحدات التالفة من انتاج مصنع ينتج 10 آلاف وحدة كل شهر

1.2.دالة الاحتمال لمتغير عشوائي متقطع:

نسمي دالة الاحتمال لمتغير عشوائي وليكن X الدالة التي ترفق بكل قيمة x_i من قيم المتغير العشوائي X احتمال $f(x_i) = \Pr(X = x_i)$

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يمكن أن يقدم أو يعطى على:

1. شكل جدول.
2. شكل بياني.
3. شكل علاقة رياضية.

مثال:

لنعتبر التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعة نقود مرتين. نعرف المتغير العشوائي Xكما يلي:

X : " **عدد مرات ظهور الصورة F**".

المجموعة الأساسية لهذه التجربة العشوائية هي S={PP,PF,FP,FF}.

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي $S_X=\{0,1,2\}$

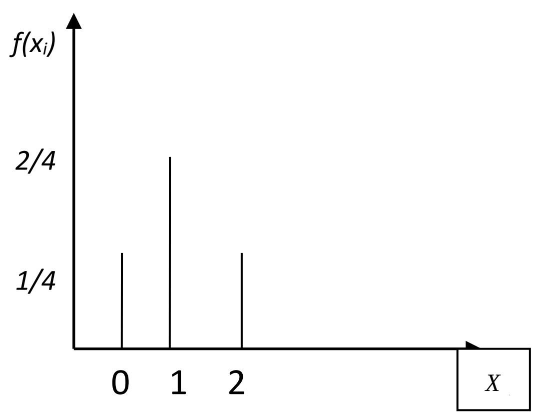
الاحتمالات الموافقة للقيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي التالية:

- $f(0) = P(X=0)=P[\ (PP)\ ]=1/4$
- $f(1) = P(X=1)=P[\ (PF)\ ,\ (FP)\ ]=2/4$
- $f(2) = P(X=2)=P[\ (FF)\ ]=1/4$

وعليه التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يقدمه الجدول التالي:

$X=x_i$	$f(x_i) = \Pr(X = x_i)$
0	1/4
1	2/4
2	1/4
المجموع	1

– **التوزيع الاحتمالي في شكل بياني:** بالإضافة إلى عرض التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي عن طريق الجدول يمكن عرض وتقديم التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي بيانيا كما يلي:



– **التوزيع الاحتمالي في شكل علاقة رياضية:** بالإضافة إلى العرض الجدولي والبياني للتوزيع الاحتمالي يمكن أن نقدم هذا الأخير على شكل علاقة رياضية كما يلي: $f(x_i)=P(X=x_i)=\frac{C_2^{xi}}{4};x_i=0,1,2$

2.2. دالة التوزيع لمتغير عشوائي متقطع:

في بعض الحالات يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو تساوي قيمة معينة من القيم الممكنة من قيم المتغير العشوائي، ونسمي هذا النوع من الدوال بدالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X (وهي دالة تجميعية).

يرمز لهذه الدالة بالرمز $F(x)$ ***وتعرف بالصيغة التالية:*** $F(x)=P(X\le x_i)=\sum_{x\le x_i}f(x_i)$

حيث تحقق دالة التوزيع الشروط التالية:

1. دالة التوزيع تأخذ قيم ضمن المجال [0,1] $0\le F(x)\le 1$

2. $F(a)=0$ إذا كانت $a\prec x_i$ حيث أن x_i هي أصغر قيمة للمتغير العشوائي X

3. $F(a)=1$ إذا كانت $a\ge x_J$ حيث أن x_J هي أكبر قيمة للمتغير العشوائي X

4. دالة التوزيع متزايدة وغير متناقصة.

إذا كانت $F(x)$ *دالة* التوزيع للمتغير العشوائي X فإن:

$$P(X>x_i)=1-F(x_i)$$

$$P(x_i<X\le x_j)=F(x_j)-F(x_i)$$

3.2. المميزات العددية للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

1.3.2. التوقع (الأمل) الرياضي:

يمثل التوقع الرياضي أو الأمل الرياضي أكثر المميزات العددية استخداما لوصف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي ما، ويمثل القيمة المتوسطة لهذا المتغير، حيث يصف مركز التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

يرمز للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي X بالرمز $E(X)$ أو μ ويساوي إلى مجموع القيم x_i للمتغير العشوائي مضروبة في الاحتمالات $f(x_i)$ الموافقة لهذه القيم، وهذا ما يعبر عنه رياضيا بالعلاقة التالية:

$$E(X)=x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+..........+x_i f(x_i)+.........+x_n f(x_n)$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{i} x_k \times f(x_k)$$

خواص التوقع الرياضي:

- إذا كان C عدد ثابت فإن: $E(C)=C$
- *إذا كان C عدد ثابت مضروب في X فإن:* $E(cX)=cE(X)$
- *إذا كان C و a عددان ثابتان فإن:* $E(cX+a)=cE(X)+a$
- *إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين لنفس التجربة فإن:* $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- *إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:* $E(X\times Y)=E(X)\times E(Y)$
- *إذا كان $Y=g(X)$ أي أن Y دالة للمتغير العشوائي X فإن Y هو نفسه متغير عشوائي توقعه الرياضي $E(Y)$ حيث أن:* $E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{i} g(x_k)\times f(x_k)$

2.3.2.التبـايـن:

التباين للمتغير العشوائي X هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن متوسطها (التوقع الرياضي) ويرمز له بالرمز $V(X)$ أو σ^2. ويحسب بتطبيق العلاقة التالية:

$$V(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

ولبرهان العلاقة السابقة فإن:.

$$V(X)=E[X-E(X)]^2=\sum_{k=1}^{i}[x_i-E(X)]^2\times f(x_k)$$

$$\sum_{k=1}^{i}[x_i-E(X)]^2\times f(x_k)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2+(E(X))^2-2x_iE(X)\right]f(x_i)=\sum x_i^2 f(x_i)+\sum(E(X))^2 f(x_i)-\sum 2x_iE(X)f(x_i)$$

$$=\sum_{k=1}^{i}x_i^2 f(x_k)+(E(X))^2\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-2E(X)\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)=\sum_{k=1}^{i}x_i^2 f(x_k)+(E(X))^2-2E(X)E(X)$$

$$=\sum_{k=1}^{i}x_i^2 f(x_k)+(E(X))^2-2(E(X))^2=\sum_{k=1}^{i}x_i^2 f(x_k)-(E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

– خواص التباين:

- إذا كان C عدد ثابت فإن: $V(C)=0$
- *إذا كان* C *عدد ثابت مضروب في* X *فإن:* $V(cX)=c^2V(X)$
- *إذا كان* C *و* a *عددان ثابتان فإن:* $V(cX+a)=c^2V(X)$
- *إذا كان* X *و* Y *متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:* $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

ملاحظة: هذه النظريات تنطبق فقط على التباين لذا في حالة الانحراف المعياري يجب تحويلها إلى تباينات قبل التطبيق

3.3.2. الانحـراف المعيـاري:

يرمز للانحراف المعياري للمتغير العشوائي X بالرمز σ . والذي يمثل الجذر التربيع الموجب لتباين هذا المتغير العشوائي وهذا ما يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\sigma^2}$$

مثال:

لنعتبر التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعتي نرد. نعرف المتغير العشوائي X كما يلي:

X يمثل "**مجموع النتيجتين المتحصل عليهما**"

- أوجد دالة التوزيع $F(x)$
- أحسب $P(X\geq 9)$, $P(2\leq X<5)$ ، $P(4<X\leq 8)$
- احسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

<u>الحل</u>

<u>*** العمود الثالث (3) للجدول أدناه يقدم** $F(x)$</u>

(1)	(2)	*(3)	(4)	(5)
$X=x_i$	$f(x_i)=\Pr(X=x_i)$	$F(x_i)=\Pr(X\leq x_i)$	$E(X)=\sum_{k=1}^{i} x_k\times f(x_k)$	$E(X^2)$
02	1/36	1/36	2/36	4/36
03	2/36	3/36	6/36	18/36
04	3/36	6/36	12/36	48/36
05	4/36	10/36	20/36	100/36
06	5/36	15/36	30/36	180/36

07	6/36	21/36	42/36	294/36
08	5/36	26/36	40/36	320/36
09	4/36	30/36	36/36	324/36
10	3/36	33/36	30/36	300/36
11	2/36	35/36	22/36	242/36
12	1/36	36/36	12/36	144/36
المجموع	1		7	54.83

بغرض حساب $P(4<X\leq 8)$، لدينا الاختيار بين الطريقتين التاليتين:

- جمع احتمالات القيم المحصورة ضمن المجال أعلاه:وذلك باستعمال دالة الاحتمال ويتم ذلك كما يلي:

$$P(4<X\leq 8) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + P(X=8)$$

$$Pr(4<X\leq 8) = f(5) + f(6) + f(7) + f(8)$$

$$P(4<X\leq 8) = \frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

- أو بتطبيق العلاقة : $P(x_i < X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i)$ وذلك باستعمال دالة التوزيع كمايلي:

$$P(4<X\leq 8) = F(8) - F(4) = \frac{26}{36}-\frac{6}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

* بغرض حساب $P(2\leq X<5)$، لدينا الاختيار بين الطريقتين التاليتين:

- جمع احتمالات القيم المحصورة ضمن المجال أعلاه: ويتم ذلك باستعمال دالة الاحتمال كما يلي:
  - $P(2\leq X<5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$
  - $P(2\leq X<5) = f(2) + f(3) + f(4)$
  - $P(2\leq X<5) = \frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
- أو بتطبيق العلاقة التالية: $P(x_i < X \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i)$، وذلك باستعمال دالة التوزيع كمايلي:
  - $P(2\leq X<5) = P(1<X\leq 4) = F(4) - F(1) = \frac{6}{36}-0=\frac{6}{36}$

* بغرض حساب $Pr(X\geq 9)$، لدينا الاختيار بين الطريقتين التاليتين:

- جمع احتمالات القيم المحصورة ضمن المجال أعلاه باستعمال دالة الاحتمال: و يتم ذلك كما يلي:

$$P(X\geq 9) = P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12)$$

P(X≥9) = f(9) + f(10) + f(11) + f(12)

P(X≥9) = $\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}=\frac{1}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

- أو بتطبيق العلاقة: $P(X > x_i) = 1 - F(x_i)$ وذلك باستعمال دالة التوزيع كمايلي:

P(X≥9) = P(X>8) = 1 - F(8) = $1-\frac{26}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{11} x_k \times f(x_k)$$

$$E(X)=x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+\dots\dots\dots.+x_i f(x_i)+\dots\dots\dots+x_n f(x_n)$$

$$E(X)=2\left(\frac{1}{36}\right)+3\left(\frac{2}{36}\right)+4\left(\frac{3}{36}\right)+5\left(\frac{4}{36}\right)+6\left(\frac{5}{36}\right)+7\left(\frac{6}{36}\right)+8\left(\frac{5}{36}\right)+9\left(\frac{4}{36}\right)+10\left(\frac{3}{36}\right)+11\left(\frac{2}{36}\right)+12\left(\frac{1}{36}\right)$$

$$E(X)=7$$

حساب التباين

$$V(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

$$V(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

نقوم بحساب $E(X^2)$ كمايلي:

$$E(X^2)=(2)^2\left(\frac{1}{36}\right)+(3)^2\left(\frac{2}{36}\right)+(4)^2\left(\frac{3}{36}\right)+(5)^2\left(\frac{4}{36}\right)+(6)^2\left(\frac{5}{36}\right)+(7)^2\left(\frac{6}{36}\right)+(8)^2\left(\frac{5}{36}\right)+(9)^2\left(\frac{4}{36}\right)+(10)^2\left(\frac{3}{36}\right)+(11)^2\left(\frac{2}{36}\right)$$
$$+(12)^2\left(\frac{1}{36}\right)=\frac{1974}{36}=54{,}83$$

ومنه:

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=54{,}83-(7)^2=54{,}83-49=5{,}83$$

حساب الانحراف المعياري

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{5{,}83}=2.41$$

3. المتغيرات العشوائيـة المستمرة (المتصلـة):

المتغير العشوائي المستمر هو الذي يأخذ قيما متصلة، أي مجموعة من القيم الغير محدودة ولا نهائية وغير معدودة ، هذه القيم تشكل بدون انقطاع نقاط على محور موجه أو مجالات. كأمثلة عن هذا النوع من المتغيرات العشوائية نذكر ما يلي:

- أوزان مجموعة من الأفراد بالكيلوغرام $X = x : 50 \le X \le 80$
- فترة صلاحية منتج ما بالأيام $X = x : 3 \le X \le 7$
- اختيار عدد حقيقي محصور بين 0 و 1 أو ضمن المجال $[0,1]$: هناك عدد لا نهائي من الأعداد الحقيقية ضمن هذا المجال

1.3. دالـة الكثافـة الاحتماليـة لمتغير عشوائي مستمر:

للمتغيرات العشوائية المتقطعة دالة الاحتمال أما المتغيرات العشوائية المستمرة فلها دالة كثافة احتمالية والذي يرمز لها بالرمز $f(x)$.وهي عبارة عن منحنى متصل موافق لقيم مجال معين و ليكن $[a,b]$، ***أي هي المساحة المرافقة للمجال ، وتعرف دالة الكثافة*** بالكتابة التاليـة:

$$X \in [a,b] = P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

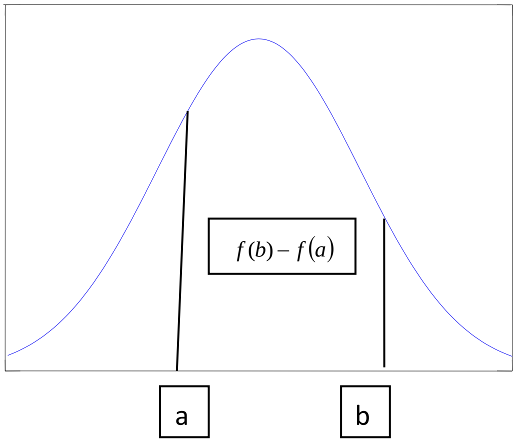
وتحقق دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ الشرطين التاليين:

- غير سالبة أي أن $f(x) \ge 0$
- تكامل دالة الكثافة الاحتمالية على جميع قيم المتغير العشوائي يساوي الواحد $\int_x f(x)dx = 1$

كما يعرف احتمال أن يقع المتغير العشوائي X في المجال $[a,b]$ كمايلي:

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b) &= \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{a} f(x)dx - \int_{b}^{+\infty} f(x)dx \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

وهي عبارة عن المساحة المحصورة بين a و b كما هو موضح في الشكل التالي:



2.3. دالة التوزيع للمتغير العشوائي المستمر:

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر X يرمز لها بالرمز $F(x)$ وتقدم وفقا للعلاقة التالية:

$$F(x)=\Pr(X \leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

3.3. المميزات العددية للمتغيرات العشوائية المستمرة:

1.3.3. التوقع (الأمل) الرياضي:

كم ذكرنا سابقا يرمز للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر X بالرمز $E(X)$ أو μ ويساوي في هذه الحالة إلى تكامل دالة الكثافة الاحتمالية على مجال تعريفها، وهذا ما يعبر عنه رياضيا بالعلاقة التالية:

$$E(X)=\int_{x} xf(x)dx$$

2.3.3. التباين:

التباين للمتغير العشوائي المستمر X هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن متوسطها (التوقع الرياضي) و يرمز له $V(X)$ أو σ^2. ويحسب بتطبيق العلاقة التالية:

$$V(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

ولبرهان العلاقة السابقة فإن:.

$$= \int_x [x-E(X)]^2 f(x)dx \; V(X)=E[X-E(X)]^2$$

$$= \int_x \left[x^2 + (E(X))^2 - 2xE(X)\right] f(x)dx =$$

$$= \int_x x^2 f(x)dx + \int_x (E(X))^2 f(x)dx - \int_x 2xE(X)f(x)dx$$

$$= \int_x x^2 f(x)dx + (E(X))^2 \int_x f(x)dx - 2E(X)\int_x xf(x)dx$$

$$= \int_x x^2 f(x)dx + (E(X))^2 - 2E(X)^2$$

$$= \int_x x^2 f(x)dx - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

3.3.3. الانحـراف المعيـاري:

يرمز للانحراف المعياري للمتغير العشوائي X بالرمز σ . والذي يمثل الجذر التربيع الموجب لتباين هذا المتغير العشوائي وهذا ما يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي مستمر تابع كثافته الاحتمالية $f(x)$ يعطى كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{1}{12} & 0 \le x \le 3 \\ 0 & x \notin [0,3] \end{cases}$$

- **المطلـوب:**

1. أوجد الاحتمالات التالية $P(1 \le X \le 2)$ ، $P(X \ge 1)$
2. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي $F(x)$
3. أحسب كل من التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

الحل:

1. **حساب:** $P(1 \le X \le 2)$:

$$\Pr(1 \le X \le 2)=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{12}x\right]_1^2=\left[\frac{1}{12}(2)^2+\frac{1}{12}(2)\right]-\left[\frac{1}{12}(1)^2+\frac{1}{12}(1)\right]=\frac{4}{12}$$

حساب: $P(X \ge 1)$

$$P(X \ge 1)=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{12}x\right]_1^3=\left[\frac{1}{12}(3)^2+\frac{1}{12}(3)\right]-\left[\frac{1}{12}(1)^2+\frac{1}{12}(1)\right]=\frac{10}{12}$$

2. حساب دالة التوزيع $F(x)$

$$F(x)=\Pr(X \le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^x f(x)dx==\int_0^x\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{12}x\right]_0^x$$

$$=\left[\frac{1}{12}(x)^2+\frac{1}{12}(x)\right]-\left[\frac{1}{12}(0)^2+\frac{1}{12}(0)\right]=\frac{1}{12}\left(x^2+x\right)$$

$$F(x)=\frac{1}{12}\left(x^2+x\right)$$

3. حساب $E(X)$:

$$E(X)=\int_x xf(x)dx=\int_0^3 x\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}\right)dx=\int_0^3\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{12}x\right)dx=\left[\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{24}x^2\right]_0^3$$

$$E(X)=\left[\frac{1}{18}(3)^3+\frac{1}{24}(3)^2\right]-\left[\frac{1}{18}(0)^3+\frac{1}{24}(0)^2\right]=1.875$$

حساب $V(X)$:

نقوم أولا بحساب $E(X^2)$

$$E(X^2)=\int_x x^2 f(x)dx=\int_0^3 x^2\left(\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}\right)dx=\int_0^3\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^2\right)dx=\left[\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{36}x^3\right]_0^3$$

$$=\left[\frac{1}{24}(3)^4+\frac{1}{36}(3)^3\right]-\left[\frac{1}{24}(0)^4+\frac{1}{36}(0)^3\right]=4.125$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=4.125-(1.875)^2=0.609$$

حساب الانحراف المعياري

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{0.609}=0.780$$

ملاحظة: في حالة متغير عشوائي مستمر لا فرق بين الإشارة (> و ≤) وكذلك بين (< و ≥)، على عكس المتغير العشوائي المتقطع حيث من الضروري التفريق بين هذه الاشارتين

4. متراجحة ماركوف: Inégalité De Markov

تطرقنا سابقا إلى أن حساب احتمال متغير عشوائي:

- يساوي قيمة معينة في حالة المتغير العشوائي المتقطع
أو
- ينتمي إلى مجال معين من القيم $[a,b]$. في حالة المتغير المستمر

إضافة إلى ذلك فإنه يمكننا إيجاد أو حساب **الحد الأعلى** لاحتمال أن يكون المتغير العشوائي وليكن X أكبر أو يساوي قيمة معينة موجبة و لتكن C حيث أن $C>0$، أي يمكن معرفة الحد الأعلى لـ: $P(X \geq C)$.

إذا كان لدينا:

- C عدد موجب أي $C>0$.
- X متغير عشوائي موجب توقعه الرياضي $E(X)$.

فإنه يمكننا كتابة متراجحة ماركوف كمايلي:

$$P(X \geq C) \leq \frac{E(X)}{C}$$

بمعنى أن الحد الأعلى للاحتمال $P(X \geq C)$ هو القيمة $\frac{E(X)}{C}$، وهو لا يتعدى هذه القيمة.

5. متراجحة تشبشف Inégalité De Bienaymé-Tchebychev

ليكن لدينا ما يلي:

- X متغير عشوائي توقعه الرياضي $E(X)$، تباينه $Var(X)=\sigma^2$ و انحرافه المعياري σ.
- k عدد حقيقي

فإن:

$$P(|X-E(X)| \geq k) \leq \frac{Var(X)}{k^2}$$

و بما أن الحادث المعاكس للحادث: $|X-E(X)| \geq k$ هو $|X-E(X)| < k$ فإن:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < k\right) \geq 1 - \frac{Var(X)}{k^2}$$

ملاحظة

نلجأ لاستعمال كل من متراجحة Markov ومتراجحة Tchebychev في حساب حد أعلى أو حد أدنى لاحتمالات المتغيرات العشوائية في حالة عدم معرفة التوزيع الاحتمالي لها (دالة احتمالها)، بل يعرف فقط توقعها الرياضي بالنسبة لمتراجحة Markov وتوقغها الرياضي وتباينها بالنسبة لمتراجحة Tchebychev.

مثال: بافتراض أن انتاج مصنع لمنتج دوائي خلال يوم واحد عبارة عن متغير عشوائي X ذو توقع رياضي يساوي 950

- أحسب احتمال أن الإنتاج اليومي للمصنع يتعدى 1000 علبة من المنتج الدوائي.

لا يمكن حساب الاحتمال المطلوب لأننا لا نعلم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، لكن يمكن حساب الحد الأعلى للاحتمال وهذا باستخدام متراجحة ماركوف Marcov و يتم ذلك كما يلي:

- $C = 1000 > 0$
- $E(X) = 950$

متراجحة ماركوف Marcov تعطى وفقا للصيغة التالية:

$$P(X \geq C) \leq \frac{E(X)}{C}$$

بتعويض المعطيات أعلاه في المتراجحة نحصل على ما يلي:

$$P(X \geq 1000) \leq \frac{950}{1000} = 0.95$$

احتمال أن الحد الأعلى للإنتاج يتعدى 1000 وحدة هو 0.95.

إضافة إلى المعلومات السابقة نعلم أن التباين الشهري يساوي 250

المطلوب:

- أحسب احتمال أن الإنتاج اليومي للمصنع يكون محصور بين 900 و 1000 قطعة.

في هذه الحالة يمكن استخدام متراجحة Tchebychev. وذلك كما يلي:

- $k = 1000 - 900 = 100 > 0$

- $E(X)=950$
- $V(X)=250$

بتعويض المعطيات أعلاه في المتراجحة نحصل على ما يلي:

- $P(|X-950|\geq 100)\leq \frac{250}{100^2}=0.025$

و بما أن الحادث المعاكس للحادث: $|X-950|\geq 100$ هو $|X-950|<100$ فإن:

$$P(|X-950|<100)\geq 1-\frac{250}{100^2}=0.975$$

تمارين محلولة

التمرين 1:

في التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعتي نرد، نعرف المتغير العشوائي X على أنه "**الفرق بين النتيجتين المتحصل عليهما**".

- **المطلـوب:**

1. أوجد تابع الاحتمال $f(x_i)$ للمتغير العشوائي X
2. أوجد تابع التوزيع الاحتمالي $F(x_i)$ للمتغير العشوائي X.
3. أحسب $P(X\geq 3)$ ، $P(X<2)$
4. أحسب التوقع الرياضي، والانحراف المعياري

حل التمرين 1

دالة الاحتمال في الخانة (2)، ودالة التوزيع الاحتمالي في الخانة (3)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
X=x$_i$	***f*(x$_i$) = Pr(X=x$_i$)**	***F*(x$_i$) = Pr(X≤x$_i$)**	***(1)*(2)*** $E(X)=$	$E(X^2)$
0	6/36	6/36	0	0
1	10/36	16/36	10/36	10/36
2	8/36	24/36	16/36	32/36
3	6/36	30/36	18/36	54/36
4	4/36	34/36	16/36	64/36

5	2/36	36/36	10/36	50/36
المجموع	1		70/36	210/36

3. **حساب** $P(X \geq 3)$ ، $P(X < 2)$

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=f(0)+f(1)=\frac{6}{36}+\frac{10}{36}=\frac{16}{36}$$

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=f(3)+f(4)+f(5)=\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{12}{36}$$

أو باستعمال دالة التوزيع

$$P(X\geq 3)=P(X>2)=1-F(2)=1-\frac{24}{36}=\frac{12}{36}$$

4. حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري

حساب التوقع الرياضي

من خلال الجدول أعلاه (الخانة رقم 4) فإن التوقع الرياضي يساوي

$$E(X)=\sum_{k=1}^{11}x_k\times f(x_k)=\frac{70}{36}$$

حساب التباين

$$V(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(E(X))^2$$

من خلال الجدول فإن $E(X^2)=\sum_{k=1}^{11}x_k^2\times f(x_k)=\frac{210}{36}$

ومنه $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{210}{36}-\left(\frac{70}{36}\right)^2=2{,}07$

الانحراف المعياري

$$\sigma=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2{,}07}=1{,}44$$

التمرين 2:

الجدول الموالي يوضح التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X :

X	1	2	3	4	5
$f(x_i)=\Pr(X=x_i)$	$1/10$	$2/10$	K	$4/10$	$1/10$

المطلوب :

1. حدد قيمة K حتى يصبح الجدول يمثل توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X
2. قدم تابع الاحتمال $f(X_i)$ في شكل علاقة رياضية إن أمكن ذلك.
3. أوجد دالة التوزيع $F(X_i)$.
4. أحسب الاحتمالات التالية: $p(2\le X<5)$ $P(X\le 3)$
5. أحسب كل من $E(X)$، $\sigma(X)$.

حل التمرين2

1- تحديد قيمة الثابت K:

نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد أي أن:

$$\frac{8}{10}+k=1\Rightarrow k=1-\frac{8}{10}=\frac{2}{10}$$

2- تابع الاحتمال $f(X_i)$ **في شكل علاقة رياضية**

$$f(x_i)=\begin{cases}\frac{x_i}{10};x=1,2,4\\ \frac{2}{10};x=3\\ \frac{1}{10};x=5\end{cases}$$

3- تابع التوزيع الاحتمالي $F(X_i)$.

$X=x_i$	1	2	3	4	5
$f(x_i)=\Pr(X=x_i)$	$1/10$	$2/10$	$2/10$	$4/10$	$1/10$
$F(x_i)=\Pr(X\le x_i)$	$1/10$	$3/10$	$5/10$	$9/10$	1

4- حساب $p(2\le X<5)$ $P(X\le 3)$

$$P(X \le 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{5}{10}$$

$$P(2 \le X < 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = f(2) + f(3) + f(4) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{8}{10}$$

5- حساب كل من $E(X)$ ، $\sigma(X)$.

أ-حساب التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{k=1}^{11} x_k \times f(x_k)$$

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{10}\right) + 2\left(\frac{2}{10}\right) + 3\left(\frac{2}{10}\right) + 4\left(\frac{4}{10}\right) + 5\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{32}{10} = 3,2$$

ب- حساب التباين

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

نقوم بحساب $E(X^2)$ كمايلي:

$$E(X^2) = (1)^2\left(\frac{1}{10}\right) + (2)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (3)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (4)^2\left(\frac{4}{10}\right) + (5)^2\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{116}{10} = 11,6$$

ومنه:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 11;6 - (3,2)^2 = 11;6 - 10;24 = 1,36$$

حساب الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,16} = 1,08$$

التمرين 3:

الجدول الموالي يوضح التوزيع الاحتمالي لعدد حوادث المرور في ولاية ما:

X	0	1	2	3	4	5
$f(x_i) = \Pr(X = x_i)$	K	$2K$	$3K$	$4K$	$1.5K$	$0.5K$

المطلوب :

1. حدد قيمة K حتى يصبح الجدول يمثل توزيع احتمالي للمتغير العشوائي X
2. أوجد دالة التوزيع $F(X_i)$.
3. أحسب الاحتمالات التالية: $p(0 \leq X < 4)$ $P(X \leq 3)$

حل التمرين3

1- تحديد قيمة الثابت K:

نعلم أن مجموع الاحتمالات يساوي الواحد أي أن:

$$\sum f(x_i) = 1 \Rightarrow k + 2k + 3k + 4k + 1.5k + 0.5k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

2- تابع التوزيع الاحتمالي $F(X_i)$.

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$F(x_i) = \Pr(X \leq x_i)$	$1/12$	$3/12$	$6/10$	$10/12$	$11.5/12$	1

3- حساب $p(0 \leq X < 4)$ $P(X \leq 3)$

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{10}{12}$$

$$P(0 \leq X < 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{10}{12}$$

التمرين4

بافتراض أن X متغير عشوائي مستمر تابع الكثافة الاحتمالية $f(x)$ يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} k(4x + 2x^2) & 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & x \notin [0,3] \end{cases}$$

- المطلوب:

1. أحسب قيمة الثابت k حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية
2. أوجد دالة التوزيع $F(X)$

3. أحسب $\Pr(X \geq 1)$

حل التمرين4

1. **حساب قيمة الثابت K**: نعلم أن تكامل تابع الكثافة $f(x)$ على جميع قيم x يساوي الواحد أي:

$$\int_x f(x)dx = 1$$

$$\int_x f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 k\left(4x+2x^2\right)dx = k\int_0^3 \left(4x+2x^2\right)dx = k\left[2x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_0^3 = 1$$

$$k\left[2(3)^2+\frac{2}{3}(3)^3\right]-\left[2(0)^2+\frac{2}{3}(0)^3\right]=1 \Rightarrow 36k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{36}\left(4x+2x^2\right)$$

2. **حساب دالة التوزيع**

$$F(x)=\Pr(X \leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^x f(x)dx==\frac{1}{36}\int_0^x \left(4x+2x^2\right)dx=\frac{1}{36}\left[2x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_0^x$$

$$=\frac{1}{36}\left[2(x)^2+\frac{2}{3}(x)^3\right]-\frac{1}{36}\left[2(0)^2+\frac{2}{3}(0)^3\right]=\frac{1}{54}x^3+\frac{1}{18}x^2$$

$$F(x)=\frac{1}{54}x^3+\frac{1}{18}x^2$$

3. **حساب** $\Pr(X \geq 1)$

$$\Pr(X \geq 1)=\int_1^3 f(x)dx$$

$$\Pr(X \geq 1)=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 \frac{1}{36}\left(4x+2x^2\right)dx=\frac{1}{36}\int_0^3 \left(4x+2x^2\right)dx=\frac{1}{36}\left[2x^2+\frac{2}{3}x^3\right]_0^3=$$

$$\frac{1}{36}\left[2(3)^2+\frac{2}{3}(3)^3\right]-\frac{1}{36}\left[2(1)^2+\frac{2}{3}(1)^3\right]=0{,}93$$

التمرين5

بافتراض أن Xمتغير عشوائي مستمر معرف بالدالة $f(x)$ التي تعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} Lnx & 1\le x\le a \\ \\ 0 & x\notin[1,a] \end{cases}$$

- **المطلوب:**

1. أحسب قيمة الثابت a حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية
2. قدم دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X.

حل التمرين5

1. حساب قيمة الثابت a حتى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة يجب أن يكون تكاملها على جميع قيم X يساوي الواحد أي:

$$\int_{x} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{1}^{a} f(x)dx=1$$

$$\int_{1}^{a} f(x)dx=1\Rightarrow\int_{1}^{a} Lnxdx=1\Rightarrow[xLnx-x]_1^a=[aLna-a]-[1Ln1-1]=aLna-a+1=1$$
$$=aLna-a=0\Rightarrow a(Lna-1)=0\Rightarrow Lna-1=0\Rightarrow Lna=1\Rightarrow a=e$$

$$a=e$$

2. دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي X

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\ .$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{1}^{x} f(x)dx=\int_{1}^{x} Lnx=[xLnx-x]_1^x=[xLnx-x]^x-[xLnx-x]^1=xLnx-x+1$$

المحور الخامس

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Discrete Probability Distribution

تتبع الظواهر في كثير من الأحيان توزيعات احتمالية، والتي تكون عبارة عن دالة رياضية، تسمى دالة الاحتمال، ومن خلالها نستطيع حساب احتمالات قيم المتغير العشوائي، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة، وهناك عدة توزيعات سنتطرق إلى أهمها خلال هذا الفصل.

1– توزيع برنولي Bernoulli Distribution

ويطلق عليها أيضا تجربة برنولي Bernoulli Trial ، وهي كل تجربة عشوائية نتائجها المتوقعة عبارة عن نتيجتين فقط، إحداهما تسمى **نجاحا** (Success) والأخرى تسمى **فشلا** (Failure).

نسمي احتمال الحصول على النجاح بـ P واحتمال الحصول على الفشل بـ q.

نظرا لوجود نتيجتين فقط فإنه حتما سيقع أحد هذين النتيجتين وبالتالي:

$$0 \le q \le 1 \qquad , 0 \le P \le 1 \qquad , p+q=1$$

تعريف: ليكن X متغير عشوائي يمثل " **عدد النجاحات** " المتحصل عليها في تجربة برنولي يكون فيها احتمال النجاح يساوي P واحتمال الفشل يساوي $1-P$، التوزيع الثنائي للمتغير العشوائي X يسمى بتوزيع برنولي مع المعلمة P.

من الواضح أنه:

- من أجل حادث النجاح فإن قيمة X تساوي 1
- من أجل الحادث الفشل فإن قيمة X تساوي 0

وعليه فدالة الاحتمال للمتغير العشوائي X تعطى كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases} p & ,x=1 \\ q=1-p & ,x=0 \end{cases}$$

كما يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$X=x_i$	1	0

$P(X=x_i)$	P	$q=1-P$

بدلا من كل ذلك، يمكن كتابة دالة الاحتمال لتجربة برنولي وفقا للصيغة التالية:

$$f(x)=P(X=x_i)=p^x q^{1-x} \qquad ,x=0,1$$

وعلى هذا الأساس تعطى دالة التوزيع (التراكمية) لتجربة برنولي على الصورة التالية:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,x<1 \\ q=1-p & ,0\le x<1 \\ 1 & ,x\ge 1 \end{cases}$$

1.1. المميزات العددية للتوزيع برنولي

سوف نتناول من خلال هذه الفقرة إلى بعض المميزات العددية والممثلة في كل من التوقع الرياضي و التباين.

أ–التوقع الرياضي: The expectation

التوقع الرياضي للمتغير X والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ يساوي مجموع قيم المتغير X مضروبا في احتمالات القيم أي أن: (نعلم أنه لدينا قيمتين فقط)

$$E(X)=\sum x_i\times P(X=x_i)=\sum x_i\times f(x_i)$$

$$E(X)=x_1\times P(X=x_1)+x_2\times P(X=x_2)$$

$$E(X)=1\times p+0\times q=1\times p+0\times(1-p)=p$$

$$E(X)=p$$

ب–التباين: The variance

$$V(X)=E(X-E(X))^2=\sum(x_i-E(X))^2\times P(X=x_i)=\sum(x_i-E(X))^2\times f(x_i)$$

$$V(X)=[x_1-E(X)]^2\times f(x_1)+[x_2-E(X)]^2\times f(x_2)$$

$$V(X)=[1-p]^2\times f(1)+[0-p]^2\times f(0)$$

$$V(X)=[1-p]^2\times p+[0-p]^2\times q=pq=p(1-p)$$

$$V(X)=p(1-p)=pq$$

ج- الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري عبارة عن الجذر التربيعي للتباين أي أن:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{p(1-p)}=\sqrt{pq}$$

مثال:

لنعتبر التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعة نرد، حيث نعرف المتغير العشوائي X كالتالي: "الحصول على النتيجة 3"

المطلوب:

- حدد حادث النجاح والفشل الموافق لهذه التجربة العشوائية وحدد احتمالهما
- قدم الصيغة الرياضية لتابع الاحتمال لبرنولي
- أوجد التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري

الحل:

المجموعة الأساسية لهذه التجربة يساوي $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

واضح أن "الحصول على النتيجة 3" هو حادث النجاح واحتماله يساوي $p=P(X=1)=\frac{1}{6}$

أما الحادث الذي يمثل حادث الفشل فهو "عدم الحصول على النتيجة3" (و هو يمثل الحادث المعاكس لحادث النجاح) باحتمال $q=1-p=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

الصيغة الرياضية لتجربة برنولي تكون كالتالي:

$$f(x)=P(X=x_i)=\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{1-x} \qquad ,x=0,1$$

أما دالة التوزيع فتعطى وفق الصيغة التالية:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<1\\ \frac{5}{6} & ,0\le x<1\\ 1 & ,x\ge 1\end{cases}$$

التوقع الرياضي:

$$E(X)=p=\frac{1}{6}$$

التباين:

$$V(X)=p(1-p)=pq=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{pq}=\sqrt{\frac{5}{36}}$$

2- قانون التوزيع ثنائي الحدين: The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للتجربة العشوائية نتيجتان فقط مثل توزيع برنولي، يكون فيها احتمال النجاح p (هو احتمال تحقق الحدث)، واحتمال الفشل $q=1-p$ (هو احتمال عدم تحقق الحادث) من كل محاولة ثابتة ولا يتغير، بحيث تعاد تجربة برنولي n مرة، ويكون عدد المحاولات صغير ومحدد.

وعليه نقول توزيع ثنائي الحدين للمعلمات n و p ويرمز له بالرمز $b(n,p)$

عندما يكون للمتغير العشوائي X توزيع $b(n,p)$ فإننا نشير إلى ذلك كالتالي:

$$X \to b(n,p)$$

ونقول X يتبع توزيع ثنائي الحدين بالمعلمتين n و p

ومنه يمكن استنتاج العلاقة الرياضية التي تسمح لنا: بحساب احتمال الحصول على حادث النجاح عدد من المرات يساوي x_i عند انجاز تجربة برنولي عدد من المرات يساوي n. هذه العلاقة الرياضية تسمى **دالة الاحتمال ثنائي الحدين** أو **قانون التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين** وتعطى كالتالي:

$$f(x) = P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x} \qquad , x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots, n$$

حيث أن:

- $C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$
- p : احتمال حادث النجاح
- q : احتمال حادث الفشل
- n : عدد مرات القيام بالتجربة العشوائية.
- x : عدد مرات ظهور حادث النجاح خلال الـ n مرة ويمثل قيمة المتغير العشوائي.

1.2. خواص قانون التوزيع الثنائي

دالة الاحتمال ثنائي الحدين تحقق الخاصيتين التاليتين:

- $0 \le f(x) \le 1$: الاحتمال أكبر أو يساوي الصفر وأقل أو يساوي الواحد.
- $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$: مجموع الاحتمالات يساوي الواحد.

2.2. دالة التوزيع (التراكمية) لقانون ثنائي الحدين:

تعطى دالة التوزيع التراكمية بالصيغة التالية:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x=0}^{\infty} f(s) = \sum_{x=0}^{\infty} C_n^s p^s q^{n-x}$$

3.2. المميزات العددية لقانون ثنائي الحدين:

سوف نتناول من خلال هذه الفقرة إلى بعض المميزات العددية والممثلة في كل من التوقع الرياضي و التباين.

أ- التوقع الرياضي: The expectation

يمكن اعتبار المتغير العشوائي X على أنه مجموع لـ n متغيرة برنولي المستقلة (الغير المرتبطة) $Z_1, Z_2, ..., Z_i, ...Z_n$ والموافقة لانجاز تجربة برنولي n مرة، أي

$$X = Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_i + ... + Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ندخل التوقع الرياضي على الطرفين فنحصل على ما يلي:

$$E(X) = E(Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_i + ... + Z_n)$$

$$E(X) = E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + ... + E(Z_i) + ... + E(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Z_i)$$

نعلم أن التوقع الرياضي لتوزيع برنولي يساوي p **أي** $E(X) = p$ وعليه فإن:

$$E(Z_1) = E(Z_2) = E(Z_3) = ... = E(Z_i) = ... = E(Z_n) = p$$

وبالتعويض في العلاقة الأخيرة للتوقع الرياضي نحصل على:

$$E(X) = p + p + p + ... + p + ... + p = np$$

$$E(X) = np$$

ب- التباين: Variance

يمكن اعتبار المتغير العشوائي X على أنه مجموع لـ n متغيرة برنولي المستقلة (الغير المرتبطة) $Z_1, Z_2, ..., Z_i, ...Z_n$ والموافقة لانجاز تجربة برنولي n مرة، أي

$$X = Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_i + ... + Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

ندخل التباين على الطرفين فنحصل على ما يلي:

$$V(X) = V(Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_i + ... + Z_n)$$

بما أن الـ n متغيرة برنولي $Z_1, Z_2, ..., Z_i, ...Z_n$ مستقلة، فإن تباين مجموعها يساوي مجموع تبايناتها أي:

$$V(Z_1+Z_2+Z_3+.....+Z_n)=V(Z_1)+V(Z_2)+V(Z_3)+.....+V(Z_n)=\sum_{i=1}^{n}V(Z_i)$$

بالتعويض نحصل على:

$$V(X)=V(Z_1)+V(Z_2)+V(Z_3)+.....+V(Z_n)=\sum_{i=1}^{n}V(Z_i)$$

نعلم أن التباين لمتغيرة برنولي يساوي pq **أي** $V(X)=pq$ وعليه فإن:

$$V(Z_1)=V(Z_2)=V(Z_3)=......=V(Z_i)=......=V(Z_n)=pq$$

وبالتعويض في العلاقة الأخيرة للتباين نحصل على:

$$V(X)=pq+pq+pq+......+pq+......+pq=npq$$

$$V(X)=npq$$

ج- الانحراف المعياري:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{npq}$$

مثال:

إذا علمنا بأن نسبة الشفاء من فيروس كورونا باستخدام نوع معين من اللقاحات هو 0.4، وإذا استعمل اللقاح على 5 مصابين بهذا الفيروس.

نعرف المتغير العشوائي على أنه عدد الذين يستجيبون لهذا اللقاح (الذين يتماثلون للشفاء)

المطلوب:

1. حدد حادث النجاح والفشل
2. أكتب دالة الاحتمال لهذا المتغير
3. أوجد دالة التوزيع لهذا المتغير
4. ما هو احتمال استجابة 3 مصابين للقاح
5. ما هو احتمال استجابة مريضين على الأقل

6. أوجد التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

<u>الحل:</u>

حادث النجاح هو: احتمال الشفاء $p = 0.4$

حادث الفشل هو: احتمال عدم الشفاء $q = 1 - p = 1 - 0.4 = 0.6$

المتغير العشوائي X يمثل "عدد الذين يستجيبون للقاح" يأخذ القيم التالية: $X = 0,1,2,3,4,5$

دالة الاحتمال تعطى كما يلي:

$$f(x) = P(X = x) = C_5^x (0.4)^x (0.6)^{5-x} \qquad , x = 0,1,2,3,4,5$$

دالة التوزيع تعطى وفق الجدول التالي:

عدد المصابين	$f(x) = P(X = x) = C_5^x (0.4)^x (0.6)^{5-x}$	$F(x) = P(X \leq x)$
0	$C_5^0 (0.4)^0 (0.6)^{5-0} = 0.07776$	0.07776
1	$C_5^1 (0.4)^1 (0.6)^{5-1} = 0.2592$	0.33696
2	$C_5^2 (0.4)^2 (0.6)^{5-2} = 0.3456$	0.68256
3	$C_5^3 (0.4)^3 (0.6)^{5-3} = 0.2304$	0.91296
4	$C_5^4 (0.4)^4 (0.6)^{5-4} = 0.0768$	0.98976
5	$C_5^5 (0.4)^5 (0.6)^{5-5} = 0.01024$	1

احتمال استجابة 3 مصابين للقاح هو: $C_5^3 (0.4)^3 (0.6)^{5-3} = 0.2304$

احتمال استجابة مريضين على الأقل هو:: أن:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \\ &= 0.3456 + 0.2304 + 0.0768 + 0.01024 = 0.66304 \end{aligned}$$

التوقع الرياضي:

$$E(X) = np = 5 \times 0.4 = 2$$

التباين:

$$V(X) = npq = 5 \times 0.4 \times 0.6 = 1.2$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_{(X)} = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{1.2} = 1.095$$

3.3. حساب الاحتمال باستخدام جدول التوزيع ثنائي الحد

يتضمن جدول التوزيع الاحتمالي ثنائي الحد كل من القيم x و القيم n و القيم p و يتم استخدامه كما يلي:

لحساب احتمال أي قيمة x باستخدام الجدول أعلاه نقوم بالعمليات التالية:

- نختار العمود الذي يحتوي على القيمة p أو المناسب للقيمة p
- نختار السطر الذي يحتوي على القيمة n أو المناسب للقيمة n
- نختار السطر الذي يحتوي على القيمة x أو المناسب للقيمة x
- نختار القيمة التي تمثل تقاطع عمود القيمة p و سطر القيمة x هذه قيمة التقاطع تمثل الاحتمال المطلوب حسابه.

مثال:

لنفرض أن $X \to b(5;0.45)$

المطلوب: باستخدام جدول التوزيع الثنائي أحسب $P(X=2)$

الحل:

$P(X=2)$ لحساب الاحتمال المطلوب نقوم بما يلي:

- نختار العمود المناسب للقيمة $p=0.45$ و هو العمود رقم 10
- نختار السطر المناسب للقيمة $n=5$ و هو السطر رقم 15
- نختار السطر المناسب للقيمة $x=2$ و هو السطر رقم 17
- نختار القيمة التي تمثل تقاطع عمود القيمة $p=0.45$ وسطر القيمة $x=2$ قيمة التقاطع

تساوي 0.3369 و هي تمثل الاحتمال المطلوب حسابه. أي: $P(X=2)=0.3369$

		P										
$n\downarrow$	$x_i\downarrow$	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
05	**00**	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312

	01	0.0480	0.2036	0.3280	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1562
	02	0.0010	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	03	0.0000	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	04	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1562
	05	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0312

جدول توزيع ثنائي الحدين تجده في الملاحق

3– قانون التوزيع لبواسون: Poisson Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، أو يكون فيها تحقق الحادث صغير جدا، وعدد مرات إجراء التجربة n كبيرا جدا، والأمثلة على ذلك كثيرة منها:

- عدد حوادث المرور عل إحدى الطرق خلال فترة زمنية معينة
- عدد المكالمات الهاتفية التي تصلك عن طريق الخطأ
- عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة
- عدد طالبي خدمة معينة إلى مركز خدمة معين خلال فترة زمنية معينة

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو λ وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل فان الاحتمال يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$P(X=x)=f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!},\qquad x=0,1,2,.......$$

حيث أن:

- x: يمثل عدد مرات تحقق حادث النجاح.
- λ: متوسط عدد مرات وقوع الحادث خلال فترة زمنية، حجم، مساحة،...
- e: أساس اللوغريتم النبيري ويساوي $e=2.71828$

يرمز للمتغير العشوائي و ليكن X الذي احتمال قيمه تحسب بدلالة أو باستخدام قانون التوزيع لبواسون بالرمز $X \to P(\lambda)$ و يقرأ : **المتغير العشوائي X يخضع أو يتبع توزيع بواسون بالمعلمة** λ.

1.3.خواص قانون بواسون

دالة الاحتمال لبواسون تحقق الخاصيتين التاليتين:

- $0 \le f(x) \le 1$: الاحتمال أكبر أو يساوي الصفر وأقل أو يساوي الواحد.
- $\sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$: مجموع الاحتمالات يساوي الواحد.

2.3. دالة التوزيع (التراكمي) لبواسون:

تعطى وفقا للصيغة التالية:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 0 \\ \sum_{x=0}^{t} f(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{t} \frac{\lambda^x}{x!} & ,t \ge 0 \end{cases}$$

3.3. المميزات العددية لتوزيع بواسون:

سوف نتناول من خلال هذه الفقرة إلى بعض المميزات العددية والممثلة في كل من التوقع الرياضي والتباين.

أ- التوقع الرياضي: The expectation

كما هو معلوم فإن التوقع الرياضي لمتغير عشوائي يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x_i \times P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \times f(x)$$

تبعا للعلاقة دالة الاحتمال لبواسون يعطى وفقا للصيغة التالية: $P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ وبالتعويض في علاقة التوقع الرياضي أعلاه نحصل على ما يلي:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$
$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^0 = \lambda$$

$$E(X) = \lambda$$

ب- التباين:

كما هو معلوم فإن التباين لمتغير عشوائي يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$V(X)=E(x-E(X))^2=\sum_{i=1}^{n}(x-E(X))^2\times P(X=x)=\sum_{i=1}^{n}(x-E(X))^2\times f(x)$$

و التي يمكن تبسيطها إلى العلاقة التالية:

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}x^2\times f(x)-[E(X)]^2$$
$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

بتعويض كل من: $E(X^2)=\lambda^2+\lambda$ و $[E(X)]^2=\lambda^2$ في علاقة التباين نحصل على:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

ج- الانحراف المعياري:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}$$

مثال

إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية خلال أسبوع في إحدى الطرق الوطنية يساوي 6 حوادث

المطلوب: :

1. أكتب دالة الاحتمال
2. ما هو احتمال عدم وقوع ولا حادث خلال الأسبوع.
3. ما هو احتمال وقوع حادث واحد فقط خلال الأسبوع
4. ما هو احتمال وقوع 3 حوادث خلال الأسبوع
5. أوجد التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

الحل:

1.متوسط عدد الحوادث يساوي: $\lambda=6$ وعليه دالة الاحتمال تعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$P(X=x)=f(x)=\frac{e^{-6}6^x}{x!}$$

2. احتمال أنه و لا حادث يقع.

$$P(X=0)=e^{-6}\frac{6^0}{0!}=0.00248$$

3. احتمال وقوع حادث واحد.

$$P(X=1)=e^{-6}\frac{6^1}{1!}=0.01488$$

4. 3 حوادث تقع خلال الأسبوع

$$P(X=3)=e^{-6}\frac{6^3}{3!}=0.08928$$

5. التوقع والتباين والانحراف المعياري

$$E(X)=\lambda=6$$

$$V(X)=\lambda=6$$

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}=\sqrt{6}=2.45$$

<u>مثال2</u>

إذا كان متوسط وصول السفن الى احد الموانئ هو سفينتان في اليوم

المطلوب: :

1. أكتب دالة الاحتمال
2. ما هو احتمال وصول سفينة واحدة.
3. ما هو احتمال وصول ثلاث سفن
4. أوجد التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

<u>الحل:</u>

1.متوسط وصول السفن: $\lambda=2$ وعليه دالة الاحتمال تعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$P(X=x)=f(x)=\frac{e^{-2}2^x}{x!}$$

2. احتمال وصول سفينة واحدة.

$$P(X=1)=e^{-2}\frac{2^1}{1!}=0.27$$

3 احتمال وصول ثلاث سفن

$$P(X=3)=e^{-2}\frac{2^3}{3!}=0..18$$

التوقع والتباين والانحراف المعياري

$$E(X)=\lambda=2$$

$$V(X)=\lambda=2$$

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}=1.41$$

4.3– تقريب قانون التوزيع ثنائي الحد بقانون توزيع بواسون:

يتم تعويض أو تقريب قانون التوزيع الثنائي بقانون التوزيع لبواسون عندما يكون:

- n كبيرة
- p صغيرة

إذا تحقق هذين الشرطين فإن قانون التوزيع الثنائي يؤول إلى قانون التوزيع لبواسون وذلك بوضع: $np=\lambda$

فتصبح الكتابة على الشكل التالي:

$$f(x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{e^{-np}(np)^x}{x!},\qquad x=0,1,2,.......,n$$

يستخدم تقريب قانون التوزيع الثنائي بقانون توزيع بواسون عند تحقق الشرطين التاليين معا وفي آن واحد: $n\geq 30$ **و** $np<5$ **أو** $p<0.1$ **و** $np<10$ **تكون عملية التقريب جيدة عندما:** $n\geq 100$ **و** $np<5$

<u>مثال:</u>

2% من إنتاج مصنع من المصابيح الكهربائية غير صالح، تم أخذ بالإرجاع عينة مكونة من 100 قطعة من المنتج

المطلوب: باستخدام كل من التوزيع الثنائي و توزيع بواسون، أحسب احتمال ما يلي:

1. العينة تحتوي على 03 مصابيح غير صالحة.

2. ولا قطعة من العينة غير صالحة

نعرف المتغير العشوائي X على أنه: " عدد القطع المنتجة الغير صالحة في العينة المسحوبة". القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: $x = 0,1,2,3,4,........,100$

– باستخدام قانون التوزيع الثنائي:

1. احتمال أن العينة تحتوي على 03 قطع فاسدة: $P(X=3)$

$$P(X=3)=C_{100}^{3}(0.02)^{3}(1-0.02)^{100-3}=0.1822759$$

2. احتمال أن ولا قطعة من العينة فاسدة: $P(X=0)$

$$P(X=0)=C_{100}^{0}(0.02)^{0}(1-0.02)^{100-0}=0.1326195$$

– باستخدام قانون التوزيع لبواسون:

بما أن الشرطين محققين حيث أن:

- $n=100>50$
- $p=0.02<0.1$

فإنه يمكن تطبيق قانون التوزيع لبواسون حيث أن: $\lambda = np = 100\times 0.02 = 2$

1. احتمال أن العينة تحتوي على 03 قطع فاسدة: $P(X=3)$

$$P(X=3)=e^{-2}\frac{2^{3}}{3!}=0.1804$$

2. احتمال أن ولا قطعة من العينة فاسدة: $P(X=0)$

$$P(X=0)=e^{-2}\frac{2^{0}}{0!}=0.1353$$

من خلال النتائج المتوصل إليها، نلاحظ أنها متقاربة

<u>مثال2:</u>

يحتوي كتاب على 500 صفحة يوجد به 300 خطأ موزعة على صفحات الكتاب

أوجد الاحتمالات التالية:

1- أن لا تحتوي صفحة معينة على خطأ

2- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ واحد فقط

3- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ واحد على الأقل

<u>الحل:</u>

نعرف المتغير العشوائي X على أنه: " عدد الاخطاء في احد الصفحات وهو يتبع توزيع ذي الحدين حيث:

$$n = 300 \quad \text{و} \quad P = \frac{1}{500} = 0.002$$

وبما أن:

- $n = 300 > 50$
- $p = 0.002 < 0.1$

فإنه يمكن تطبيق قانون التوزيع لبواسون حيث أن: $\lambda = np = 300 \times 0.002 = 0.6$

1- احتمال أن لا تحتوي صفحة معينة على خطأ: $P(X = 0)$

$$P(X = 0) = e^{-0.6} \frac{(0.6)^0}{0!} = 0.549$$

2- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأ واحد: $P(X = 1)$

$$P(X = 1) = e^{-0.6} \frac{(0.6)1}{1!} = 0.329$$

3- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأ واحد على الأقل: $P(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = 1 - (p(X = 0) + p(X = 1)) = 1 - (0.549 + 0.329) = 0.122$$

5.3. استخدام جدول التوزيع الاحتمالي لبواسون في حساب احتمال متغير عشوائي

مثال:

لنفرض أن X متغير عشوائي حيث أن: $X \to P(4.5)$

المطلوب: باستخدام جدول الاحتمالات لبواسون أحسب الاحتمالات التالية: $P(X=1)$

يتم حساب الاحتمال المطلوب باستخدام جدول التوزيع الاحتمالي لبواسون كما يلي:

$P(X=1)$: لحساب هذا الاحتمال نتبع الخطوات التالية:

- يتم التحرك أفقيا عبر السطر الأول للجدول أي سطر قيم λ بحثا عن قيمة λ التي تساوي 4.5
- ثم بعد ذلك يتم التحرك عبر العمود الأول للجدول أي عمود قيم x بحثا عن القيمة الأولى 1
- القيمة التي تمثل تقاطع عمود $\lambda = 4.5$ و سطر $x=1$ تمثل الاحتمال المطلوب. هذه القيمة هي 0.04999 أي أن: $P(X=1)=0.04999$ الخطوات أعلاه موضح أدناه:

	λ								
$x_i \downarrow$	**1.00**	**1.50**	**2.00**	**2.50**	**3.00**	**3.50**	**4.00**	**4.50**	**5.00**
00	0,36788	0,22313	0,13534	0,08208	0,04979	0,03020	0,01832	0,01111	0,00674
01	0,36788	0,33470	0,27067	0,20521	0,14936	0,10569	0,07326	0,04999	0,03369
02	0,18394	0,25102	0,27067	0,25652	0,22404	0,18496	0,14653	0,11248	0,08422
03	0,06131	0,12551	0,18045	0,21376	0,22404	0,21579	0,19537	0,16872	0,14037
04	0,01533	0,04707	0,09022	0,13360	0,16803	0,18881	0,19537	0,18981	0,17547
05	0,00307	0,01412	0,03609	0,06680	0,10082	0,13217	0,15629	0,17083	0,17547
06	0,00051	0,00353	0,01203	0,02783	0,05041	0,07710	0,10420	0,12812	0,14622
07	0,00007	0,00076	0,00344	0,00994	0,02160	0,03855	0,05954	0,08236	0,10444
08	0,00001	0,00014	0,00086	0,00311	0,00810	0,01687	0,02977	0,04633	0,06528
09	0,00000	0,00002	0,00019	0,00086	0,00270	0,00656	0,01323	0,02316	0,03627

الجدول الكامل في الملاحق

4- قانون التوزيع فوق الهندسي: Hypergeometric Distribution

هذا التوزيع يعالج بعض المسائل من النوع التالي:

ليكن لدينا مجتمع ذو الحجم N فيه مجموعة n لها خاصية معينة. نسحب منه r عنصر بدون إرجاع فإذا كان X متغير عشوائي يرمز إلى عدد العناصر المسحوبة من الخاصية المدروسة (حالات النجاح)، فإن احتماله يكون حسب الدالة التالية:

$$P(X=x)=f(x_i)=\frac{C_r^x \times C_{N-r}^{n-x}}{C_N^n}$$

1.4. المميزات العددية لقانون التوزيع فوق الهندسي

أ- التوقع الرياضي

$$E(X) = np$$

ب- التباين

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1} npq$$

ج- الانحراف المعياري:

$$\sigma_{(X)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} npq}$$

مثال:

كيس يحتوي على 10 كرات منها 4 زرقاء، سحبنا من الكيس 3 كرات بدون إرجاع.

ما هو احتمال ظهور كرة واحدة زرقاء؟

الحل

$$P(X = x) = f(x) = \frac{C_r^x \times C_{N-r}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_3^1 \times C_{10-3}^{4-1}}{C_{10}^4} = \frac{105}{210} = 0.5$$

مثال2:

من الاجل السماح بمرور شحنة مستوردة من الاجهزة مكونة من 100 جهاز تسحب الجمارك الجزائرية عينة من 10 اجهزة، فأن وجد أي جهاز لا يطابق المواصفات في العينة فإن الشحنة سترفض بالكامل، ولتحديد ان كانت هذه الطريقة المقترحة للقبول أو الرفض مناسبة ، أحسب احتمال:

1- قبول الشحنة في حالة وجود 3 أجهزة لا تطابق المواصفات في الشحنة.

2- رفض الشحنة في حالة وجود 5 أجهزة لا تطابق المواصفات في الشحنة

الحل:

1/ $P(X=0)=\dfrac{C_3^0 \times C_{100-3}^{10-0}}{C_{100}^{10}}=0.726$

اذا فان احتمال قبول الشحنة في حالة وجود 3 أجهزة لا تطابق المواصفات في الشحنة هو 0.729

2/ $P(X=0)=\dfrac{C_5^0 \times C_{100-5}^{10-0}}{C_{100}^{10}}=0.583$

اذا فان احتمال قبول الشحنة في حالة وجود 5 أجهزة لا تطابق المواصفات في الشحنة هو 0.583

واحتمال رفض الشحنة هو $1-P(X=0)=1-0.583=0.416$

مثال3:

في قسم الأمراض المعدية في أحد المستشفيات يوجد 20 مريض منهم 5 مرضى مصابين بكورونا، فإذا تم اختيار 3 مرضى من هذا القسم بصورة عشوائية.

أوجد:

1- التوزيع الاحتمالي لمرضى كورونا

2- احتمال عدم وجود أي مريض بكورونا ضمن العينة المسحوبة

3- احتمال وجود مريض بكورونا ضمن العينة المسحوبة

4- احتمال وجود مريض واحد على الأكثر

الحل:

1- احتمال مرضى كورونا يتبع التوزيع فوق الهندسي وفق العلاقة التالية:

$$P(X=x)=f(x)=\frac{C_r^x \times C_{N-r}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_3^x \times C_{20-3}^{5-x}}{C_{20}^5}$$

2- احتمال عدم وجود أي مريض بكورونا:

$$P(X=0)=f(0)=\frac{C_3^0\times C_{20-3}^{5-0}}{C_{20}^5}=\frac{6188}{15504}=0.399$$

3− احتمال وجود مريض واحد بكورونا:

$$P(X=1)=f(1)=\frac{C_3^1\times C_{20-3}^{5-1}}{C_{20}^5}=\frac{7140}{15504}=0.460$$

4− احتمال وجود أي مريض بكورونا:

$$P(X\le 1)=p(X=0)+p(X=1)=0.399+0.460=0.859$$

2.4. تقريب القانون فوق الهندسي بالقانون ثنائي الحد

1. عندما يكون حجم المجتمع N كبير و حجم العينة n صغير مقارنة مع حجم المجتمع فإن الفرق بين السحب بالإعادة و السحب بدون إعادة يكون ضئيل.

2. إذا كان:

$$N>10\text{n} \quad \text{أي} \quad n<\frac{N}{10}$$

فإن قانون التوزيع فوق الهندسي تقريبا هو نفسه قانون توزيع ثنائي الحدين.

لكلا التوزيعين نفس التوقع الرياضي np، وتباين التوزيع الهندسي يساوي $npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$، أما تباين توزيع ثنائي الحدين فيساوي npq حيث أن معامل التصحيح $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يساوي بالتقريب الواحد (1) في حالة حجم المجتمع N كبير.

<u>تمارين محلولة</u>

<u>التمرين 1 :</u>

فوج طلبة يتكون من 30 طالب منهم 6 طلبة والباقي طالبات. نختار بالإعادة عينة من 6 أفراد. نعرف المتغير العشوائي X على أنه "**عدد الطالبات في العينة المسحوبة**".

المطلوب:

1. حدد تجربة برنولي.

2. حدد حادث النجاح والفشل الموافق لهذه التجربة العشوائية وحدد احتمالهما.
3. أحسب $E(X)$
4. أحسب $V(X)$
5. أحسب $\sigma_{(X)}$

حل التمرين 1 :

1. تجربة برنولي في هذه التجربة تتمثل في: اختيار فرد من بين 30 فرد.

تبعا لتعريف المتغير العشوائي X أعلاه يتضح أن
2. حادث النجاح هو الحادث الممثل في اختيار طالبة ويساوي:

$$P=\frac{C_6^1}{C_{30}^1}=\frac{6}{30}=0.2$$

حادث الفشل هو الحادث الممثل في اختيار طالب وهو يساوي:

$$q=1-p=1-0.2=0.8$$

3. حساب $E(X)$:

$$E(X)=n\times p=6\times 0.2=1.2$$

4. حساب $Var(X)$:

$$V(X)=n\times p\times q=6\times 0.2\times 0.8=0.96$$

5. حساب $\sigma_{(X)}$:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.96}=0.97$$

التمرين 2 :

احتمال فوز فريق لكرة القدم في أي مبارة يلعبها هو 2/3. إذا لعب الفريق أربع مباريات.

المطلوب:

1. أحسب احتمال أن يربح الفريق مبارتين بالضبط
2. أحسب احتمال أن يربح الفريق على الأقل مبارة واحدة
3. أحسب احتمال أن يربح الفريق أكثر من نصف المباريات

حل التمرين 2 :

- نعرف المتغير العشوائي X على أنه "**عدد مباريات الفوز**". حيث أن $X=0,1,2,3,4$
- حادث النجاح يتمثل في الفوز باحتمال يساوي $p=\frac{2}{3}$
- حادث الفشل يتمثل في عدم الفوز باحتمال يساوي $q=1-p=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
- عدد مرات انجاز تجربة برنولي الممثلة في "لعب مبارة" يساوي $n=4$

1. احتمال أن يربح الفريق مبارتين بالضبط: $P(X=2)$

- $P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{4-2}$

2. احتمال أن يربح الفريق على الأقل مبارة واحدة: $P(X\geq 1)$

- $P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$
- $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-C_4^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4=0.99$

3. احتمال أن يربح الفريق أكثر من نصف المباريات: $P(X>2)$

- $P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)$

$$P(X>2)=C_4^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1+C_4^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0$$

__التمرين 3 :__

بافتراض أن: $X\to b(5,0.30)$

المطلوب:

1. قدم التوزيع الاحتمالي.
2. $P(X\leq 3)$
3. $P(4\leq X\leq 8)$
4. $E(X)$
5. $V(X)$
6. $\sigma_{(X)}$

__حل التمرين 3 :__

$X\to b(5,0.30)$

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

قيم المتغير العشوائي X : $X=0,1,2,3,4,5$

احتمالات قيم المتغير العشوائي X:

$$P(X=0)=f(0)=C_5^0(0.3)^0(0.7)^{5-0}=0.1681$$

$$P(X=1)=f(1)=C_5^1(0.3)^1(0.7)^{5-1}=0.3602$$

$$P(X=2)=f(2)=C_5^2(0.3)^2(0.7)^{5-2}=0.3087$$

$$P(X=3)=f(3)=C_5^3(0.3)^3(0.7)^{5-3}=0.1323$$

$$P(X=4)=f(4)=C_5^4(0.3)^4(0.7)^{5-4}=0.0284$$

$$P(X=5)=f(5)=C_5^5(0.3)^5(0.7)^{5-5}=0.0024$$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التالي:

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0.1681	0.3602	0.3087	0.1323	0.0284	0.0024

- **حساب** $P(X\le 3)$:

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$
$$P(X\le 3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$
$$P(X\le 3)=0.1681+0.3602+0.3087+0.1323$$
$$P(X\le 3)=0.9693$$

- **حساب** $P(4\le X\le 8)$:

$$P(4\le X\le 8)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$$
$$P(4\le X\le 8)=f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)$$
$$P(4\le X\le 8)=0.0284+0.0024+0+0+0$$
$$P(4\le X\le 8)=0.0308$$

- **حساب** $E(X)$:

$$E(X)=n\times p=5\times 0.3=1.5$$
$$E(X)=\sum_{x=0}^{n}x\times P(X=x)=\sum_{x=0}^{n}x\times f(x)$$
$$E(X)=0\times 0.1681+1\times 0.3602+2\times 0.3087+3\times 0.1323+4\times 0.0284+5\times 0.0024=1.5$$

- **حساب** $V(X)$:

$$V(X)=n\times p\times q=5\times 0.3\times 0.7=1.05$$

- **حساب** $\sigma_{(X)}$:

$$\sigma_{(X)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.05} = 1.02$$

التمرين 4:

بافتراض أن متوسط عدد السيارات التي تصل إلى محطة بنزين خلال الفترة الممتدة بين الساعة الثانية والثالثة زوالا يساوي 6 سيارات.

المطلوب:

أحسب احتمال لأن:

1. ولا سيارة تصل المحطة.
2. وصول سيارة واحدة للمحطة.
3. وصول سيارتين للمحطة.
4. وصول على الأقل 4 سيارات للمحطة.
5. وصول على الأكثر 4 سيارات للمحطة.

حل التمرين 4:

نعرف المتغير العشوائي X على أنه "**عدد السيارات التي تصل محطة البنزين خلال ساعة زمن**" والذي يتبع توزيع بواسون بمتوسط $\lambda = 6$.

- **حساب الاحتمالات:** يمكن الاستعانة بجدول الاحتمالات لبواسون في الحساب.

1. ولا سيارة تصل المحطة:

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{e^{-6} \times 6^0}{0!} = 0.0025$$

2. وصول سيارة واحدة للمحطة:

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{e^{-6} \times 6^1}{1!} = 0.0149$$

3. وصول سيارتين للمحطة:

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{e^{-6} \times 6^2}{2!} = 0.0446$$

4. وصول على الأقل 4 سيارات للمحطة:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$$

$$P(X \geq 4) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]$$

$$P(X \geq 4) = 1 - [0.0025 + 0.0149 + 0.0446 + 0.0892] = 0.8488$$

5. وصول على الأكثر 4 سيارات للمحطة:

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$P(X \leq 4) = 0.0025 + 0.0149 + 0.0446 + 0.0892 + 0.1339 = 0.2851$$

التمرين 5:

ليكن X متغير عشوائي حيث أن: $X \rightarrow P(5)$

-المطلوب:

1. حدد تابع الاحتمال للمتغير العشوائي X.
2. أحسب التوقع الرياضي $E(X)$
3. أحسب التباين $V(X)$
4. أحسب الانحراف المعياري $\sigma_{(X)}$

حل التمرين 5:

1. تابع الاحتمال للمتغير العشوائي X هو تابع الاحتمال لبواسون الذي يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$P(X=x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-5}5^x}{x!}.$$

2. حساب التوقع الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = \lambda = 5$$

3. حساب التباين $V(X)$:

$$V(X) = \lambda = 5$$

4. حساب الانحراف المعياري $\sigma_{(X)}$:

$$\sigma_{(X)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{5} = 2.24$$

التمرين 6:

فوج يتكون من 25 طالب من بينهم 10 طلبة معيدين. نقوم باختيار بطريقة عشوائية وبدون إرجاع 4 طلبة من الـ 25 طالب.

نعرف المتغير العشوائي X على أنه " **عدد الطلبة المعيدين المختارين في العينة المكونة من 4 طلبة** " .

المطلوب:

1. قدم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X
2. أحسب $E(X)$
3. أحسب $V(X)$
4. أحسب $\sigma_{(X)}$

حل التمرين 6:

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X : عبارة عن قيم المتغير العشوائي X والاحتمالات الموافقة لهذه القيم

- مختلف القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: $X = 0,1,2,3,4$ حيث أن:
  - $X = 0$: تعني أن العينة لا تحتوي على معيدين.
  - $X = 1$: تعني أن العينة تحتوي على معيد واحد فقط.
  - $X = 2$: تعني أن العينة تحتوي على معيدين فقط.
  - $X = 3$: تعني أن العينة تحتوي على ثلاثة معيدين.
  - $X = 4$: تعني أن العينة تحتوي على أربعة معيدين.
- حساب احتمالات مختلف القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :

ويكون ذلك باستعمال قانون توزيع فوق الهندسي كالتالي: $P(X = x) = f(x_i) = \frac{C_r^x \times C_{N-r}^{n-x}}{C_N^n}$

- $P(X = 0) = f(0) = \frac{C_{10}^0 \times C_{25-10}^{4-0}}{C_{25}^4} = 0.1079$
- $P(X = 1) = f(1) = \frac{C_{10}^1 \times C_{25-10}^{4-1}}{C_{25}^4} = 0.3597$
- $P(X = 2) = f(2) = \frac{C_{10}^2 \times C_{25-10}^{4-2}}{C_{25}^4} = 0.3735$
- $P(X = 3) = f(3) = \frac{C_{10}^3 \times C_{25-10}^{4-3}}{C_{25}^4} = 0.1423$

- $P(X=4)=f(4)=\frac{C_{10}^{4}\times C_{25-10}^{4-4}}{C_{25}^{4}}=0.0166$

4. حساب $E(X)$:

- $E(X)=np=4\times\frac{10}{25}=4\times 0.4=1.6$

5. حساب $Var(X)$:

- $V(X)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)npq=\left(\frac{25-4}{25-1}\right)\times 4\times\frac{10}{25}\left(1-\frac{10}{25}\right)=0.84$

6. حساب $\sigma_{(X)}$:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.84}=0.92$$

التمرين 7:

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة على المواد الاستهلاكية له دالة كثافة احتمالية كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases} cx(10-x)\ ,\ 0\le x\le 10 \\ 0\ otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

1- أوجد قيمة الثابت c

2- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين **(5,3)** عشرة آلاف دينار خلال الشهر.

3- إذا كان لدينا 1000 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن عشرون ألف دينار خلال الشهر؟

4- أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

حل التمرين 7

1- حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x} f(x)\ dx=1$$

إذا

$$\int_0^{10} cx(10-x)\ dx = c\int_0^{10}(10x-x^2)\ dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

2- حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بين **(5,3)** عشرة ألاف دينار خلال الشهر هو.

$$p(3 \le x \le 5) = \int_3^5 0.006x(10-x)\ dx = 0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_3^5$$

$$= 0.006\left[\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)-\left(5(3)^2-\frac{3^3}{3}\right)\right] = 0.006[(83.33)-(36)]$$

$$= 0.006(47.33) = 0.284$$

3- إذا كان لدينا 1000 أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن عشرون ألف خلال الشهر هو:

$$1000\ \ p(x<2)$$

$$= 1000\int_0^2 0.006x(10-x)dx$$

$$= 6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 6[17.33] = 103.98 \approx 104$$

حوالي 104 أسرة.

4- التوقع الرياضي

$$E(x) = xf(x)dx = \int_0^{10} x\left(0.006x(10-x)\right) = 0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3}-\frac{10000}{4}\right)-(0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - \left(E(x)\right)^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = 0.006\int_0^{10} (10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو : $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$

والانحراف المعياري هو : $\sigma = \sqrt{5} = 2.236$

المحور السادس

التوزيعات الاحتمالية المستمرة

تمهيد

هناك الكثير من الظواهر التي تبع متغيراتها العشوائية، توزيعات مستمرة، كالوزن، الزمن،....، وغيرها، وسنحاول في هذا الجزء التعريف بأهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة (المتصلة)، والتعرف على خواصها ومميزاتها العددية

1- التوزيع المنتظم المستمر (المتصل): Continuous Uniform Distribution

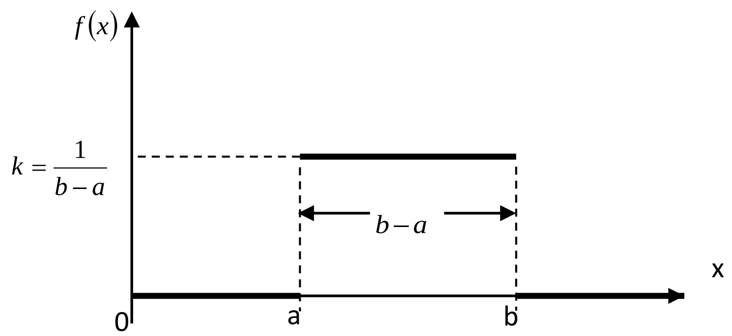
هو أبسط أنواع التوزيعات المستمرة، ويطلق عليه أحيانا التوزيع المستطيل Rectangular ، ويعتبر مهم في كثير من العمليات في الواقع العملي، كمثال على ذلك دراسة احتمال وصول شاحنات النقل الى أماكن تفريغ السلع، وأوقات مغادرتها.

وبافتراض أن X متغير عشواي يتبع التوزيع المنتظم المستمر، للفترة $[a,b]$ ، فإن دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي X تأخذ الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si \quad x\in[a,b]\\ 0 \quad si \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$

يرمز للمتغير العشوائي و ليكن X بالرمز $X\rightarrow U(a;b)$ و يقرأ : **المتغير العشوائي X يخضع أو يتبع التوزيع المنتظم على المجال** $[a,b]$

والشكل التالي يمثل دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ لقانون التوزيع المنتظم



التمثيل البياني لقانون التوزيع المنتظم

ومن خلال الشكل يتضح لنا لما سمي بالتوزيع المستطيل

1-1- تابع (دالة) التوزيع الاحتمالي المنتظم:

يمكن ايجاد دالة التوزيع التجميعية للتوزيع المنتظم كالتالي:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

و بما أن X متغير عشوائي مستمر فإن تابع التوزيع يساوي ما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx =$$

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{b-a}\ dx = \left(\frac{1}{b-a}\right)\int_{\alpha}^{x} dx = \left(\frac{1}{b-a}\right) \times [x]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

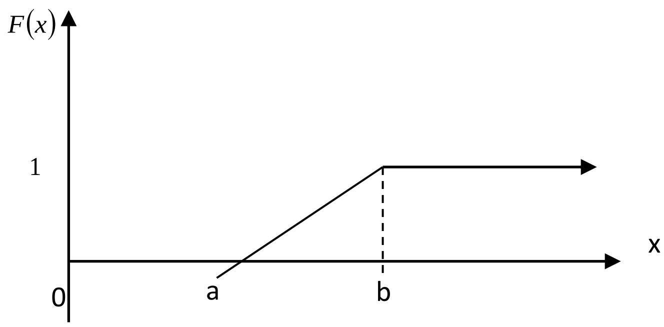
إذا كان x يساوي:

- الحد الأعلى للمجال $[a,b]$ أي: $x = b$ فإن تابع التوزيع $F(x)$ يساوي الواحد أي: $F(b) = \frac{b-a}{b-a} = 1$

وعليه فإن دالة التوزيع التجيعية $F(x)$ تساوي ما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ \ x \in [a,b] \\ 1 & si\ \ x > b \end{cases}$$

والشكل التالي يمثل دالة التوزيع $F(x)$ لقانون التوزيع المنتظم



التمثيل البياني لدالة التوزيع

1-2-المميزات العددية لقانون التوزيع المنتظم:

سوف نتطرق من خلال هذه الفقرة إلى بعض المميزات العددية لقانون التوزيع المستمر والممثلة في كل التوقع الرياضي، التباين و الانحراف المعياري.

أ- التوقع الرياضي:

يعطى التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر وفقا للعلاقة التالية:

$$E(X)=\int_x x\times\frac{1}{b-a}\ dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}\ dx$$

$$E(X)=\left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b x\ dx=\left[\frac{1}{2(b-a)}x^2\right]_a^b=\left[\frac{b^2}{2(b-a)}\right]-\left[\frac{a^2}{2(b-a)}\right]$$

$$E(X)=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

$$E(X)=\frac{b+a}{2}$$

ب- التباين:

يعطى التباين لمتغير عشوائي مستمر وفقا للعلاقة التالية:

$$V(X)=\int_x x^2\times f(x)-[E(X)]^2$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

إذن لإيجاد $V(X)$ يجب إيجاد كل من: $E(X^2)$ و $[E(X)]^2$ حيث أن:

- $[E(X)]^2=\left(\frac{b+a}{2}\right)^2$
- $E(X^2)=\int_x x^2\times f(x)\ dx$

$$E(X^2)=\int_x x^2\times f(x)\ dx=\int_a^b x^2\times\left(\frac{1}{b-a}\right)\ dx=\left(\frac{1}{b-a}\right)\int_a^b x^2\ dx$$

$$E(X^2)=\frac{b^2+ba+a^2}{3}$$

بتعويض كل من: $E(X^2)=\frac{b^2+ba+a^2}{3}$ و $E(X)=\frac{b+a}{2}$ في علاقة التباين نحصل على:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

ج- الانحراف المعياري:

الانحراف المعياري $\sigma_{(X)}$ والذي هو عبارة عن الجذر التربيعي للتباين وهذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{(b-a)}{\sqrt{12}}=\frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}$$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[-2,6]$

المطلوب:

1. أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.
2. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
3. أحسب $P(X\leq 3)$.
4. أحسب $P(-3<X\leq 7)$.
5. أحسب كل من $E(X)$، $Var(X)$ $\sigma_{(X)}$

الحل:

1- دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & si \quad x\in[a,b]\\ 0 \quad si \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$

$a=-2$ و $b=6$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & si \quad x\in[-2,6]\\ 0 \quad si \quad x\notin[-2,6]\end{cases}$$

2− دالة التوزيع التجميعية

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad x\in[a,b] \\ 1 & si \quad x>b \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<-2 \\ \dfrac{x+2}{8} & si \quad x\in[-2,6] \\ 1 & si \quad x>6 \end{cases}$$

3/ حساب $P(X\leq 3)$

$$P(X\leq 3)=F(3)=\frac{3+2}{8}=0.625$$

4/حساب $P(-3<X\leq 7)$.

$$P(-3<X\leq 7)=F(X\leq 7)-F(X\leq -3)=F(7)-F(-3)=1-0=1$$

5/حساب التوقع الرياضي: $E(X)=\dfrac{b+a}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

حساب التباين: $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{64}{12}=5.33$

حساب الانحراف المعياري: $\sigma_{(X)}=\dfrac{(b-a)}{2\sqrt{3}}=\dfrac{8}{3.46}=2.31$

<u>مثال2:</u>

إذا كان زمن وصول حافلة لنقل الطلبة إلى الجامعة يتبع التوزيع المنتظم على الفترة $[0,30]$ دقيقة

<u>المطلوب:</u>

1. أوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.
2. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
3. أوجد أحتمال وصول الحافلة في الخمسة دقائق الأخيرة خلال فترة 30 دقيقة

4. أحسب كل من $E(X)$ ، $Var(X)$ $\sigma_{(X)}$

الحل:

1− دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & si \quad x\in[a,b] \\ 0 \quad si \quad x\notin[a,b]\end{cases}$$

$a=0$ و $b=30$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30} & si \quad x\in[0,30] \\ 0 \quad si \quad x\notin[0,30]\end{cases}$$

2− دالة التوزيع التجميعية

$$F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad x\in[a,b] \\ 1 & si \quad x>b\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<0 \\ \frac{x}{30} & si \quad x\in[0,30] \\ 1 & si \quad x>30\end{cases}$$

3/ حساب الاحتمال

$$P(25\leq X\leq 30)=\int_{25}^{30}\frac{1}{30}\quad dx=\left[\frac{X}{30}\right]_{25}^{30}=\left[\frac{30-25}{30}\right]=\frac{1}{6}$$

أو باستعمال دالة التوزيع

$$P(25\leq X\leq 30)=F(X\leq 30)-F(X\leq 25)=F30-F(25)=\frac{30}{30}-\frac{25}{30}=\frac{1}{6}$$

4/حساب التوقع الرياضي: $E(X)=\frac{b+a}{2}=\frac{30}{2}=15$

حساب التباين: $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{900}{12}=75$

حساب الانحراف المعياري: $\sigma_{(X)}=\frac{(b-a)}{2\sqrt{3}}=\frac{30}{3.46}=8.67$

2- التوزيع الأسي السالب: Negative Exponential Distribution

إذا كان المتغير متغيرا عشوائيا مستمرا له توزيع اسي سالب فإن دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للمتغير العشوائي المستمر X. تعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$f(x)=\theta e^{-\theta x}$$

وتكون دالة الكثافة الاحتمالية معرفة كمايلي:

$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & si \quad x>0\\ \\ 0 & si \quad x<0\end{cases}$$

حيث أن:

- θ: تمثل عدد حقيقي موجب أي أن: $\theta>0$.
- e: أساس اللوغريتم النبيري و يساوي $e=2.71828$.

2-1- المميزات العددية لقانون التوزيع الآسي:

أ- التوقع الرياضي:

يعطى التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر وفقا للعلاقة التالية:

$$E(X)=\int_x x\times f(x)$$

$$E(X)=\int_x x\times\theta e^{-\theta x}\quad dx=\int_0^\infty x\theta e^{-\theta x}\quad dx=\int_0^\infty \theta x e^{-\theta x}\quad dx$$

حتى نتمكن من حساب هذا التكامل نستخدم ما يسمى بالتكامل بالتجزئة:

بعد الحساب نجد:

$$E(X)=\frac{1}{\theta}$$

ب-التباين:

يعطى التباين لمتغير عشوائي مستمر وفقا للعلاقة التالية:

$$V(X)=E(x-E(X))^2=\int_x (x-E(X))\times f(x)\ dx$$

بعد الحساب نجد أن : $V(X)=\frac{1}{\theta^2}$

ج-الانحراف المعياري:

$$\sigma_{(X)}=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{\theta^2}}=\frac{1}{\theta}$$

$$\sigma_{(X)}=\frac{1}{\theta}$$

2-2- دالة التوزيع الاحتمالي الآسي:

يعطى تابع التوزيع لمتغير عشوائي و ليكن X وفقا للعلاقة التالية:

$$F(x)=P(X\le x)$$

و بما أن X متغير عشوائي مستمر فإن تابع التوزيع يساوي ما يلي:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\ dx$$

$$F(x)=\int_0^x \theta e^{-\theta x}\ dx=\theta\int_0^x e^{-\theta x}\ dx=\theta\left[-\frac{1}{\theta}e^{-\theta x}\right]_0^x=\left[-e^{-\theta x}\right]_0^x$$

$$F(x)=\left[-e^{-\theta x}\right]^x-\left[-e^{-\theta x}\right]^0=\left[-e^{-\theta x}\right]+\left[e^{-\theta(0)}\right]=-e^{-\theta x}+1=1-e^{-\theta x}$$

$$F(x)=1-e^{-\theta x}$$

و عليه فإن تابع التوزيع $F(x)$ سوف يساوي ما يلي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 1-e^{-\theta x} & si \quad x\in 0<x<\infty \end{cases}$$

<u>مثال:</u>

إذا كانت الفترة الزمنية المستغرقة لانهاء خدمة عميل في مركز البريد تتبع التوزيع الاسي السالب بمتوسط 4 دقائق.

المطلوب:

1. قدم دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.
2. قدم دالة التوزيع الاحتمالي.
3. ما هو احتمال انهاء خدمة العميل في أقل من دقيقتين

<u>الحل:</u>

من أجل كتابة دالة الكثافة الاحتمالية يجب اولا ايجاد قيمة θ ، حيث نعلم أن المتوسط يساوي 4 وعليه:

$$\frac{1}{\theta}=4 \Rightarrow \theta=0.25$$

ومنه يمكن كتابة دالةالكثافة كمايلي:

$$f(x)=0.25e^{-0.25x}$$

دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X وفقا للصيغة التالية:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 1-e^{-0.25x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

3/ احتمال انهاء خدمة العميل في أقل من دقيقتين:

$$P(X\le 2)=1-e^{-0.25(2)}=0.394$$

<u>مثال2:</u>

يعطى تابع التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X وفقا للصيغة التالية:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ 1-e^{-4x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

المطلوب:

4. قدم دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.

5. أحسب $P(X \geq 5)$.

6. أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري

الحل:

-دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائ X: يرمز لها بالرمز $f(x)$:

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \text{ ي}$$

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ -4e^{-4x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

– حساب $P(X \geq 5)$:

$$P(X \geq 5)=\int_5^{\infty} f(x)dx=\int_5^{\infty} 4e^{-4x} \quad dx=4\int_5^{\infty} e^{-4x} \quad dx=4\left[-\frac{1}{4}e^{-4x}\right]_5^{\infty}=\left[-e^{-4x}\right]_5^{\infty}$$

$$P(X \geq 5)=\left[-e^{-4x}\right]_5^{\infty}=\left[-e^{-4x}\right]^{\infty}-\left[-e^{-4x}\right]^{5}=\left[-e^{-4(\infty)}\right]+\left[e^{-4(5)}\right]=0+e^{-20}=e^{-20}$$

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{4}=0.25$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_{(X)}=\frac{1}{\theta}=\frac{1}{4}=0.25$$

3- قانون التوزيع الطبيعي: The Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات المستمرة على الاطلاق، والاكثر استخداما في علم الاحصاء، خاصة في نظريات التقدير واختبار الفرضيات، ويعود الفضل لاكتشاف هذا التوزيع الى العالم الرياضي الانكليزي (De-Moivre) عام 1733 ، وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعي كل من العالمين (Laplace) و (Gauss) عام 1809.

ويعرف التوزيع الطبيعي أيضا بتوزيع جاوس (Gaussian Distribution)، نسبة إلى العالم الرياضي (Gauss)، ويعرف أيضا بالتوزيع المتناظر أو التوزيع المعتدل

وبافتراض أنه لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي(μ) وتباين(σ^2) ، فان دالة الكثافة الاحتمالية تأخذ الشكل التالي:

التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ ; x\in\left]-\infty,+\infty\right[$$

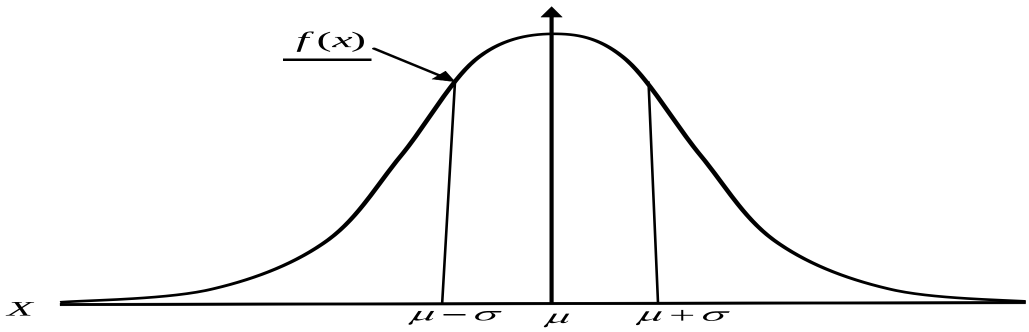
حيث أن:

- x : يمثل المتغير العشوائي الطبيعي و هو معرف ضمن المجال: $\left]-\infty,+\infty\right[$
- e : يمثل مقدار ثابت يساوي 2.7183
- μ : مقدار ثابت يمثل متوسط المجتمع أو ما يسمى بالتوقع الرياضي للمتغير العشوائي X أي $E(X)=\mu$.
- σ: مقدار ثابت يمثل الانحراف المعياري للمجتمع أو ما يسمى بالانحراف المعياري للمتغير العشوائي X أي $\sigma_X=\sigma$.

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الطبيعي بالرمز: $X\to N(\mu,\sigma)$ ، و يقرأ: **X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط أو توقع رياضي μ و انحراف معياري σ.**

3-1- منحنى التوزيع الطبيعي

ياخذ منحنى التوزيع الطبيعي شكلا يعرف بالمنحنى الطبيعي (Normal Curve)، أو المنحنى الجرسي (Bell-Shaped Curve)، وبما ان المنحنى الطبيعي هو منحنى توزيع مستمر، فإن أي نقطة من النقاط الموجودة على هذا المنحنى لا تمثل احتمالا بل تمثل قيمة تسمى بدالة كثافة الاحتمال.



3-2-خواص قانون التـوزيع الطبيعي:

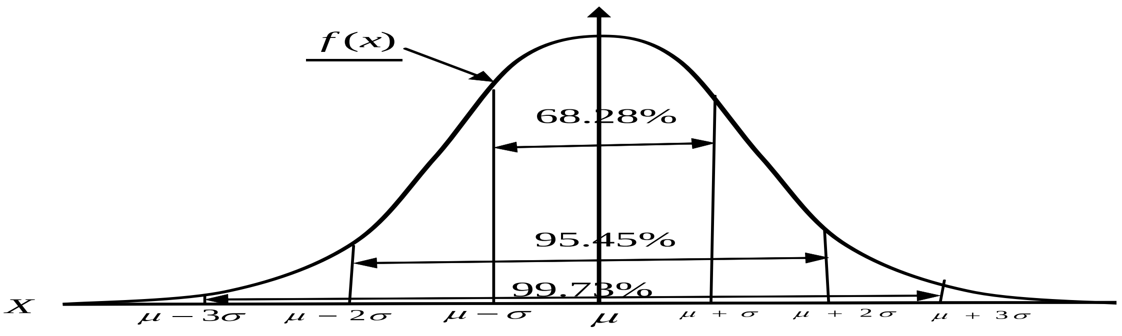
دالة كثافة التوزيع الطبيعي تحقق مجموعة من الخصائص نوردها فيما يلي:

1. $f(x) \geq 0$: الاحتمال أكبر أو يساوي الصفر أي أن الاحتمال غير سالب:
2. $\int_{z} f(x) = 1$: المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ تساوي الواحد.
3. منحنى الدالة متناظر بالنسبة للمستقيم العمودي على القيمة $X = \mu$ أو ذو المعادلة $X = \mu$ لأن $f(x) = f(-x)$ معنى ذلك أن المساحة الواقعة على يمين المستقيم العمودي على القيمة $X = \mu$ تساوي المساحة الواقعة على يسار المستقيم العمودي على القيمة $X = \mu$
4. أعظم قيمة للدالة $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ هي القيمة 0.39894.
5. مقاييس النزعة المركزية الثلاثة الممثلة في كل من التوقع الرياضي (المتوسط)، الوسيط و المنوال متساوي أو متطابقة أي أن: $E(X) = Me = Mo$
6. *تتوزع المساحة تحت المنحنى على المحور الأفقي كالتالي:*

68.28"% تقريبا من مساحة الشكل الموزع طبيعيا تقع ما بين $\mu \pm \sigma$

95.45"% تقريبا من مساحة الشكل الموزع طبيعيا تقع ما بين $\mu \pm 2\sigma$

99.73"% تقريبا من مساحة الشكل الموزع طبيعيا تقع ما بين $\mu \pm 3\sigma$



3-3-المميزات العددية للتوزيع الطبيعي:

أ- التوقع الرياضي:

التوقع الرياضي يساوي ما يلي:

$$E(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ze^{-\frac{1}{2}Z^2}dz+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{1}{2}Z^2}dz=\mu$$

أي أن:

$$E(X)=\mu$$

ب- التباين:

تباين متغير عشوائي مستمر يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$V(X)=E\left[(x-E(X))^2\right]=\int_x (x-E(X))^2\times f(x)dx$$

والتي يمكن كتابتها بشكل آخر كما يلي:

$$V(X)=\int_x x^2\times f(x)dx-[E(X)]^2=\int_x x^2\times f(x)dx-\mu^2$$

حيث أن:

$$\int_x x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

نضع: $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}\Rightarrow Z\sigma=x-\mu\Rightarrow x=Z\sigma+\mu\Rightarrow dx=\sigma dz$$

نعوض في العلاقة الأخيرة لـ $\int_x x^2 f(x)dx=$ فنحصل على ما يلي:

$$\int_x x^2 f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{1}{2}Z^2}\sigma dz$$

التكامل بالتجزئة كما يلي:

$$u=z\Rightarrow u'=dz$$

$$v' = ze^{-\frac{1}{2}Z^2}dz \Rightarrow v = -2e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

$$\int uv' = uv - \int u'v \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} zze^{-\frac{1}{2}Z^2}dz = \left[-2ze^{-\frac{1}{2}Z^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int -2e^{-\frac{1}{2}Z^2} = 0 + \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$$

و عليه يصبح

$$\int_x x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma^2 + \mu^2$$

و منه التباين يساوي ما يلي:

$$V(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$V(X) = \sigma^2$$

ج- الانحراف المعياري

يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$\sigma_{(X)} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma_{(X)} = \omega$$

3-4- دالة التوزيع لقانون التوزيع الطبيعي:

يعطى تابع التوزيع لمتغير عشوائي مستمر وفقا للعلاقة التالية:

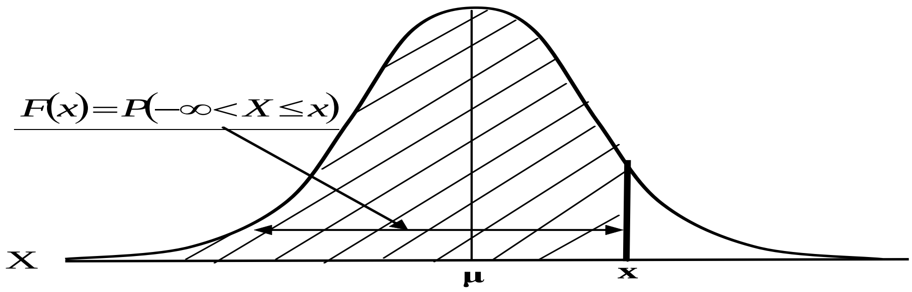
$$F(x) = P(X \le x) = P(-\infty < X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

بتعويض دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ في علاقة تابع التوزيع نحصل على ما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = P(-\infty < X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

بيانيا تابع التوزيع $F(x)$ لقانون التوزيع الطبيعي عبارة عن المساحة الواقعة تحت المنحنى $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ و المحصورة بين القيمتين x و $-\infty$. هذه المساحة ممثلة في الجزء المضلل كما يوضحه الشكل أدناه .



5-3- التوزيع الطبيعي المعياري: Standard Normal Distribution

لا حظنا بأن التوزيع اطبيعي للمتغير العشوائي يعتمد على متوسطه وانحرافه المعياري، وهاتان المعلمتان تؤثران على مكان التوزيع وعلى مقدار تشتته، فكل قيمة للمتوسط والتباين تغير شكل ومكان التوزيع، ولكن يوجد توزيع طبيعي واحد ثابت ومجدول، يمكن تحويل جميع التوزيعات الطبيعية الأخرى اليه، ويسمى التوزيع الطبيعي المعياري.

نقول عن متغير عشوائي مستمر و ليكن Z أنه يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تعطى وفقا للصيغة التالية:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\ ;z\in\left]-\infty,+\infty\right[$$

حيث أن:

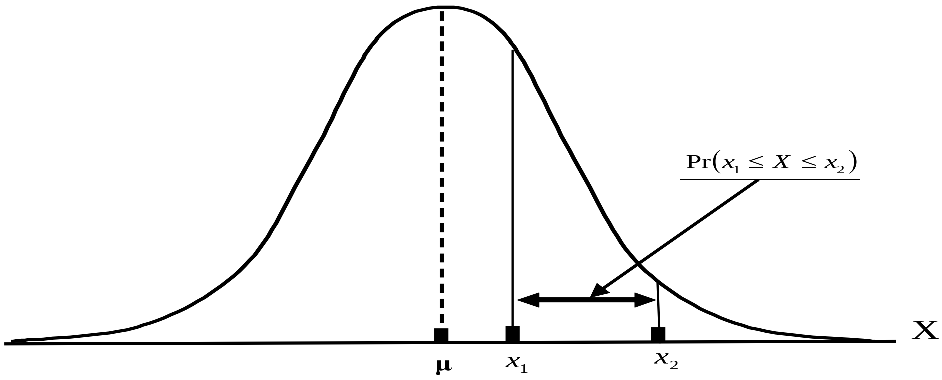
- z : يمثل المتغير العشوائي الطبيعي المعياري أو القياسي و هو معرف ضمن المجال: $\left]-\infty,+\infty\right[$ أي أن: $x\in R$
- e : يمثل مقدار ثابت يساوي 2.7183 أي أن: $e=2.7183$ و يمثل أساس اللوغاريتم النبيري.

6-3- حساب احتمال أن X محصور بين قيمتين:

حساب احتمال يكون فيه المتغير العشوائي X محصور بين قيمتين x_1 و x_2 يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

بيانيا هذا الاحتمال عبارة عن المساحة الواقعة تحت منحنى قانون التوزيع الطبيعي والمحصورة بين المستقيمين العموديين على القيمتين x_1 و x_2 كما يوضحه الشكل أدناه:



نجري بعض التعديلات أو التحويلات على الاحتمال $P(x_1 \le X \le x_2)$ المطلوب حسابه كما يلي:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)$$

نضع:

- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ حيث أن: Z متغير عشوائي مستنتج يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أي أن: $Z \to N(0,1)$
- $z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma}$
- $z_2 = \frac{x_2-\mu}{\sigma}$

بالتعويض في علاقة الاحتمال المطلوب حسابه $P(x_1 \le X \le x_2)$ نحصل على ما يلي:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = P(z_1 \le Z \le z_2)$$

<u>مثال:</u>

ليكن X متغير عشوائي حيث أن: $X \to N(20,10)$

أحسب: $\Pr(15 \le X \le 18)$.

الإجابة:

$\Pr(15 \le X \le 18)$ يساوي ما يلي:

$$P(15 \le X \le 18) = \int_{15}^{18} f(x)dx = \int_{15}^{18} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{15}^{18} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نجري بعض التعديلات أو التحويلات على الاحتمال $P(15 \le X \le 18)$ المطلوب حسابه كما يلي:

$$P(15 \le X \le 18) = P\left(\frac{15-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{18-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{15-20}{10} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{18-20}{10}\right)$$

نضع:

- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ حيث أن: Z متغير عشوائي مستنتج يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أي أن: $Z \to N(0,1)$
- $z_1 = \frac{15-\mu}{\sigma} = \frac{15-20}{10} = -0.50$
- $z_2 = \frac{18-\mu}{\sigma} = \frac{18-20}{10} = -0.20$

بالتعويض في علاقة الاحتمال المطلوب حسابه $P(15 \le X \le 18)$ نحصل على ما يلي:

$$P(15 \le X \le 18) = P\left(\frac{15-20}{10} \le Z \le \frac{18-20}{10}\right) = P(-0.50 \le Z \le -0.20)$$

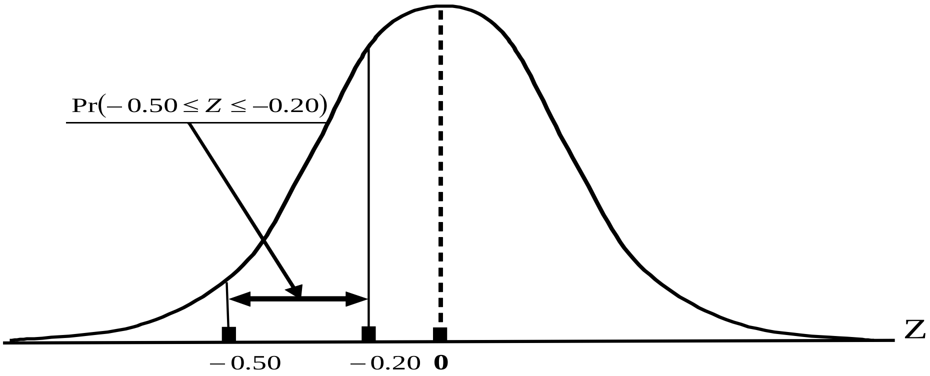
و عليه يصبح لدينا ما يلي:

$$P(15 \le X \le 18) = P(-0.50 \le Z \le -0.20)$$

وهذا الاحتمال يساوي ما يلي:

$$\Pr(-0.50 \le Z \le -0.20) = \int_{-0.50}^{-0.20} f(z)dz = \int_{-0.50}^{-0.20} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0.50}^{-0.20} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

بيانيا هذا الاحتمال عبارة عن المساحة الواقعة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري و المحصورة بين المستقيمين العموديين على القيمتين السالبتين -0.20 و -0.50 كما هو موضح في الشكل أدناه.



والاختمل المطلوب هو:

- $P(0.20 \le Z \le 0.50) = F(0.50) - F(0.20)$

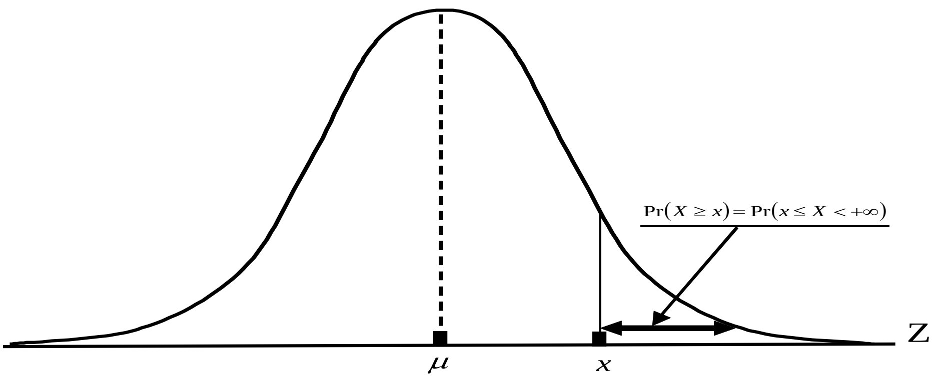
و عليه فإن:

$$P(-0.5 \le Z \le -0.2) = P(0.2 \le Z \le 0.5) = F(0.5) - F(0.2) = 0.69146 - 0.57926 = 0.11220$$

3-7- حساب احتمال أن X أكبر أو يساوي قيمة:

$$P(X \ge x) = P(x \le X < +\infty) = \int_x^{+\infty} f(x)dx = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

بيانيا هذا الاحتمال عبارة عن المساحة الواقعة على يمين المستقيم العمودي على القيمة x كما يوضحه الشكل أدناه:



نجري بعض التعديلات أو التحويلات على الاحتمال $P(X \ge x)$ المطلوب حسابه كما يلي:

$$P(X \ge x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

نضع:

- $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ حيث أن: Z متغير عشوائي مستنتج يتبع التوزيع الطبيعي المعياري أي أن: $Z\rightarrow N(0,1)$
- $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$

بالتعويض في علاقة الاحتمال المطلوب حسابه $P(X\geq x)$ نحصل على ما يلي:

$$P(X\geq x)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=P(Z\geq z)$$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي حيث أن: $X\rightarrow N(125,15)$

أحسب: $P(X\geq 140)$.

الحل:

$P(X\geq 140)$ ما هو إلا احتمال أن المتغير العشوائي X يقع ضمن المجال $[140,+\infty[$ أي:

$$P(X\geq 140)=P(140\leq X<+\infty)=\int_{140}^{+\infty}f(x)dx=\int_{140}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{140}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

$$P(X\geq 140)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{140-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X\geq 140)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{140-125}{15}\right)=P(Z\geq 1.00)$$

وعليه يصبح لدينا ما يلي:

$$P(X\geq 140)=P(Z\geq 1.00)$$

$$P(X\geq 140)=P(Z\geq 1.00)=1-F(1.00)=1-0.84134=0.15866$$

المحور السابع

العزوم والدالة المولدة للعزوم

1. العزوم والدالة المولدة للعزوم Moments and Moment Generating functions

تطرقنا سابقا إلى المميزات العددية للمتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة وهي الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$، حيث يصفان مركزية التوزيعات وانتشارها الاحتمالي ضمن نطاق معين، ولكنهما غير كافيين إذ أننا نجد الكثير من التوزيعات الاحتمالية تشترك في نفس التوقع الرياضي والتباين رغم اختلافها عن بعضها البعض.

لهذا وجب استعمال مقاييس وصفية كمية أخرى من اجل تحديد خصائص التوزيعات الاحتمالية واحتمالاتها ومن بين هذه المقاييس العزوم.

1.1.العزوم:

تعرف العزوم على أنها القيم المتوقعة لدالة الاحتمال أو دالة الكثافة الاحتمالية بدلالة المتغير العشوائي، والقيمة المتوقعة هنا تؤخذ بدلالة التوقع الرياضي، ونميز نوعين العزوم الابتدائية والعزوم المركزية.

1.1.1. العزوم الابتدائية:

إذا كان X متغيرا عشوائيا فإن العزم الابتدائي من الدرجة k والذي يرمز له بالرمز m_k يعرف كما يلي: $m_k = E(X^k)$ ، وتعتمد طريقة حسابه على نوع المتغير المدروس.

فإذا كان متغير عشوائي متقطع فإن :

$$m_k = E(X^k) = \sum_x X^k f(x_i)$$

أما إذا كان المتغير العشوائي مستمرا فإن:

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} X^k f(x)dx$$

الملاحظ من العلاقتين السابقتين أنه إذا كان $k = 1$ فإن العزم الأول للمتغير العشوائي هو نفسه التوقع الرياضي

$$m_1 = E(X^1) = E(X)$$

2.1.1. العزوم المركزية:

إذا كان X متغيرا عشوائيا فإن العزم المركزي من الدرجة k حول متوسطه والذي يرمز له بالرمز M_k يعرف كما يلي: $M_k = E\big(X - E(X)\big)^k$ ، وتعتمد طريقة حسابه على نوع المتغير المدروس.

فإذا كان متغير عشوائي متقطع فإن :

$$M_k = E\big(X - E(X)\big)^k = \sum_x \big(X - E(X)\big)^k f(x_i)$$

أما إذا كان المتغير العشوائي مستمرا فإن:

$$M_k = E\left(X - E(X)\right)^k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(X - E(X)\right)^k f(x)dx$$

الملاحظ من العلاقتين السابقتين أنه إذا كان $k = 2$ فإن العزم المركزي الثاني للمتغير العشوائي هو نفسه التباين

$$M_2 = E\left(X - E(X)\right)^2 = V(X)$$

2.1. الدالة المولدة للعزوم **Moment Generating function**

إذا كان X متغيرا عشوائيا له دالة احتمال أو دالة كثافة إحتمالية فإن الدالة المولدة للعزوم والتي يرمز لها بالرمز $M_x(t)$ تعرف كما يلي: $M_x(t) = E(e^{tx})$ ، وتعتمد طريقة حسابه على نوع المتغير المدروس.

فإذا كان متغير عشوائي متقطع فإن :

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x (e)^{tx} f(x_i)$$

أما إذا كان المتغير العشوائي مستمرا فإن:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} (e)^{tx} f(x)dx$$

لإذا افترضنا بأن X متغير عشوائي متقطع، وبأن العزوم من الدرجة K حول نقطة الأصل موجودة وباستعمال منشور (ماكلورين Maclaurin Series) الشهير للتوابع: $\forall\, x: e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ فإن:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x (e)^{tx} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left\{1 + \frac{tx}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \cdots .. + \frac{(xt)^i}{i!} + \cdots\right\} f(x_i)$$

$$= \sum_x f(x_i) + \frac{t}{1!}\sum_x x_i f(x_i) + \frac{t^2}{2!}\sum_x x_i^2 f(x_i) + \cdots$$

وبما أن: $\sum_x f(x_i) = 1$

فإنه يمكن كتابة $M_x(t)$ كالتالي:

$$M_x(t) = m_0 + \frac{t}{1!}m_1 + \frac{t^2}{2!}m_2 + \cdots + \frac{t^i}{i!}m_i + \cdots$$

وهذه المعادلة تعطي كل العزوم دفعة واحدة

أما إذا كان المتغير العشوائي مستمرا فإننا نستعمل التكامل كالتالي:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} (e)^{tx} f(x) \;\; = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{tx}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \cdots .. + \frac{(xt)^i}{i!} + \cdots \right\} f(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_i) + t \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) + \frac{t^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) + \cdots$$
$$= m_0 + \frac{t}{1!} m_1 + \frac{t^2}{2!} m_2 + \cdots + \frac{t^i}{i!} m_i + \cdots$$

وهي نفسها العلاقة التي وجدناها في حالة المتغير العشوائي المتقطع

<u>مثال**1**</u>: ليكن x متغير عشوائي متقطع يمثل توزيع Binomial كالتالي:

$$\boldsymbol{f(x) = P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}}$$

المطلوب: أوجد الدالة للعزوم

<u>الحل:</u>

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x (e)^{tx} f(x_i) = \sum_x e^{tx} \boldsymbol{C_n^x p^x q^{n-x}}$$
$$= \sum_x \boldsymbol{C_n^x (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n}$$

<u>مثال**2**</u>: ليكن x متغير عشوائي متقطع يمثل توزيع Bernoulli كالتالي:

$$\boldsymbol{f(x) = P(X = x_i) = p^x q^{1-x} \qquad , x = 0, 1}$$

المطلوب: إيجاد الدالة المولدة للعزوم

إيجاد التوقع الرياضي والتباين

<u>الحل:</u>

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x (e)^{tx} f(x_i) = \sum_x e^{tx} \boldsymbol{p^x q^{1-x}} = \sum_x \boldsymbol{(pe^t)^x q^{1-x} = pe^t + q}$$

وعليه سيكون:

$$M'_x(t) = \frac{dM_x(t)}{dt} = pe^t \Rightarrow M'_x(0) = E(X) = p$$
$$M''_x(t) = \frac{dM'_t(t)}{dt} = pe^t \Rightarrow M''_x(0) = E(X^2) = p$$

ومنه التباين يساوي:

$$V(X) = M''_x - (M'_x)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

<u>مثال**3**</u>: ليكن x متغير عشوائي متقطع يمثل توزيع Poisson كالتالي:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-6} 6^x}{x!} \qquad x = 0,1,2, ...$$

المطلوب: إيجاد الدالة المولدة للعزوم

إيجاد الأمل الرياضي والتباين

الحل:

$$M(t)=E(e^{tx})=\sum_{x}^{\infty}e^{tx}f(x)=\sum_{x}^{\infty}e^{tx}\frac{6^{x}e^{-6}}{x!}=e^{-6}\sum_{x}^{\infty}\frac{(e^{t}6)^{x}}{x!}=e^{-6}e^{(6e^{t})}$$
$$=e^{-6+6e^{t}}=\boldsymbol{e^{-6(1-e^{t})}}$$

وعليه سيكون:

$$M'_{x}(t)=\frac{dM_{x}(t)}{dt}=e^{6(e^{t}-1)}6e^{t}=6e^{t+6(e^{t}-1)}\Longrightarrow M'_{x}(0)=E(X)=6$$
$$M''_{x}(t)=\frac{dM'_{t}(t)}{dt}=e^{6(e^{t-1})}6e^{t}+(6e^{t})^{2}e^{6(e^{t-1})}\Rightarrow M''_{x}(0)=E(X^{2})=42$$

ومنه التباين يساوي:

$$V(X)=M''_{x}-(M'_{x})^{2}=42-6^{2}=42-36=6$$

<u>مثال4</u>: ليكن x متغير عشوائي مستمر يمثل التوزيع الطبيعي كالتالي:

$$f(x)=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\ \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}\mathrm{dx}$$

المطلوب: إيجاد الدالة المولدة للعزوم

إيجاد الأمل الرياضي والتباين

الحل:

$$M_{x}(t)=E(e^{tx})=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\ \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}\mathrm{dx}$$

نفرض أنه:" $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$ ومنه نحصل على $x=\sigma y+\mu$ و $dx=\sigma dy$ وبتعويضها في المعادلة أعلاه نتحصل على:

$$M_{x}(t)=E(e^{tx})=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sigma\sqrt{2\pi}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(\sigma y+\mu)}\ \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}y^{2}}\sigma dy=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2\pi}}}e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\sigma yt}\ \boldsymbol{e}^{-\frac{1}{2}y^{2}}\mathrm{dy}$$
$$=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\sqrt{2\pi}}}e^{\mu t}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{e}^{\frac{2\sigma yt-y^{2}}{2}}\mathrm{dy}$$

وبإضافة وطرح المقدار $\sigma^2 t^2$ في العلاقة السابقة نجد:

$$M_x(t) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}^{\frac{\boldsymbol{\sigma^2 t^2 - \sigma^2 t^2 + 2\sigma y t - y^2}}{\mathbf{2}}} \mathrm{dy} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} e^{\frac{2\mu t + \boldsymbol{\sigma^2 t^2}}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e}^{\frac{-(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\sigma t})^2}{\mathbf{2}}} \mathrm{dy}$$

ومنه:

$$M_x(t) = e^{\frac{2\mu t + \boldsymbol{\sigma^2 t^2}}{2}}$$

وعليه سيكون:

$$M'_x(t) = \frac{dM_x(t)}{dt} = (\mu + \sigma^2 t) e^{\frac{2\mu t + \boldsymbol{\sigma^2 t^2}}{2}} \Rightarrow M'_x(0) = E(X) = \mu$$

$$M''_x(t) = \frac{dM'_t(t)}{dt} = (\mu + \sigma^2 t)(\mu + \sigma^2 t) e^{\frac{2\mu t + \boldsymbol{\sigma^2 t^2}}{2}} + \sigma^2 e^{\frac{2\mu t + \boldsymbol{\sigma^2 t^2}}{2}} \Rightarrow M''_x(0) = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$$

ومنه التباين يساوي:

$$V(X) = M''_x - (M'_x)^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

المراجع

المراجع

1. علاء الدين القبانجي وحسام حمامه كمرجي " الاحتمال والإحصاء"، منشورات جامعة دمشق، سوريا، 2012.
2. مبارك اسبر ديب " مبادئ في الاحتمالات والاحصاء"، جامعة تشرين، الجمهورية العربية السورية، 2009.
3. علي عبد السلام العماري و علي حسين العجيلي " الإحصاء والاحتمالات، النظرية والتطبيق"، دار الحكمة للنشر، ليبيا
4. جبار عبد مضحي " مقدمة في نظرية الاحتمالات" دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمانن الأردن، 2010.

1. Anne-Marie Dussaix, Jean-Pierre Indjehagopian, Méthodes statistique appliquées a la gestion, Les éditions d'organisations, Paris, 1981.
2. Corina Reischer, Raymond Leblanc, Bruno Rémillard, Denis Larocque, Théorie des probabilités, Problèmes et solutions, Presse de l'université du québec , 2002.
3. Donald H.Sanders, François Allard, Les Statistique, McGraw-Hill, Canada, 1980.
4. Fourgeaud H., Fuchs A., Statistique, Dunod, Paris, 1967.
5. Gilles Ouellet, Statistiques :Théorie Exemples Problèmes, Les éditions Le Griffon d'argile, Canada, 1985.
6. Guitton H., Statistique, Dalloz, Paris, 1971.
7. Ludovic Lebart, Alain Morineau, Marie Piron, Statistique exploratoire multidimensionnelle, Dunod, Paris, 2000.
8. Renyi A., Calcul des probabilités, Dunod, Paris, 1966.
9. Saporta G., Probabilités, analyse des données et statistique, Technip, Paris, 1990.
10. Tassi P., Méthodes statistiques, Economica, paris, 1985.

الملاحق

الملحق رقم 01

جدول التوزيع الاحتمالي ثنائي الحد

$$\Pr(X=x)=f(x)=C_n^x p^x q^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$

		P										
$n\downarrow$	$x_i\downarrow$	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
01	**00**	0.9900	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	01	0.1000	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
02	**00**	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	01	0.0198	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	02	0.0001	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
03	**00**	0.9703	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	01	0.0294	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	02	0.0003	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	03	0.0000	0.0001	0.0034	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
04	**00**	0.9606	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	01	0.0388	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	02	0.0006	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	03	0.0000	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	04	0.0000	0.0000	0.0001	0.0022	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
05	**00**	0.9510	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
	01	0.0480	0.2036	0.3280	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1562
	02	0.0010	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	03	0.0000	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	04	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1562

	05	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0312
06	**00**	0.9415	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	01	0.0571	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	02	0.0014	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	03	0.0000	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	04	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	05	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	06	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
07	**00**	0.9321	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	01	0.0659	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	02	0.0020	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	03	0.0000	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	04	0.0000	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	05	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	06	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078

$n\downarrow$	$x_i\downarrow$	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
08	**00**	0.9227	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1002	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	01	0.0746	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0312

	02	0.0026	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2065	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	03	0.0001	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	04	0.0000	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	05	0.0000	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	06	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0403	0.1094
	07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0312
	08	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039
90	**00**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	01	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	02	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	03	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	04	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	05	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	06	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	08	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	**00**	0.9044	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	01	0.0914	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	02	0.0042	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	03	0.0001	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	04	0.0000	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	05	0.0000	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	06	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	08	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010

11	**00**	0.8953	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	01	0.0995	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	02	0.0050	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	03	0.0002	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	04	0.0000	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	05	0.0000	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	06	0.0000	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	08	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005

$n\downarrow$	$x_i\downarrow$	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.50**
21	**00**	0.8864	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	01	0.1074	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	02	0.0060	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	03	0.0002	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	04	0.0000	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208

	05	0.0000	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	06	0.0000	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	07	0.0000	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	08	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002

الملحق رقم 02

جدول التوزيع الاحتمالي لبواسون

$$\Pr(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

	λ								
$x_i \downarrow$	**0.10**	**0.20**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.80**	**0.90**
00	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657

01	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
02	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
03	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
04	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111
05		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
06			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
07					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004

	λ								
x_i ↓	**1.00**	**1.50**	**2.00**	**2.50**	**3.00**	**3.50**	**4.00**	**4.50**	**5.00**
00	0,36788	0,22313	0,13534	0,08208	0,04979	0,03020	0,01832	0,01111	0,00674
01	0,36788	0,33470	0,27067	0,20521	0,14936	0,10569	0,07326	0,04999	0,03369
02	0,18394	0,25102	0,27067	0,25652	0,22404	0,18496	0,14653	0,11248	0,08422
03	0,06131	0,12551	0,18045	0,21376	0,22404	0,21579	0,19537	0,16872	0,14037
04	0,01533	0,04707	0,09022	0,13360	0,16803	0,18881	0,19537	0,18981	0,17547
05	0,00307	0,01412	0,03609	0,06680	0,10082	0,13217	0,15629	0,17083	0,17547
06	0,00051	0,00353	0,01203	0,02783	0,05041	0,07710	0,10420	0,12812	0,14622
07	0,00007	0,00076	0,00344	0,00994	0,02160	0,03855	0,05954	0,08236	0,10444
08	0,00001	0,00014	0,00086	0,00311	0,00810	0,01687	0,02977	0,04633	0,06528
09	0,00000	0,00002	0,00019	0,00086	0,00270	0,00656	0,01323	0,02316	0,03627
10		0,00000	0,00004	0,00022	0,00081	0,00230	0,00529	0,01042	0,01813
11			0,00001	0,00005	0,00022	0,00073	0,00192	0,00426	0,00824
12			0,00000	0,00001	0,00006	0,00021	0,00064	0,00160	0,00343
13				0,00000	0,00001	0,00006	0,00020	0,00055	0,00132
14					0,00000	0,00001	0,00006	0,00018	0,00047
15						0,00000	0,00002	0,00005	0,00016
16							0,00000	0,00002	0,00005
17								0,00000	0,00001
18									0,00000

	λ

$x_i \downarrow$	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	8.50	9.00	9.50
00	0,00409	0,00248	0,00150	0,00091	0,00055	0,00034	0,00020	0,00012	0,00007
01	0,02248	0,01487	0,00977	0,00638	0,00415	0,00268	0,00173	0,00111	0,00071
02	0,06181	0,04462	0,03176	0,02234	0,01556	0,01073	0,00735	0,00500	0,00338
03	0,11332	0,08924	0,06881	0,05213	0,03889	0,02863	0,02083	0,01499	0,01070
04	0,15582	0,13385	0,11182	0,09123	0,07292	0,05725	0,04425	0,03374	0,02540
05	0,17140	0,16062	0,14537	0,12772	0,10937	0,09160	0,07523	0,06073	0,04827
06	0,15712	0,16062	0,15748	0,14900	0,13672	0,12214	0,10658	0,09109	0,07642
07	0,12345	0,13768	0,14623	0,14900	0,14648	0,13959	0,12942	0,11712	0,10371
08	0,08487	0,10326	0,11882	0,13038	0,13733	0,13959	0,13751	0,13176	0,12316
09	0,05187	0,06884	0,08581	0,10140	0,11444	0,12408	0,12987	0,13176	0,13000
10	0,02853	0,04130	0,05578	0,07098	0,08583	0,09926	0,11039	0,11858	0,12350
11	0,01426	0,02253	0,03296	0,04517	0,05852	0,07219	0,08530	0,09702	0,10666
12	0,00654	0,01126	0,01785	0,02635	0,03658	0,04813	0,06042	0,07277	0,08444

	λ								
$x_i \downarrow$	**5.50**	**6.00**	**6.50**	**7.00**	**7.50**	**8.00**	**8.50**	**9.00**	**9.50**
13	0,00277	0,00520	0,00893	0,01419	0,02110	0,02962	0,03951	0,05038	0,06171
14	0,00109	0,00223	0,00414	0,00709	0,01130	0,01692	0,02399	0,03238	0,04187
15	0,00040	0,00089	0,00180	0,00331	0,00565	0,00903	0,01359	0,01943	0,02652
16	0,00014	0,00033	0,00073	0,00145	0,00265	0,00451	0,00722	0,01093	0,01575
17	0,00004	0,00012	0,00028	0,00060	0,00117	0,00212	0,00361	0,00579	0,00880
18	0,00001	0,00004	0,00010	0,00023	0,00049	0,00094	0,00170	0,00289	0,00464
19	0,00000	0,00001	0,00003	0,00009	0,00019	0,00040	0,00076	0,00137	0,00232
20		0,00000	0,00001	0,00003	0,00007	0,00016	0,00032	0,00062	0,00110
21			0,00000	0,00001	0,00003	0,00006	0,00013	0,00026	0,00050
22				0,00000	0,00001	0,00002	0,00005	0,00011	0,00022
23					0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00009
24						0,00000	0,00001	0,00002	0,00004
25							0,00000	0,00001	0,00001
26								0,00000	0,00000

	λ								
$x_i \downarrow$	**10.00**	**11.00**	**12.00**	**13.00**	**14.00**	**15.00**	**16.00**	**17.00**	**18.00**
00					0,00005	0,00002	0,00001	0,00000	0,00000
01		0,00045	0,00018	0,00007	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000
02	0,00227	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003	0,00001	0,00001	0,00000
03	0,00757	0,00370	0,00177	0,00083	0,00038	0,00017	0,00008	0,00003	0,00001
04	0,01892	0,01019	0,00531	0,00269	0,00133	0,00065	0,00031	0,00014	0,00007
05	0,03783	0,02242	0,01274	0,00699	0,00373	0,00194	0,00098	0,00049	0,00024
06	0,06306	0,04109	0,02548	0,01515	0,00870	0,00484	0,00262	0,00139	0,00072
07	0,09008	0,06458	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037	0,00599	0,00337	0,00185
08	0,11260	0,08879	0,06552	0,04573	0,03044	0,01944	0,01199	0,00716	0,00416
09	0,12511	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03241	0,02131	0,01353	0,00833
10	0,12511	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861	0,03410	0,02300	0,01499
11	0,11374	0,11938	0,11437	0,10148	0,08436	0,06629	0,04960	0,03554	0,02452
12	0,09478	0,10943	0,11437	0,10994	0,09842	0,08286	0,06613	0,05036	0,03678
13	0,07291	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09561	0,08139	0,06585	0,05093
14	0,05208	0,07275	0,09049	0,10209	0,10599	0,10244	0,09302	0,07996	0,06548
15	0,03472	0,05335	0,07239	0,08848	0,09892	0,10244	0,09922	0,09062	0,07858
16	0,02170	0,03668	0,05429	0,07189	0,08656	0,09603	0,09922	0,09628	0,08840
17	0,01276	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08474	0,09338	0,09628	0,09360
18	0,00709	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061	0,08301	0,09094	0,09360
19	0,00373	0,00840	0,01614	0,02716	0,04085	0,05575	0,06990	0,08136	0,08867
20	0,00187	0,00462	0,00968	0,01766	0,02860	0,04181	0,05592	0,06916	0,07980
21	0,00089	0,00242	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986	0,04261	0,05599	0,06840
22	0,00040	0,00121	0,00302	0,00646	0,01213	0,02036	0,03099	0,04326	0,05597
23	0,00018	0,00058	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328	0,02156	0,03198	0,04380
24	0,00007	0,00027	0,00079	0,00198	0,00431	0,00830	0,01437	0,02265	0,03285
25	0,00003	0,00012	0,00038	0,00103	0,00241	0,00498	0,00920	0,01540	0,02365
26	0,00001	0,00005	0,00017	0,00051	0,00130	0,00287	0,00566	0,01007	0,01637
27	0,00000	0,00002	0,00008	0,00025	0,00067	0,00160	0,00335	0,00634	0,01092
28		0,00001	0,00003	0,00011	0,00034	0,00086	0,00192	0,00385	0,00702
29		0,00000	0,00001	0,00005	0,00016	0,00044	0,00106	0,00226	0,00436

30			0,00001	0,00002	0,00008	0,00022	0,00056	0,00128	0,00261
31			0,00000	0,00001	0,00003	0,00011	0,00029	0,00070	0,00152
32				0,00000	0,00001	0,00005	0,00015	0,00037	0,00085
33					0,00001	0,00002	0,00007	0,00019	0,00047

	λ								
$x_i \downarrow$	**10.00**	**11.00**	**12.00**	**13.00**	**14.00**	**15.00**	**16.00**	**17.00**	**18.00**
34					0,00000	0,00001	0,00003	0,00010	0,00025
35						0,00000	0,00002	0,00005	0,00013
36							0,00001	0,00002	0,00006
37							0,00000	0,00001	0,00003
38								0,00000	0,00001
39									0,00001
40									0,00000