الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون -تيارت -

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

الإشتقاقية

موجهة لطلبة

السنة الأولى جذع مشترك علوم الاقتصادية، تجارية وعلوم التسيير

من اعداد الدكتور:

مختار مختاري

السنة الجامعية

2023 - 2022

1. الإشتقاقية :

1.1. قابلية الاشتقاق:

1.2. تعريف العدد المشتق:

لتكن f دالة معرفة على مجال I و x_0 عدد من I .

القول أن f قابلة للاشتقاق عند x_0 يعني أن النسبة $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية محدودة لما x يؤول إلى x_0 . تسمى هذه النهاية بالعدد المشتق للدالة f عند x_0 و نرمز لها بالرمز $f'(x_0)$.

نتيجة : بوضع $x-x_0=h$ نحصل على :

f تقبل الاشتقاق عند x_0 يعني $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ يعني

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

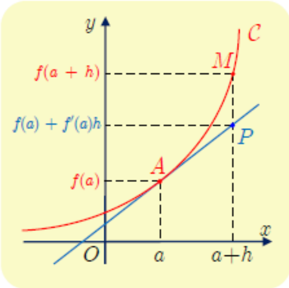
1.3. ملاحظات :

- ✓ تكون f غير قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=+\infty$ أو $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=-\infty$ أو غير موجودة.
- ✓ إذا كانت f قابلة للاشتقاق من أجل كل قيمة x من المجال I نقول أن f قابلة للاشتقاق على I و الدالة : $f':x\to f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f على المجال I.
- ✓ f تقبل الاشتقاق على المجال I يعني f' مستمرة على المجال I.

1.4. مماس لمنحنى دالة:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و قابلة للاشتقاق عند x_0 من I . C_f تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المماس للمنحنى C_f عند النقطة $A(x_0,f(x_0))$ هو المستقيم الذي يشمل A ومعامل توجيهه $f'(x_0)$ و معادلة له $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$



1.5.ملاحظة :

إذا كانت $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\pm\infty$ فإن C_f له مماس موازي لمحور التراتيب.

1.6.قابلية إشتقاق دالة على يمين وعلى يسارالقيمة x_0:

1. إذا كانت f دالة معرفة على الأقل مجال من الشكل $[x_0,x_0+\alpha[$ أو $[x_0,+\infty[$ حيث $\alpha>0$
و كانت $\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ نقول أن الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين القيمة x_0
و عددها المشتق من اليمين هو $f_>'(x_0)=\ell$.

2. إذا كانت f دالة معرفة على الأقل مجال من الشكل $]x_0-\alpha,x_0]$ أو $]-\infty,x_0]$ حيث $\alpha>0$
و كانت $\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell'$ نقول أن الدالة f تقبل الإشتقاق على يسارالقيمة x_0
وعددها المشتق من اليمين هو $f_<'(x_0)=\ell'$.

ملاحظات :

i. إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين و على يسار القيمة x_0 و كان
$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نقول أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند القيمة x_0
و عددها المشتق هو $f'(x_0)$.

ii. إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق على يمين و على يسار القيمة x_0 و كان
$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نقول أن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند القيمة x_0.

مثال 1 :

الدالة : $f:x\mapsto x\sqrt{x}$ قابلية للاشتقاق على اليمين القيمة $x_0=0$ لأنها معرفة على $[0;+\infty[$ و $f(0)=0$

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{h\sqrt{h}}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \sqrt{h}$$
$$= 0$$

مثال 2 :

الدالة: $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$ غير قابلية للاشتقاق على اليسار القيمة $x_0 = 2$ و $f(2) = 0$ لأن :

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{\sqrt{-h}}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{\sqrt{-h}}{-\left(\sqrt{-h}\right)^2}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{-\sqrt{-h}}$$
$$= -\infty$$

مثال 3 :

الدالة : $f : x \mapsto |x|$ قابلية الاشتقاق على اليمين القيمة $x_0 = 0$ لأنها معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية و

$$\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{|h|}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{h}{h}$$
$$= 1$$

وقابلية الاشتقاق على اليسار القيمة $x_0 = 0$ لأنها معرفة على مجموعة الاعداد الحقيقية.

$$\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{|h|}{h}$$
$$= \lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{-h}{h}$$
$$= -1$$

1.7.الخلاصة :

الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين و على يسار القيمة $x_0 = 0$ و $\lim_{h \xrightarrow{<} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

إذن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند القيمة $x_0 = 0$.

1.8.الاستمرارية و قابلية الاشتقاق:

مبرهنة:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق من أجل x_0، تكون هذه الدّالة f مستمرة عند x_0.

ملاحظة:

عكس المبرهنة غير صحيح.

مثال :

لدالة $f: x \mapsto |x-1|$ مستمرة عند القيمة $x_0 = 1$ لكنها غير قابلة للإشتقاق عند نفس القيمة .

1.9.التفسير الهندسي للعدد المشتق :

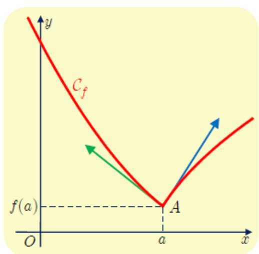
لتكن f دالة و C_f تمثيلها البياني في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

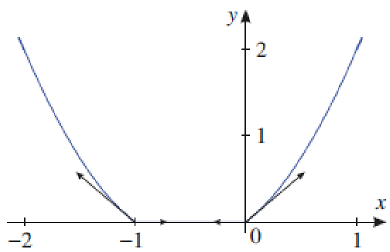
- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين القيمة x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ من اليمين.
- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار القيمة x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ من اليسار.
- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق على يمين و على يسار القيمة x_0 و كان

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند القيمة x_0

والمنحنى C_f يقبل النقطة $A(x_0, f(x_0))$ كنقطة زاوية.





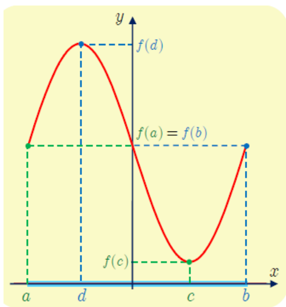
.1.10 القيم الحدية لدالة :

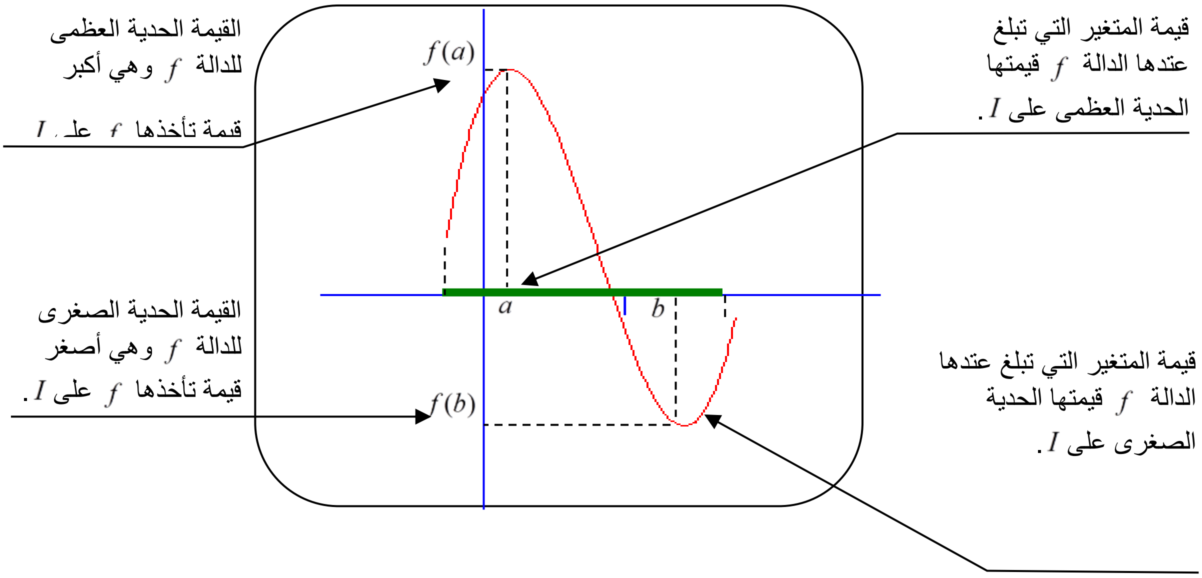
✓ لتكن f دالة معرفة على مجال I و لتكن c قيمة من I، نقول أن $M=f(c)$ هي قيمة محليا كبرى للدالة f و التي تبلغها عند c إذا وجد مجال مفتوح J يشمل القيمة c و يحقق $\forall x \in I \cap J, f(x) \leq f(c)$.

✓ لتكن f دالة معرفة على مجال I و لتكن d قيمة من I، نقول أن $m=f(d)$ هي قيمة محليا صغرى للدالة f و التي تبلغها عند d إذا وجد مجال مفتوح J يشمل القيمة d و يحقق $\forall x \in I \cap J, f(x) \geq f(d)$.

ملاحظة :

نقول أن $f(a)$ قيمة حدية محليا للدالة f إذا كانت قيمة محليا صغرى أو قيمة محليا كبرى .





ملاحظة :

يمكن أن تبلغ دالة قيمتها الحدية ألعظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر واحد من المجال.

والقيمة الحدية تكون دائما عددا حقيقيا (بمعنى إنّ $+\infty$ أو $-\infty$ لا يمكن أن يكونا قيمة حدّية).

1.11. المشتقات المتتابعة:

f دالة قابلة للاشتقاق على المجال I وَ f' دالتها المشتقة.

إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تدعى الدالة المشتقة الثانية للدالة f

و يرمز إليها بالرمز f'' حيث $f''=(f')'$. تقول أن f قابلة للاشتقاق مرتين على I.

- ✓ إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تدعى الدالة المشتقة الثالثة للدالة f و يرمز إليها بالرمز $f^{(3)}$ و $f^{(3)}=(f'')'$. تقول أن f قابلة للاشتقاق مرتين على I.
- ✓ و هكذا يمكن تعريف الدوال المشتقة التي رتبتها $4,5,6,...,n$ ، تدعى الدوال المشتقة $f',f'',f^{(3)},f^{(4)},...,f^{(n)}$ الدوال المشقة المتتابعة للدالة f و نكتب : $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$.

مثال :

نعتبر الدالة f ذات المتغير x المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=x^4-4x^3+12x+6$$

- عين كل من $f',f'',f^{(3)},f^{(4)},f^{(5)}$ ، ثم استنتج عبارة الدالة $f^{(n)}$ حيث n عدد طبيعي.

الحل :

الدالة f هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية حيث :

$$f'(x)=4x^3-12x^2+12$$

الدالة f' هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية حيث :

$$f''(x)=12x^2-24x$$

الدالة f'' هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية حيث :

$$f^{(3)}(x)=24x-24$$

الدالة $f^{(3)}$ هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية حيث :

$$f^{(4)}(x)=24$$

الدالة $f^{(4)}$ هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ حيث :

$$f^{(5)}(x)=0$$

و هكذا الدالة $f^{(n-1)}$ هي دالة كثيرة حدود فهي تقبل الاشتقاق على مجموعة الاعداد الحقيقية حيث :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 5,\ f^{(n)}(x)=0$$

1.12. المشتقات و العمليات: $n\in\mathbb{N}$

$f(x)=$	$f'(x)=$	قابلية الاشتقاق على كل مجال من	$f(x)=$	$f'(x)=$	قابلية الاشتقاق على كل مجال من
a	**0**	$\mathbb{R}$	$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-an}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
ax	a	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
ax^n	$a.n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

1.13. العمليات على المشتقات:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق على المجال I و λ عدد حقيقي (الدالة g لا تنعدم على I)

- ✓ $(f+g)'=f'+g'$.
- ✓ $(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$.
- ✓ $(\lambda f)'=\lambda f'$.
- ✓ $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{g\times f'-f\times g'}{g^2}$.
- ✓ $\left(\frac{1}{g}\right)'=\frac{-g'}{g^2}$.

1.14. مشتقة الدالة : $f : x \to u(ax+b)$

مبرهنة:

a وَ b عددان حقيقيان مع $a \neq 0$ ، u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b \in I$. الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على I و $f'(x) = au'(ax+b)$.

أمثلة:

قابلية الاشتقاق على كل مجال من	$f'(x) =$	$f(x) =$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$
$\mathbb{R}$	$a.\cos(ax+b)$	$\sin(ax+b)$

1.15. مشتقة الدالة المركبة :

مبرهنة:

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على I و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال J (J محتوى في $f(I)$) فإن الدالة $g o f$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$(g o f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

1.16. تطبيقات حول مشتقة الدالة المركبة:

مشتقة الدالة: $x \to \sqrt{u(x)}$

مبرهنة:

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على المجال I ، فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

البرهان:

نضع: $v(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=v\circ u(x)=\sqrt{u(x)}$.

الدالة v تقبل الاشتقاق على $]0,+\infty[$ و $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

و بالتالي الدالة f تقبل الاشتقاق على I

و $f'(x)=(v\circ u)'(x)=u'(x)v'[u(x)]=u'(x)\times\frac{1}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

مشتقة الدالة: $x\to[u(x)]^n$

مبرهنة:

n عدد طبيعي أكبر تماما من 1.

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على I فإن الدالة $u(x)$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I:

$$(u^n)'(x)=nu^{n-1}(x)u'(x) .$$

البرهان:

نضع: $v(x)=x^n$ و $f(x)=v\circ u(x)=[u(x)]^n$

الدالة v تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $v'(x)=n.x^{n-1}$ و بالتالي الدالة f تقبل الاشتقاق على I

و $f'(x)=(v\circ u)'(x)=u'(x)v'[u(x)]=u'(x)\times\left[nu^{n-1}(x)\right]=nu^{n-1}(x)u'(x)$.

مشتقة الدالة: $x \to \frac{1}{[u(x)]^n}$

مبرهنة:

nعدد طبيعي غير معدوم.

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على I و لا تنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I: $\left(\frac{1}{u^n}\right)'(x) = -\frac{n u'(x)}{u^{n+1}(x)}$.

البرهان:

نضع: $v(x) = \frac{1}{x^n}$ و $f(x) = (v \circ u)(x) = \frac{1}{u^n(x)}$

الدالة v تقبل الاشتقاق على كل مجال I من $\mathbb{R}^*$ و $v'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ و بالتالي الدالة f تقبل الاشتقاق على I و $f'(x) = (v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)] = u'(x) \times \frac{-n}{u^{n+1}(x)} = -\frac{n u'(x)}{u^{n+1}(x)}$

1.17. اتجاه تغير دالة:

f دالة معرفة على D_f و قابلة للاشتقاق على المجال I من D_f .

مبرهنة:

- إذا كان من أجل كل x من المجال I، $f'(x) > 0$ (أو $f'(x) < 0$) ماعدا عدد منته من القيم التي تنعدم f' من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماماً (أو متناقصة تماما) على I.
- إذا كان من أجل كل x من المجال I، $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

ملاحظة:

لدراسة تغيرات f، يكفي دراسة إشارة $f'(x)$.

1.18. قيمة حدية محلية:

f دالة معرفة على D_f و قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من D_f و x_0عنصر من I .

مبرهنة:

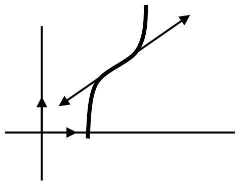
إذا انعدمت الدالة f' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

1.19. نقطة الانعطاف:

f دالة معرفة على D_f و I مجال من D_f و x_0 عنصر من I و C_f تمثيلها البياني في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

تعريف :

نسمي نقطة انعطاف للمنحنى C_f النقطة التي يخترق عندها المماس المنحنى C_f .



مبرهنة:

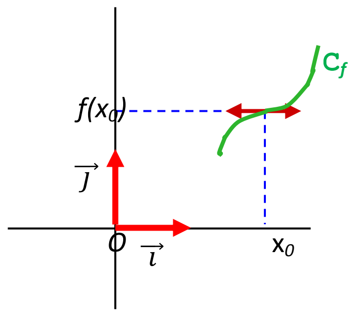
f تقبل الاشتقاق مرتين على I إذا انعدمت الدالة f'' عند x_0 مغيرة إشارتها فإن $M\left(x_0,f(x)\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f .

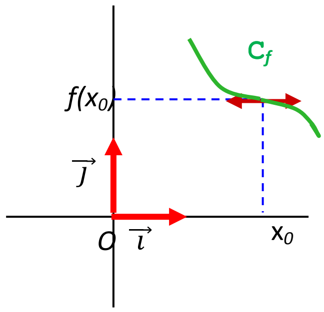
ملاحظة :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح يشمل x_0 و انعدمت دالتها المشتقة f' من أجل x_0 ولم تغير من إشارتها فإن النقطة $M_0\left(x_0,f(x)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني الممثل للدالة f.

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

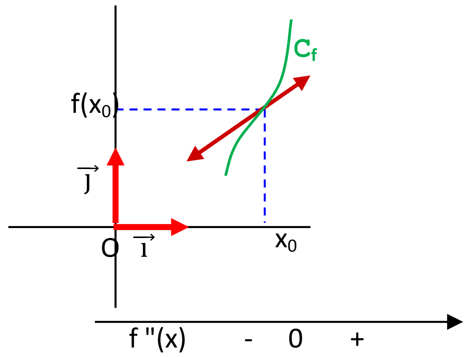
x		x_0	
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

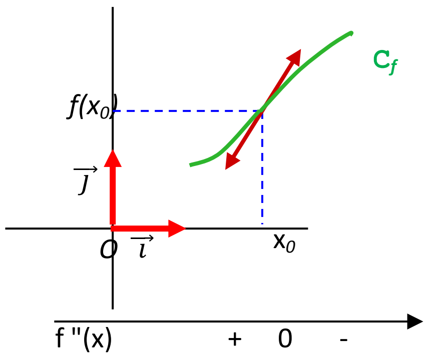




ملاحظة :

إشارة $f''(x_0)$ تعطينا وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمماس عند $M(x_0,f(x))$.





مثال:

أنشئ التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=2x$.

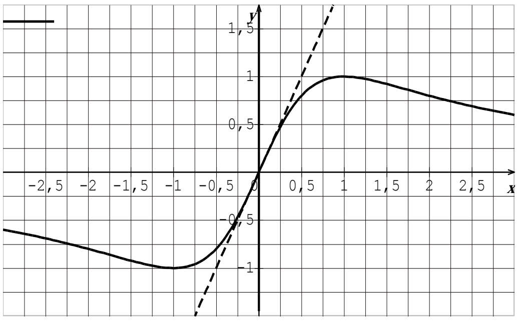
- ✓ ادرس قابلية الاشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=0$. ماذا تستنتج ؟
- ✓ ناقش بيانيا وضعية التمثيل البياني للدالة f بالنسبة للمستقيم (Δ). تأكد من صحة النتائج حسابيا
  - ▪ ماذا تستنتج ؟

الحل :

- التمثيل البياني للدالة f

دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند العدد $x_0=0$:

لدينا : $D_f=\mathbb{R}$ حيث $f(0)=0$.



$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2h}{h^2+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h^2+1}\times\frac{1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{h^2+1}$$

$$=2$$

وعليه الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة $x_0=0$ و عددها المشتق هو $f'(0)=2$.

- الاستنتاج :

المستقيم (Δ) يشمل المبدأ O و معامل توجيهه $f'(0)=2$ و عليه (Δ) هو المماس للمنحني (C_f) في المبدأ O.

- وضعية التمثيل البياني (C_f) و المستقيم (Δ) بيانيا .

في المجال $]-\infty,0[$ التمثيل البياني (C_f) يقع فوق (Δ) ,

في المجال $]0,+\infty[$ التمثيل البياني (C_f) يقع تحت (Δ).

في النقطة O التمثيل البياني (C_f) و (Δ) يتقاطعان.

- دراسة الوضعية حسابيا :

$$f(x)-y=\frac{2x}{x^2+1}-2x$$

$$=\frac{2x-2x^3-2x}{x^2+1}$$

$$=\frac{-2x^3}{x^2+1}$$

جدول الإشارة : $f(x)-2x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x^3$	$+$		$-$
x^2+1	$+$		$+$
$f(x)-2x$	$+$		$-$

في المجال $]-\infty,0[$ التمثيل البياني (C_f) يقع فوق (Δ) ,

في المجال $]0,+\infty[$ التمثيل البياني (C_f)يقع تحت (Δ).

لما $x=0$ التمثيل البياني (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0 وهي المبدأ O.

الاستنتاج :

المماس (Δ) يخترق التمثيل البياني (C_f) في نقطة التماس O و تدعى النقطة O نقطة انعطاف.

1.20. مبرهنة رول :

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث

- f مستمرة على $[a,b]$.
- f قابلة للاشتقاق على $[a,b]$.
- $f(a)=f(b)$.

عندئذ يوجد $c\in[a,b]$ بحيث $f'(x)=0$.

البرهان:

بمأن الدالة f مستمرة على المجال $[a,b]$ ، فهي تقبل قيمة عظمى M و قيمة صغرى m على المجال $[a,b]$.

لدينا حالتان:

1. $M=m$ في هذه الحالة الدالة f ثابتة و لدينا $f'(x)=0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]a,b[$.

2. $M > m$ في هذه الحالة يوجد عدد حقيقي x ينتمي إلى المجال $]a,b[$ بحيث $f(x) = M$ أو $f(x) = m$.

نفرض انه مهما تكن M : توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $f(c) = M$ بحيث M هي قيمة حدية إذن $f'(c) = 0$.

ملاحظات :

- شروط نظرية رول كافية و غير لازمة .

مثال1:

لتكن الدالة $f : x \mapsto x^3$ المعرفة على المجال $[-1,1]$ حيث $f(-1) \neq f(1)$ و رغم ذلك $f(0) = 0$.

- العدد في نظرية رول ليس وحيدا .

مثال2:

لتكن الدالة $f : x \mapsto \sin(x)$ المعرفة على المجال $]0,3\pi[$ هناك ثلاث نقاط ينعدم فيها المشتق.

مثال3 : (عدم تحقيق شروط مبرهنة رول)

لتكن الدوال المعرفة كما يلي:

1. $f(x) = x$ في المجال $[0,1]$.
2. $f(x) = |x|$ في المجال $[-1,1]$.
3. $f(x) = \begin{cases} 1-x & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ في المجال $[0,1]$.

يمكن أن تلاحظ أن هذه الدوال لا تحقق شروط مبرهنة رول في المجالات المشار إليها ذلك لأن:

- الدالة الأولى لا تحقق الشرط $f(0) = f(1)$.
- الدالة الثانية لا تحقق شرط الاشتقاق إذ أن الدالة لا تقبل الاشتقاق عند 0.
- الدالة الثالثة لا تحقق شرط الاستمرار على المجال $[0,1]$ إذ أنها غير مستمرة عند 0

و رغم ذلك فمبرهنة رول توفّر شروطا كافية و ليست لازمة لكي توجد نقطة c من $]a,b[$ ينعدم عندها المشتق، أي: $f'(c)=0$.

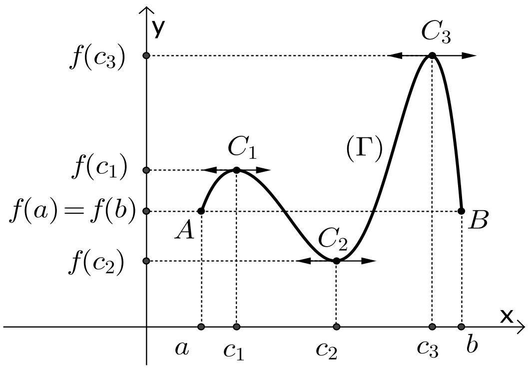
المثال التالي يبين أن شروط مبرهنة رول ليست لازمة :

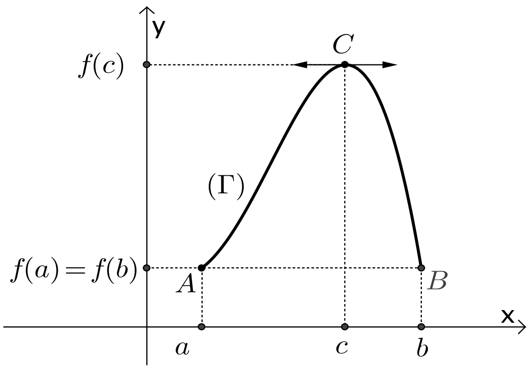
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : x\in]-1,1[\\ 0 & : x=\pm 1 \end{cases}$$

فهذه الدالة ليست مستمرة عند طرفي المجال $[-1,1]$ ، ورغم ذلك لدينا $f'(0)=0$

1.21. التفسير الهندسي :

يوجد على الأقل نقطة من منحنى الدالة f يكون فيها المماس موازي لمحور الفواصل .





1.22. مبرهنة التزايدات المنتهية : (مبرهنة المتوسط)

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث

- f مستمرة على $[a,b]$.
- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

عندئذ يوجد على الأقل $c\in]a,b[$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

البرهان:

سوف نستخدم مبرهنة رول.

نفرض وجود دالة مساعدة بحيث : $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

مشتقة هذه الدالة هي : $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

الدالة تحقق شروط الثلاثة لمبرهنة رول، إذن توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $F'(x)=0$

و بالتالي : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1.23. مبرهنة التزايدات المنتهية معممة: (مبرهنة كوشي).

لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ بحيث

- f مستمرة على $[a,b]$.
- f قابلة للاشتقاق على $]a,b[$.

نفرض أن $g(a)\neq g(b)$ و الدالة g لا تنعدم في المجال $]a,b[$.

إذن توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

البرهان:

نفرض وجود دالة مساعدة بحيث: $F(x)=[g(b)-g(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]g(x)$.

مشتقة هذه الدالة هي: $F'(x)=[g(b)-g(a)]f'(x)-[f(b)-f(a)]g'(x)$.

الدالة F تحقق شروط الثلاثة لمبرهنة رول، إذن توجد قيمة c من المجال $]a,b[$ بحيث $F'(x)=0$

و بالتالي: $[g(b)-g(a)]f'(x)=[f(b)-f(a)]g'(x)$ ، و هذا يعني $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

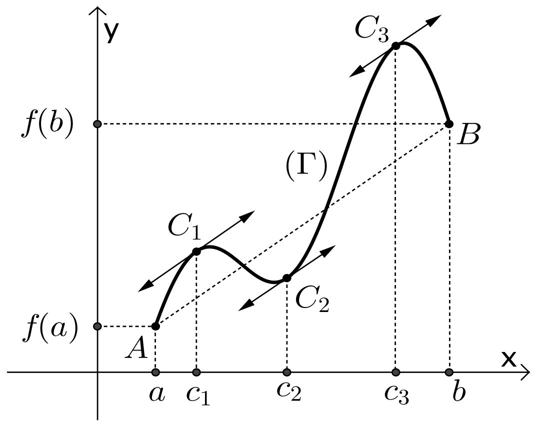
1.24. التفسير الهندسي :

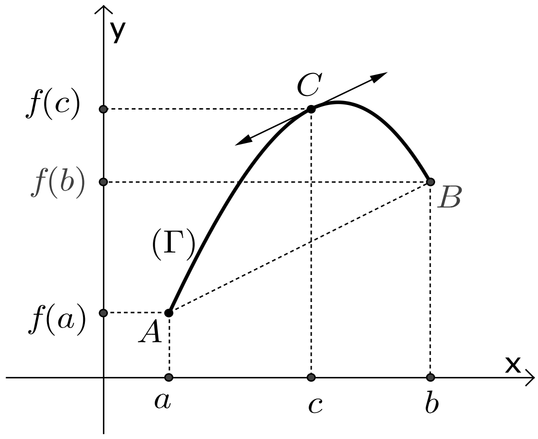
يوجد على الأقل نقطة من منحنى الدالة f يكون فيها المماس موازي للمستقيم (AB) حيث

$A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$.

ملاحظات :

نلاحظ أن النقطة c ليست عموما وحيدة لأنه بالإمكان أن يقبل بيان الدالة المعتبرة عدة مماسات توازي المستقيم (AB).





مثال:

يمكن أن نثبت بسهولة من خلال مبرهنة التزايدات المنتهية أن:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x \le \sin(x) \le x$$

يكفي أن نعتبر عنصرا كيفيا $x \in \mathbb{R}$ و نطبق المبرهنة على الدالة $x \mapsto \sin(x)$ في المجال $[0,1]$:

يوجد ينتمي إلى هذا المجال بحيث:

$$\sin(x) - \sin(0) = (x-0)\cos(x)$$

و منه

$$|\sin(x) - \sin(0)| = |(x-0)\cos(x)|$$

و منه ينتج (باعتبار أن $\sin(0)=0$ و $|\cos(x)| \le 1$)

$$\begin{aligned} |\sin(x)| &= |\sin(x) - \sin(0)| \\ &= |(x-0)\cos(x)| \\ &= |(x-0)|\,|\cos(x)| \\ &\le |x| \end{aligned}$$

و هو المطلوب.

.1.25 مبرهنة : (قاعدة لوبيتال L'Hôpital)

لتكن f و g دالتان بحيث :

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.
2. يوجد جوار V للقيمة a بحيث الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $V \setminus \{a\}$.
3. الدالة g' لا تنعدم في $V \setminus \{a\}$.
4. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة.

إذن :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

البرهان:

نختار $x \neq a$ من V. نطبق مبرهنة كوشي .

لدينا : $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ حيث ξ عدد جقيقي محصور بين x و a.

لكن من الشرط 1 نعلم أن $f(a) = g(a) = 0$ و بالمقابل $\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

إذا كانت $x \to a$ إذن $\xi \to a$ لان ξ عدد جقيقي محصور بين x و a.

و من جهة أخرى إذا كانت $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ فإن $\lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ موجودة و تساوي A.

و بالمقابل $A = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

و بالتالي : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ملاحظة:

- ✓ قاعدة لوبيتال صحيحة من أجل $a = \pm\infty$ أو $f = \pm\infty$ و $g = \pm\infty$.

قاعدة لوبيتال تسمح لنا باستبدال نهاية بأخرى بحيث تكون أسهل في الحساب. هذه القاعدة تستخدم في ثلاث مراحل:

1. نتحقق أن $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ هي حالة عدم التعيين من الشكل ($\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\times\infty$) ، و إذا لم يتحقق الشرط فإنه لا يمكن استخدام قاعة لوبيتال.
2. نشتق كل من $f(x)$ و $g(x)$ على حدى.
3. حساب $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

مثال 1:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}$.

نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to 0}\sin(2x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}x=0$.

و بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\cos(2x)}{1}=2$$

مثال 2:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}$.

نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to +\infty}e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$.

و بتطبيق قاعدة لوبيتال نجد أن :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty.$$

مثال 3:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x^4}$.

نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}x^4=0^+$.

و بالتالي لا يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال ، لكن : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{x^4}=+\infty$.

الفهرس