وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة ابن خلدون – تيارت –
كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية و علوم التسيير
قسم العلوم المالية والمحاسبة

محاضرات في مقياس أساسيات بحوث العمليات

مطبوعة موجهة إلى طلبة السنة الثانية ليسانس
تخصص علوم مالية ومحاسبة

إعداد :أ.د.عابد علي

السنة الجامعية: 2024/2023

قائمة المحتويات:

مقدمة:

تعد بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرزت نجاحا واسعا في مختلف مجالات الحياة، ويتركز جوهر نشاط بحوث العمليات حول إنشاء النماذج وإستخدامها في حل المشكلات قيد الدراسة،كما انها تساعد في إتخاذ القرارات .

ولقد أصبحت الأنشطة الإدارية أكثر تعقيدا وتحتاج إلى القرارات الصحيحة وذلك لتجنب الخسائر الفادحة، ومع سيطرة ظروف عدم التأكد والتغير السريع على المستقبل أصبح الإعتماد على أسلوب التجربة والخطأ او إستخدام القواعد المنطقية عند إتخاذ القرار أمر غير معقول، وفي هذه الحالة لابد من إستخدام الطرق العلمية وذلك لزيادة إحتمالية الوصول إلى القرار المناسب، ويساعد أسلوب بحوث العمليات القائمين على المؤسسات الإدارية والصناعية من تحديد اهدافهم بشكل أكثر وضوحا مع توفير جميع المعلومات للوصول إلى الحل الأمثل.

وهذه المطبوعة موجهة إلى طلبة السنة الثانية ليسانس جميع التخصصات وهي تضم المحاور التالية:

المحور الأول: نشأة وتطور بحوث العمليات

المحور الثاني:البرمجة الخطية**(Linear Programming)**

المحور الثالث:الطريقة البيانية **(Graphical Méthod)**

المحور الرابع:البرمجة الخطية طريقة السمبلكس **(The Simplex Méthod)**

المحور الخامس:البرمجة الخطية الثنائية أوالإزدواجية **(Duality in linear programming)**

المحور السادس:البرمجة الخطية بأعداد صحيحة(البرمجة العددية)**(Integer Linear Programming)**

المحور السابع: برمجة الأعداد الصحيحة مشاكل النقل**(Transportation Problem)**

المحور الأول:نشأة وتطور بحوث العمليات

المحور الأول:نشأة وتطور بحوث العمليات

01-نشأة وتطور بحوث العمليات: يمكن تقسيم مراحل تطور بحوث العمليات إلى ثلاث مراحل وهي

المرحلة الأولى (مرحلة ما قبل الحرب العالمية الثانية): تعود جذور بحوث العمليات إلى عام 1885م،حيث ركز **فريدريك تايلور**(**F.Taylor**) على تطبيق التحليل العلمي على الأنشطة الإنتاجية، من خلال قيامه بتجارب عديدة للتوصل إلى الحمولة الملائمة من مادة معينة ليتمكن العامل من جرف أكبر كمية ممكنة منها باستخدام الجرافة وبأقل ما يمكن من الجهد، وبعد قيامه بسلسلة من التجارب استطاع تايلور التوصل إلى مبتغاة.

ساهم العالم **هنري جانت** (**Henry.L.Gantt**) أيضا في وضع اللبنات الأولى لهذا العلم، إذ توصل إلى أسلوب علمي لجدولة العمل، من خلال خارطة عرفت باسمه وهي خارطة جانت لتخطيط أساليب تحميل المكائن من اجل تقليل أية تأخيرات يمكن أن تحدث في العملية الإنتاجية، وعلى إثره يتم تحديد وقت تسليم المنتج بشكل دقيق.

وفي عام 1915م وضع **هاريس** (**F.W.Harris**) نموذجا يمثل حجم الكمية الاقتصادية المعروفة في مجال السيطرة على المخزون.

في حين نشر عالم الرياضيات الدانمركي ارلينج (A.K.Erlang) في عام 1917م مؤلفه حول المشاكل المتعلقة بكثرة المكالمات الهاتفية، ذ لم تستطع العاملات في البدالات من استلام كل المكالمات فور طلب الخدمة في فترات الذروة، مما أدى إلى حدوث تأخيرات في تلبيتها، وفي هذا الصدد، يمكن القول بأنه قد تم الاعتماد على مؤلف ايرلينج بعد عدة سنوات من قبل مكاتب البريد البريطانية من خلال الاستفادة من ملاحظاته لتقديم أفضل الخدمات البريدية إلى الزبائن.

وفي الثلاثينات من القرن المنصرم، تم تطبيق التحليل السلعي من قبل العالم الفلكي **ليفنسن** (**H.C.Levinson**)،إذ ركز جهوده على دراسة علمية للعادات الشرائية وسلوك المستهلكين ومدى استجابتهم لأساليب الترويج المختلفة مثل الإعلان.

وقد أثرت الثورة الصناعية بشكل كبير على تطور بحوث العمليات،إذ اتسمت الفترة السابقة لتلك الثورة بصغر حجم المنظمات،كما و أن أداء الأعمال اتسم بكونه يدويا، وطور العمل بعد ذلك من خلال إحلال المكائن محل العمل اليدوي، فضلا عن التطورات في مجالات النقل والمواصلات، مما أدى إلى صعوبة قيام المدير بمختلف الوظائف الإدارية بمفرده من التخطيط للإنتاج، المبيعات والشراء...الخ، وعليه كان لا بد من إيجاد تقسيم للوظائف الإدارية متمثلا بوظائف الإنتاج، التسويق، المالية، الأفراد والبحث والتطوير ....الخ، ومع التطور الصناعي دعت الحاجة إلى تجزئة الوظائف الرئيسية المشار إليها إلى فروع أخرى، فمثلا تم تقسيم قسم الإنتاج إلى فروع أمثال الصيانة، السيطرة على الجودة، تخطيط الإنتاج....الخ.

المرحلة الثانية خلال الحرب العالمية الثانية: تواصل تطور علم بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية من خلال استدعاء الإدارة العسكرية في بريطانيا لفريق عمل من العلماء،من اجل دراسة المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية للدفاع الجوي، تحت إشراف البروفيسور باتريك بلاكت (Patrick Blackett)، من جامعة مانشستر

تكون فريق العمل من 11 عضوا، ثلاثة علماء منهم متخصصون في علم وظائف الأعضاء، واثنان في علم الرياضيات الفيزيائية، وعالم واحد في مجال الفيزياء العامة واثنان في مجال الرياضيات البحتة.

هدف الفريق إلى إيجاد أفضل توزيع للموارد العسكرية المحدودة على مختلف العمليات العسكرية، ومن ثم تطبيق بحوث العمليات للاستخدام الفاعل للرادارات وتوزيع القوة الجوية، وكان هذا الفريق هو الأول في مجال بحوث العمليات.

لقد جاءت تسمية بحوث العمليات، استنادا إلى مهمة الفريق القائمة على البحث في العمليات والمجالات العسكرية.

توصل الفريق إلى نتائج مشجعة، مما أدى إلى تشكيل فرق أخرى في كل من بريطانيا، الولايات المتحدة الأمريكية،كندا وفرنسا.

المرحلة الثالثة ما بعد الحرب العالمية الثانية: لقد أدت النتائج التي توصل إليها أثناء الحرب العالمية الثانية إلى تشجيع المدراء الصناعيين الباحثين عن الحلول للمشاكل التي كانت تواجههم للاهتمام بهذا العلم، ففي بريطانيا وبعد انتهاء الحرب العالمية الثانية انتقل استخدام بحوث العمليات من المجال العسكري إلى مجالات أخرى كالصناعة، الاجتماع، والاقتصاد إذ كان الاقتصاد البريطاني يواجه حالة ركود اقتصادي حاد، مما تطلب البحث عن أساليب جديدة لزيادة فاعلية الإنتاج وإيجاد أسواق جديدة.

بينما كان الوضع مختلفا في الولايات المتحدة الأمريكية،إذ تم التركيز على بحوث العمليات الدفاعية، ولم يؤشر له دور كبير في المجال الصناعي، ولكن تزايد الاهتمام بعلم بحوث العمليات خلال الثورة الصناعية الثانية، على اثر اتمتة العمليات الإنتاجية واستبدال العامل بالماكنة، وفي الخمسينات من القرن الماضي وجه الاهتمام لعلم بحوث العمليات في الجامعات الأمريكية إذ شكلت جمعية متخصصة في مجال بحوث العمليات عام 1950م وهكذا استمر تطور هذا العلم تدريجيا، من خلال الاستفادة من علم الحاسوب في حل المشكلات المتعددة التي تواجه المنظمات والمتعلقة بموضوعات خاصة ببحوث العمليات مثل البرمجة الخطية،نظرية القرارات، شجرة القرارات، التنبؤ،نماذج النقل،مشاكل التخصيص، التحليل الشبكي،نماذج المخزون، تحليل ماركوف، صفوف الانتظار، نظرية المباريات، والمحاكاة.... وغيرها للتوصل إلى القرار الأمثل.

02-مفهوم بحوث العمليات: اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات، فقد عرف دانتزيغ بحوث العمليات "بأنها علم الإدارة أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقها"، ويعد هذا التعريف تعريفا شاملا ولا يقدم مفهوما واضحا لبحوث العمليات يميزها من غيرها من المصطلحات، فبحوث العمليات ليست علم اتخاذ القرارات وتطبيقها وإنما هي أدوات تستعمل مع غيرها من الأدوات الأخرى للمساعدة في اتخاذ القرارات.

وقد عرف واجنر Wagner بحوث العمليات "بأنها مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمشروعات"، وهذا التعريف يحدد نطاق بحوث العمليات بالإدارة العليا للمشروعات في الوقت الذي يتسع فيه نطاقها سواء أكان على نطاق الإدارة التنفيذية أم الإدارة العليا للمشروع، أما مورس وكمبال Morse and Kimball فقد عرفا بحوث العمليات "بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات" ومن هذا التعريف يمكن تحديد العناصر الرئيسية لبحوث العمليات على النحو التالي:

-استعمال الطريقة العلمية.

-الاعتماد على الأساس الكمي، مثل استعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها.

- يمكن للإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وعلى هذا الأساس يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات على أنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي وباستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها كالبرمجة الخطية والبرمجة العددية، والبرمجة غير الخطية، والتحليل الشبكي...الخ، وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

-أما الجمعية الأمريكية لبحوث العمليات فقد عرفتها بأنه علم تطبيقي تم تطويره لملاحظة فهم والتنبؤ بسلوك أنظمة (الرجل-الماكنة) وحل المشاكل العملية من خلاله في مختلف المجالات مثل الأعمال الحكومة والمجتمع.

وعرف أيضا على انه تطبيق الأساليب العلمية، الأدوات و التقنيات لحل مشاكل النظام لتوفير السيطرة على العمليات والتوصل إلى حلول مثالية.

-أما جمعية بحوث العمليات الإنجليزية فقد عرفت بحوث العمليات ،بأنه تطبيق طرق العلم في المشكلات المركبة التي تنشأ عند توجيه وإدارة النظم الكبيرة، من القوى البشرية والآلية والمواد والأموال في الصناعة ومنشآت الأعمال، والمنظمات الحكومية ومنشآت الدفاع وذلك بحيث يتمثل المبدأ في إيجاد نموذج علمي للنظام،وذلك بهدف مساعدة الإدارة في تحديد سياستها وقراراتها بطريقة علمية.

وعرفه آخرون على انه مساعدة للإدارة لاتخاذ القرارات من خلال توفير المعلومات الكمية المطلوبة والمبنية على الأساليب العلمية.

03-خصائص بحوث العمليات: يمكن استنباط أهم خصائص بحوث العمليات من خلال التركيز على مفهومه، وأهم تلك الخصائص:

-اهتمام بحوث العمليات بالمشاكل أو بالنظام ككل، إذ أن النشاط في أي جزء من أجزاء المنظمة له تأثير على أنشطة بقية الأجزاء الأخرى فيها، إذ أن اتخاذ أي قرار في جزء ما لابد من تحديد كل التفاعلات المحتملة الخاصة بذلك الجزء وتحديد تأثيراتها على المنظمة ككل.

-اعتماد بحوث العمليات على فريق عمل من العلماء المتخصصين بعلم الرياضيات، الإحصاء،الفيزياء، والاقتصاد، مما يعزز التوصل إلى حلول اقرب ما تكون إلى الحلول المثلى.

-تطبيق الأساليب العلمية في حل المشاكل التي لازالت قيد الدراسة.

-استخدام الحاسوب في حل النماذج الرياضية المعقدة، لاحتياجها إلى حسابات متعددة، معقدة وطويلة.

-توفير معلومات كمية للإدارة للاستفادة منها والاستعانة بها في اتخاذ القرار المناسب.

-الأخذ بنظر الاهتمام العوامل الإنسانية من جهد ووقت وظروف العمل وغيرها.

04-مجالات تطبيق بحوث العمليات:نظرا لتعدد تطبيقات بحوث العمليات يصعب حصرها إلا أنه يمكن ذكر التطبيقات التالية على سبيل المثال لا الحصر:

-مشكلة نقل المواد.

-مشكلة التعيين والتخصيص.

-تخطيط الإنتاج.

-تخطيط المالية.

-اختيار الميزانية العامة.

-تخطيط أنماط استهلاك الطاقة.

-تحديد المواقع الخدمية والإنتاجية.

-تخطيط رحلات الطيران والسكك الحديدية.

-التخطيط والتحكم في المخزون.

-تصميم الشبكات الكهربائية.

-تخطيط الإشارات الضوئية في الطرق.

-تخطيط شبكات الري والصرف.

-نظام صفوف الانتظار.

نظام المحاكاة.

تخطيط المشروعات.

-الصيانة والسيطرة على التكاليف.

-التنبؤ.

-السيطرة النوعية.

-تقييم المشروعات.

-ظروف المخاطرة وعدم التأكد.

05-مساهمة بحوث العمليات مدخلا كميا في حل مشاكل الإدارة: يعد الإستخدام المباشر للأرقام الرياضية والأساليب والأدوات الكمية حلقة الوصل في هذا المدخل التي تأتي ضمن ما يسمى ببحوث العمليات وذلك لتفسير كثير من مشكلات إدارة الأعمال، يعتمد المدخل الكمي الأرقام والعلاقات الرياضية (المعادلات والمتباينات) والنماذج الرياضية أساسا لتوضيح المشكلة، في حين تعتمد المداخل الأخرى لدراسة دارة الأعمال على المقارنة والوصف والتحليل استنادا إلى أساليب البحث والاستبيان، وهذه نقطة الاختلاف الجوهرية التي تعطي المدخل الكمي سمات خاصة، إذ يعتمد هذا الأخير على عدد من الأساليب والأدوات التي تقع ضمن ما يسمى ببحوث العمليات وذلك لتحديد ما هو مطلوب انجازه في الواقع العملي للمشكلة، فعلى سبيل المثال في مجال إدارة الإنتاج يتم تحديد المستلزمات من المواد الأولية والأيدي العاملة وأية مدخلات أخرى للعملية الإنتاجية،مع بيان ماهية المخرجات وذلك من خلال احد أساليب بحوث العمليات المحددة لهذا الغرض.

ويفسر بحوث العمليات بوصفها مدخلا كميا لدراسة المشاكل الإدارية كافة من خلال النظر للمشكلة من زاوية كمية وبعبارة أخرى تؤطر المشكلة لتكون نموذجا، وتتضح أهمية بحوث العمليات مدخلا كميا أيضا لدراسة المشاكل الإدارية في الواقع العملي لمنظمة الأعمال من خلال الأمور الآتية:

05-01 تسهم بحوث العمليات في تقريب المشكلة الإدارية في الواقع بموجب صيغ عملية مبسطة ونماذج رياضية معينة تظهر مكونات المشكلة ضمن أطر من التفكير العلمي المنظم والعقلاني.

05-02 عرض النماذج في مجموعة من العلاقات الرياضية بالشكل الذي يوضح الفرص المختلفة (البدائل) لعملية اتخاذ القرارات وبما يسهم في تفسير عناصر المشكلة والعوامل المؤثرة فيها.

05-03 تعميم المعايير القياسية والمثالية لإتخاذ القرارات، ذلك بأن الإدارة التي تتمكن من وضع نموذج رياضي معين لمشكلة ما، تستطيع أن تطبق هذا النموذج في المستقبل عندما تواجهها مشكلة متماثلة وهكذا تدار الأعمال المختلفة في الوظائف كافة لمعالجة المشاكل في الواقع العملي.

إن التعامل مع أساليب بحوث العمليات كافة في مختلف المشاكل الإدارية في منظمة الأعمال من شانه أن يرسخ العلاقة بين هذه الأساليب وهذه المشاكل، ويمكن أن يحدث التوافق التام بين هذه الأساليب والمشاكل الإدارية عامة عند استعمال نماذج معينة تحمل مسميات متطابقة مع تلك الوظائف، كما هي الحال في استعمال نماذج النقل في دارة النقل والتسويق ونماذج الخزين في دارة المخازن...وهكذا.

06-شروط تطبيق بحوث العمليات:أن أساليب بحوث العمليات كافة يمكن أن تطبق في مختلف منظمات الأعمال الإنتاجية منها والخدمية، بشرط توفر على النحو التالي:

06-01 محدودية الموارد: وتعني أن الموارد التي تستعملها منظمة الأعمال سواء كانت ذلك في العملية الإنتاجية أم التجارية وما شابه ذلك تتصف بكونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها، بمعنى آخر إن الموارد المتوافرة تحت تصرف منظمة الأعمال لا يوجد منها كميات كبيرة إلى درجة بحث يمكن الحصول عليها في أية لحظة ومن دون عناء وكلفة، وينطبق هذا الشرط على ما يأتي:

- الموارد المالية على نحو عام.
- الموارد البشرية ذات الكفاءة المالية والمتخصصة.
- الموارد الأولية التي يتم الحصول عليها مقابل ثمن وتؤلف نسبة مهمة من عنصر الكلفة للوحدة الواحدة من المنتج.
- مساحات الأراضي ذات المواصفات النادرة، كما هي الحال مع مساحات الأراضي التي يتواجد فيها النفط أو مناجم الفحم والذهب وما شابه ذلك في حين قد لا تعد الصحراء الجرداء أو الأراضي غير الصالحة للزراعة من الموارد المحدودة، وبخاصة البلدان التي لديها مساحات جغرافية شاسعة.

06-02 تعدد البدائل: يقصد بهذا الشرط أن هناك أكثر من بديل أو طريقة يتم بموجبها استلال الموارد المتوفرة، فعند الحديث عن المستلزمات الأساسية لعملية الإنتاج وبالتحديد عن الموارد الأولية الداخلة في صنع المنتج، يعني هذا الشرط أن هناك أكثر من طريقة لإستغلال هذه الموارد الأولية، ومن الجدير بالذكر هنا أن

اختيار البديل الفضل أو الأمثل يخضع لمعايير متعددة أهمها أن يحقق البديل أعلى الفوائد والمنافع أو اقل التكاليف والخسائر وهو ما يعرف بالبديل الأمثل.

إن هذين الشرطين (محدودية الموارد وتعدد البدائل) متلازمان،أحدهما بالآخر عند تعلق الأمر بتطبيق أساليب بحوث العمليات في منظمة الأعمال التي منها على سبيل المثال النماذج التالية:

-أسلوب البرمجة الخطية والبرمجة بأعداد صحيحة.

-أسلوب نماذج النقل.

-أسلوب شبكات الأعمال.

-أسلوب السيطرة على الخزين.

-أسلوب تحليل ماركوف.

-أسلوب خطوط الانتظار.

يستعمل احد هذه الأساليب أو أكثر من أسلوب في كل وظيفة من الوظائف الإدارية وهذه الأخيرة تتشعب وتتنوع بحسب نوع النشاط الإنتاجي أو الخدمي الذي تمارسه أية منظمة أعمال.

07-النماذج في بحوث العمليات: على العموم يتم تطبيق بحوث العمليات والاستفادة من وسائلها عن طريق صياغة المشكلة على هيأة نموذج والنماذج متعددة ومختلفة الاستعمال وفي هذا المجال يتم التمييز بين نوعين من النماذج أو الأساليب الكمية وهي:

07-01 نماذج رياضية تستعمل في ترشيد القرار المطلوب اتخاذه من خلال تصميم نظام مصغر يعبر بشكل أو بآخر عن النظام الفعلي ضمن ما يعرف بحالة المحاكاة للواقع بحيث أن حل المشكلة ضمن نظام المحاكاة يمكن أن يؤدي إلى حلها في الواقع العملي، ويرجع ذلك إلى أسباب اقتصادية كلفوية.

07-02 نماذج رياضية تستخدم في وضع مقياس امثل للمقارنة بحيث يكون ذلك على أساس توفر الظروف والإمكانات المواكبة كافة التي تعد شرطا لكي يمكن أن يصبح الحل ممكنا كما هي الحال عند استعمال أسلوب البرمجة الخطية وبالتحديد طريقة السمبلكس في التخطيط لعناصر الإنتاج كافة ومن ثم تحديد حجم المنتج الأمثل الذي يحقق الاستعمال الكامل لمستلزمات الإنتاج ويضمن اكبر العوائد الممكنة لمنظمة الأعمال وتشمل النماذج الرياضية على ثلاثة مجاميع أساسية هي:

-**المتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار:** وهي المتغيرات التي يمكن الوصول إلى قيمها عند حل النموذج وهنا يتخذ القرار وفقا للقيم المحددة لهذه المتغيرات ولذلك يمكن تسميتها (بالقرارات المتغيرة).

- **القيود أو محددات النموذج:** وهذه المحددات ضرورية في تكوين النماذج فمن الضروري أن تؤخذ بنظر الاعتبار المحددات المادية للنظام وهذه المحددات هي التي تدفع بالمتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار بان تكون ضمن القيم الممكنة.

- دالة الهدف: دالة الهدف هي الصيغة الرياضية (المعادلة الرياضية) التي تظهر قياس التأثير الكلي (الربحية) إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم Max أو للكلفة إذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير (تدنية) Min، للمتغيرات المتعلقة باتخاذ القرار وهي التي تحدد مقدار الربح الكلي أو مقدار الكلفة الكلية.

08-مراحل دراسة بحوث العمليات: أهم هدف يتحقق عند استعمال بحوث العمليات هو لمساعدة الإدارة في اتخاذ القرار الرشيد (الأمثل)، وتعد عملية اتخاذ القرارات جوهر العملية الإدارية بشكل عام، إذ يكرس المدراء جل اهتماماتهم عليها، ويقصد بعملية اتخاذ القرار بأنها مجموعة الخطوات التي يقوم بها متخذ القرار من اجل الوصول إلى الهدف الذي يسعى من اجله (مراحل استعمال بحوث العمليات)، وترد في هذا الصدد تسميات مختلفة لهذه الخطوات إلا أنها بشكل عام تتمحور حول الترتيب والتسميات الآتية:

-تعريف المشكلة قيد البحث.

-بناء النموذج.

-حل النموذج.

-صلاحية النموذج.

-تطبيق واعتماد النتائج.

وتحتاج **المرحلة الأولى** من مراحل الدراسة إلى تعريف واضح للمشكلة، والتي تتحدد بثلاث خطوات رئيسية و على النحو الآتي:

-تحديد واضح للأهداف المراد تحقيقها من خلال الدراسة.

-تحديد واضح للبدائل المتعلقة باتخاذ القرار.

-تحديد واضح للمحددات أو المتطلبات اللازمة لتحقيق الأهداف.

أما **المرحلة الثانية** فتتطلب تحديد شكل النموذج المطلوب فإذا كان النموذج المقدر صياغته هو من صيغ النماذج الرياضية فيمكن اللجوء إلى موضوع البرمجة الخطية لدراسة المشكلة بينما إذا كانت الدراسة معقدة وكبيرة فمن الممكن اللجوء إلى نماذج المحاكاة والتي تعد في هذه الحالة أكثر ملائمة.

أما **المرحلة الثالثة** والمتعلقة بإيجاد حل للنموذج المقترح (الحل هنا يعني إيجاد قيم المتغيرات للقرار) وهنا الحل يمثل النتيجة المثلى باستعمال نماذج الحل الأمثل.

أما **المرحلة الرابعة** فإنها تتعلق باختيار النتائج ويتم ذلك مثلا بمقارنة النتائج مع سلسلة زمنية سابقة لمتغيرات القرار التي يشملها النموذج أو بعض النتائج التاريخية.

وأخيرا **المرحلة الخامسة** التي تتعلق بتطبيق النتائج التي تم التوصل إليها في الحياة العملية وتأخذ شكل التوجيهات أو التعليمات إلى الإدارات المختلفة للوصول إلى النتائج التي رسمت في المرحلة الأولى.

المحور الثاني:البرمجة الخطية
(Linear Programming)

المحور الثاني: البرمجة الخطية

01-تعريف البرمجة الخطية:تعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي يتعلق بالتخصيص الأمثل للموارد النادرة.

وتعرف أيضا بأنها أسلوب رياضي يعتمد عليه لمعالجة المشاكل الإدارية وذلك للمساعدة في إتخاذ القرارات الإقتصادية لتحقيق أقصى مستوى من العوائد أو الوصول بالتكاليف إلى أدنى مستوى ممكن.

-كما عرفت المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية بأنها "طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متراجحات خطية".

-هي إحدى الأساليب التي تستخدم في علم بحوث العمليات، وهي طريقة رياضية تمكن من التوصل لأفضل أو أمثل الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط رياضية معينة، فنجد ان كلمة البرمجة تشير إلى الطريقة الرياضية المنتظمة التي يتم على أساسها التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة موضوع التطبيق من بين كل الحلول المتاحة والممكنة، بينما نجد كلمة خطية تشير إلى الشروط الواجب توافرها في المشكلة موضوع التطبيق حتى يتسنى حلها بالبرمجة الخطية وهذه الكلمة مستخدمة لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر وهي علاقة مباشرة وتتغير بنفس النسبة.

02-خطوات صياغة البرمجة الخطية: لحل أية مشكلة بإستخدام البرمجة الخطية يتعين القيام بعدة خطوات تمثل مكونات نموذج البرمجة الخطية وهذه الخطوات هي:

02-01تحديد الهدف المنشود من وراء حل المشكلة: وهناك نوعان من الأهداف المراد حلها بهذا الأسلوب هما تعظيم الأرباح إلى أقصى حد ممكن او تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى، ويصاغ الهدف من وراء حل المشكلة ضمن النموذج الرياضي للمشكلة على شكل دالة خطية تسمى دالة الهدف objective Function

02-02 تحديد القيود constraints: وهي مجموعة المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف وعملية تحقيق الهدف تشترط الإستجابة لهذه المتطلبات بشكل جماعي وهناك ثلاثة أنواع من القيود

أ-قيد يتضمن أضغر او يساوي($\leq$)،وهذا القيد يتضمن حدا أعلى لكميات الموارد المتاح إستخدامها لا يجوز تجاوزه.

ب-قيد يتضمن أكبر او يساوي($\geq$)، وهذا القيد يتضمن الحد الأدنى الواجب تحقيقه.

ج-قيد يتضمن المساواة ($=$)، وهذا القيد يستوجب تحديد كميات الموارد المتاحة للإستخدام بدقة وبالضبط.

02-03 شرط عدم السلبية Non-negativity constraints:ويعني هذا الشرط ان جميع قيم المتغيرات في المشكلة قيد الدراسة حقيقية وغير سالبة أي يجب أن تكون القيم موجبة أو صفرية.

03-الفروض الأساسية لنموذج البرمجة الخطية: يعتمد نموذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفروض الأساسية وهي:

03-01 فرض التأكد التام: وفقا لهذا الفرض تكون إدارة المنظمة على علم تام وتأكد تام فيما يتعلق بكافة البيانات المتعلقة بدالة الهدف والقيود الموجودة على تحقيقه.

03-02 فرض الخطية: يقضي هذا الفرض بأن العلاقة بين متغيرات المشكلة علاقات خطية.

03-03 فرض عدم السلبية: في ضوء هذا الفرض فإنه يجب ان تكون كافة القيم المرتبطة بالحلول النهائية إما صفرية أو موجبة أي لا تكون هناك قيم سالبة.

03-04 فرض القابلية للتجزئة او التقسيم: ويقضي هذا الفرض بأن الحلول الممكنة ليس من الضروري أن تكون أرقام صحيحة فقط ، ولكن يمكن أن تكون أرقام كسرية أو صحيحة أو كليهما.

03-05 فرض ثبات هامش مساهمة الوحدة:أي أن هامش مساهمة الوحدة ثابت، ولتحقيق هذا الفرض يستلزم ثبات سعر بيع الوحدة بغض النظر عن حجم الإنتاج.

04-شروط إستخدام البرمجة الخطية: يتطلب إستخدام البرمجة الخطية ضرورة توافر عدة شروط نوردها على النحو التالي

04-01 يجب أن يكون هناك هدف يراد تحقيقه، وعادة يكون هذا الهدف هو تعظيم الأرباح إلى أقصى ما يمكن أو تخفيض التكاليف إلى أدنى ما يمكن وذلك حتى يمكن صياغة المشكلة في صورة نموذج رياضي وفقا لأسلوب البرمجة الخطية.

04-02 يجب ان تكون عناصر المشكلة ومتغيراتها قابلة للقياس الكمي،بمعنى أنه يمكن قياسها كميا، وعلى ذلك فإن العناصر والمتغيرات التي لا يمكن التعبير عنها في صورة كمية لا يمكن إدراجها في النموذج الرياضي للبرمجة الخطية.

04-03 يجب أن تكون متغيرات المشكلة قابلة للتجزئة، بمعنى أنه يمكن للمتغيرات أن تأخذ قيما أو كميات كسرية،أي جزء من وحدة القياس،أي يسمح بإنتاج كسور من المنتج النهائي في برنامج الإنتاج الأمثل.

04-04 يجب أن تكون الإدارة في حالة تأكد تام فيما يتعلق بالعوامل والمتغيرات الخاصة بالمشكلة كالموارد المتاحة والمستوى التقني ونتائج البرامج المختلفة، وهذا يعني أنه لا مجال للإحتمالات في أسلوب البرمجة الخطية حيث أنه من الأساليب المحددة وهذا يعني أن هذا الأسلوب يصلح للتطبيق في محيط التأكد وفي حالة توفر المعلومات التامة ولا يصلح إستخدامه في محيط المخاطرة وعدم التأكد.

04-05 يجب ان تكون كل العلاقات بين المتغيرات المشكلة الخطية،أي يكون بينها علاقة أو تناسب طردي.

04-06 يجب أن تأخذ جميع متغيرات المشكلة قيما أو كميات موجبة او تكون مساوية للصفر، أي لايسمح لها بأن تأخذ قيما أو كميات سالبة.

04-07 يجب أن يتم التعامل مع فترة زمنية واحدة، وهذا يعني ان أسلوب البرمجة الخطية أسلوب ثابت غير حركي لا يهتم بدراسة أثر النتائج في فترة معينة على الفترات الأخرى.

04-08 يجب أن تكون عوامل المتغيرات في كل من الهدف والموارد الإقتصادية المتاحة ثابتة خلال الفترة الزمنية التي يعد فيها البرنامج الأمثل.

04-09 يجب أن يكون هناك حدودا ثابتة للموارد الإقتصادية المتاحة، حيث أنه لولا وجود مثل هذه الحدود الثابتة أو القيود لما كان هناك مشكلة أصلا، ولما كان هناك داعي لإستخدامها.

10-04يجب أن يكون هناك بدائل يتم الإختيار بينها، وقد تأخذ تلك البدائل صورة تشكيلات مختلفة من المنتجات.

05-صياغة النموذج الرياضي لأسلوب البرمجة الخطية: يمكن تعريف عملية بناء نموذج البرمجة الخطية بأنه ترجمة لمشكلة توجد في الواقع في شكل مجموعة من المعادلات الرياضية، فمن أجل تكوين نموذج البرمجة الخطية فإن الأمر يتطلب إعادة صياغة البيانات الموجودة والتي تعبر عن المشكلة في شكل علاقات رياضية حتى يمكن لنا أن نستخدم الأسلوب الرياضي لمعالجتها، ويمكن صياغة أي مشكلة في شكل نموذج البرمجة الخطية من خلال عدة خطوات وهي:

05-01:تحديد إتجاه دالة الهدف (objective Function)، هل هي تعظيم ربح أو تدنية التكاليف

05-02:تحديد المتغيرات الواجب إتخاذ قرار بشأنها ووضع رموز إفتراضية لها.

05-03:صياغة دالة الهدف: لها حالتين هما

05-03-01حالة تعظيم الأرباح: يكون المطلوب هو تعظيم هذه الدالة أي تحقيق النهاية العظمى لدالة الربح، بمعنى إختيار الخطة التي تحقق للمشروع أكبر أرباح ممكنة، وتعطى دالة الربح بالصيغة الرياضية التالية:

إجمالي الربح (Z): ربح الوحدة من السلعة الأولى×عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى+ ربح الوحدة من السلعة الثانية×عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية+..........+ ربح الوحدة من السلعةn ×عدد الوحدات المنتجة من السلعة n

$$MAX(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$$

05-03-02حالة تدنية التكاليف: يكون المطلوب هو تخفيض دالة التكلفة أي تحقيق النهاية الصغرى لهذه الدالة،بمعنى إختيار الخطة التي تحقق للمشروع أقل تكلفة ممكنة، وتعطى دالة التكلفة بالصيغة الرياضية التالية:

إجمالي التكلفة (W):تكلفة الوحدة من السلعة الأولى×عدد الوحدات المنتجة من السلعة الأولى+ تكلفة الوحدة من السلعة الثانية×عدد الوحدات المنتجة من السلعة الثانية+..........+ تكلفة الوحدة من السلعةn ×عدد الوحدات المنتجة من السلعة n

$$MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$$

05-04صياغة القيود المفروضة على دالة الهدف وتحديد إتجاه المتباينات (المتراجحات)،حيث يأخذ إتجاه المتباينات ثلاث حالات هي:

05-04-01 إذا كان المتوفر مشروط بأحد الكلمات التالية: لا يقل عن أو الحد الأدنى أو على الأقل أو أكثر من أو يزيد عن، جميع هذه الكلمات تعني أكبر من أو يساوي $(\geq)$.

05-04-02 إذا كان المتوفر مشروط بأحد الكلمات التالية: لايزيد عن أو الحد الأقصى أو على الكثر أو أقل من او لا يزيد عن ،جميع هذه الكلمات تعني أصغر من أو يساوي $(\leq)$.

05-04-03 إذا كان المتوفر مشروط بعبارة الإستخدام التام أو الكامل جميع هذه الكلمات تعني المساواة$(=)$.

05-05 قيود اخرى على المتغيرات التي تدخل في تركيب النموذج: مثل قيود عدم السلبية (عدم سلبية المتغيرات) وهذا يتطلب عند حل المشكلة بيانيا أن يتم العرض البياني للعلاقات في الربع الأول فقط، حيث أن

قيم كل من (X_1) و (X_2) موجبة، وعند حل المشكلة جبريا أو بإستخدام طريقة السمبلكس فإن قيم المتغيرات تكون موجبة ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا كمايلي:

$$MAX(Z) \text{ or } MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \dots\dots\dots\dots + C_nX_n$$

في ظل القيود التالية:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n \begin{matrix}\geq \\ = \\ \leq\end{matrix} b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n \begin{matrix}\geq \\ = \\ \geq\end{matrix} b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n \begin{matrix}\geq \\ = \\ \leq\end{matrix} b_m \end{cases}$$

شرط عدم السلبية: $X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots, X_n \geq 0$

مثال01: شركة ما تقوم بتصنيع سلعتين هما السلعة (X) والسلعة (Y) كل سلعة منهما لابد وأن تمر على ثلاث آلات وهي الآلة (A_1) ثم الآلة (A_2) وأخيرا الآلة(A_3)، يحتاج تصنيع الوحدة الواحدة من السلعة (X) إلى 08 دقائق على الآلة(A_1) و06 دقائق على الآلة (A_2) و12 دقيقة على الآلة (A_3)، ويحتاج تصنيع الوحدة الواحدة من السلعة (Y) إلى 06 دقائق على الآلة(A_1) و10 دقائق على الآلة (A_2) و04 دقيقة على الآلة (A_3)،فإذا علمت ان الطاقة القصوى لكل آلة من الآلات الثلاثة هي 150 ساعة أسبوعيا،والحد الأقصى للمبيعات من السلعة (X) هو 3500 وحدة أسبوعيا،أما الحد الأقصى للمبيعات من السلعة (Y) هو 2500 وحدة أسبوعيا، وكان ربح الوحدة الواحدة من السلعة (X) هو 900 دج، وربح الوحدو الواحدة من السلعة (Y) هو 850 دج

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي لمشكلة البرمجة الخطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل:

قبل التطرق لخطوات صياغة مشكلة البرمجة الخطية، يمكننا تلخيص بيانات المشكلة السابقة في الجدول التالي

الآلات / السلع	(A_1)	(A_2)	(A_3)	الحد الأقصى للمبيعات	ربح الوحدة الواحدة
السلعة (X)	08	12	06	3500	900
السلعة (Y)	06	10	04	2500	850
الطاقة القصوى	150	150	150		

01-تحديد دالة الهدف: بما أن المسألة هي تعظيم الأرباح فتكون الدالة من النوع MAX

02-تحديد متغيرات القرار: بما أن المسألة هي تعظيم الحجم الأمثل من السلعتين فإن متغيرات القرار هما:

X1:يمثل عدد الواحدات اللازم إنتاجها من السلعة (X)

X2: يمثل عدد الواحدات اللازم إنتاجها من السلعة (Y)

03–صياغة دالة الهدف: تأخذ الشكل التالي

إجمالي الربح (Z): ربح الوحدة من السلعة(X) ×عدد الوحدات المنتجة من السلعة (X)+ ربح الوحدة من السلعة (Y)×عدد الوحدات المنتجة من السلعة(Y).

وتأخذ دالة الهدف الصيغة الرياضية التالية:

$$MAX(Z)=C_1X_1+C_2X_2 \Rightarrow MAX(Z)=900X_1+850X_2$$

04–صياغة قيود المشكلة:نجد أن هناك نوعان من القيود، قيود خاصة بالطاقة القصوى المتاحة للآلات وقيود خاصة بالحد الأقصى المتاح للمبيعات.

01-04 قيود الطاقة القصوى: ويتضمن ثلاث معادلات بالنسبة لكل آلة

-قيد الطاقة القصوى للآلة (A_1): $08X_1+06X_2 \leq 150$

- قيد الطاقة القصوى للآلة (A_2): $12X_1+10X_2 \leq 150$

- قيد الطاقة القصوى للآلة (A_2): $06X_1+04X_2 \leq 150$

02-04 قيد المبيعات: ويتضمن معادلتين هما

-قيد مبيعات السلعة (X): $X_1 \leq 3500$

-قيد مبيعات السلعة (Y): $X_2 \leq 2500$

05-شرط عدم السلبية: بماأن الكميات الواجب إنتاجهما من السلعتين لا يمكن ان تاخذ القيم السالبة وعليه يكون شرط عدم السلبية كمايلي: $X_1, X_2 \geq 0$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج الرياضي للمشكلة السابقة كما يلي:

$$MAX(Z)=900X_1+850X_2$$

$$S/C=\begin{cases}08X_1+06X_2 \leq 150\\12X_1+10X_2 \leq 150\\06X_1+04X_2 \leq 150\\X_1 \leq 3500\\X_2 \leq 2500\\X_1,X_2 \geq 0\end{cases}$$

ملاحظة هامة:

–إذا كان القرار تعظيم ربح وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أقل من أو يساوي ($\leq$)

–إذا كان القرار تقليل التكلفة وكانت الطاقة غير مشروطة نجعل المتراجحة أكبر من أو يساوي ($\geq$)

مثال02: تقوم أحد المستشفيات بشراء خليط من الطعام (X) بسعر 2000 دج للكلغ الواحد،وخليط آخر من الطعام (Y) بسعر 1800 دج للكلغ الواحد، ويحتوي كل كلغ من الطعام (X) على 200 وحدة فيتامين (A) وعلى 300 وحدة فيتامين (B)،كما يحتوي كل كلغ من الطعام (Y) على 250 وحدة فيتامين (A) وعلى 180 وحدة فيتامين (B)، فإذا كانت حاجة المستشفى اليومية 3200 وحدة فيتامين (A) على الأكثر، و 2800 وحدة

فيتامين (B) على الأقل، كما انه لا يزيد عدد الكيلوغرامات من الطعام(X) على 85 كلغ وعدد الكيلوغرامات من الطعام (Y) على 75 كلغ

المطلوب: صياغة النموذج الرياضي لمشكلة البرمجة الخطية؟

الحل:

قبل التطرق لخطوات صياغة مشكلة البرمجة الخطية، يمكننا تلخيص بيانات المشكلة السابقة في الجدول التالي

الفيتامين / الطعام	(A)	(B)	الحد الأقصى للمبيعات	تكلفة الوحدة الواحدة
الطعام (X)	200	300	3500	2000
الطعام (Y)	250	180	2500	1800
الطاقة القصوى	3200	2800		

01–تحديد دالة الهدف: بما أن المسألة هي تدنية التكاليف فتكون الدالة من النوع MIN

02–تحديد متغيرات القرار: بما أن المسألة هي تدنية خليط الطعام فإن متغيرات القرار هما:

X1:يمثل عدد الواحدات اللازم إنتاجها من خليط الطعام (X)

X2: يمثل عدد الواحدات اللازم إنتاجها من خليط الطعام (Y)

03–صياغة دالة الهدف: تأخذ الشكل التالي

إجمالي التكلفة (W): تكلفة الوحدة من السلعة(X) ×عدد الوحدات المنتجة من السلعة (X)+ تكلفة الوحدة من السلعة (Y)×عدد الوحدات المنتجة من السلعة(Y).

وتأخذ دالة الهدف الصيغة الرياضية التالية:

$$\text{MIN}(W) = C_1X_1 + C_2X_2 \Rightarrow \text{MIN}(W) = 2000X_1 + 1800X_2$$

04–صياغة قيود المشكلة:نجد أن هناك نوعان من القيود، قيود خاصة بالطاقة القصوى المتاحة للفيتامينات وقيود خاصة بالطعام من النوعين.

01-04 قيود الطاقة القصوى: ويتضمن معادلتين بالنسبة لكل فيتامين

-قيد الطاقة القصوى للفيتامين (A): $200X_1 + 250X_2 \leq 3200$

- قيد الطاقة القصوى للفيتامين (B): $300X_1 + 180X_2 \geq 2800$

02-04 قيدالطعام من النوعين: ويتضمن معادلتين هما

-قيد **الطعام** (X): $X_1 \leq 85$

-قيد **الطعام** (Y): $X_2 \leq 75$

05-شرط عدم السلبية: بماأن الكميات الواجب إنتاجهما من السلعتين لا يمكن ان تاخذ القيم السالبة وعليه يكون شرط عدم السلبية كمايلي: $X_1, X_2 \geq 0$

وبالتالي يمكن كتابة النموذج الرياضي للمشكلة السابقة كما يلي:

$$MIN(W)=2000X_1+1800X_2$$

$$S/C=\begin{cases}200X_1+250X_2\leq 3200\\300X_1+180X_2\geq 2800\\X_1\leq 85\\X_2\leq 75\\X_1,X_2\geq 0\end{cases}$$

06-صيغ البرمجة الخطية: يمكن ان نميز ثلاث انواع من الصيغ وهي

06-01 الصيغة العامة: وشروط هذه الصيغة هي

-أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل MAX أوMIN

-أن تكون القيود مكتوبة بإشارة أقل أو يساوي أو اكبر أو يساوي

-المتغيرات تكون إما مقيدة أو غير مقيدة بالإشارة.

06-01-01 الصيغة العامة في حالة تعظيم الأرباح: يمكن كتابتها بإحدى الصيغ التالية

01-الصيغة المختصرة: تأخذ الشكل التالي

-دالة الهدف: $MAX(Z)=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j$

-الشروط الخطية: $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j\leq b_i \quad , \quad i=1,2,3,.......,m$

-شرط عدم السلبية: $X_j\geq 0 \;;\quad j=1,2,3,.........,n$

02-الصيغة المفصلة: تأخذ الشكل التالي

$$MAX(Z)=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+.................+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases}a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+..........+a_{1n}X_n\leq b_1\\a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+.........+a_{2n}X_n\leq b_2\\a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+.........+a_{3n}X_n\leq b_3\\. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+a_{m3}X_3+.........+a_{mn}X_n\leq b_m\\X_1,X_2,X_3,..........,X_n\geq 0\end{cases}$$

-صيغة المصفوفات: تأخذ الشكل التالي

$$MAX(Z)=CX$$

$$S/C=\begin{cases}AX\leq B\\X\geq 0\end{cases}$$

حيث:

C هو شعاع سطر من R^n: $C=\left[C_1,C_2,C_3,.........,C_n\right]$

B شعاع عمود من R^m

X الشعاع المطلوب إيجاده من R^n

A مصفوفة من الرتبة $(m\times n)$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} ,\ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} ,\ X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

06-01-02 الصيغة العامة في حالة تقليل التكاليف: يمكن كتابتها بإحدى الصيغ التالية

01-الصيغة المختصرة: تأخذ الشكل التالي

-دالة الهدف: $MIN(W)=\sum_{j=1}^{n} C_jX_j$

-الشروط الخطية: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j \geq b_i \quad , \quad i=1,2,3,.......,m$

-شرط عدم السلبية: $X_j \geq 0 \ ; \ j=1,2,3,.........,n$

02-الصيغة المفصلة: تأخذ الشكل التالي

$$MIN(W)=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+.................+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.........+a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+.........+a_{2n}X_n \geq b_2 \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+.........+a_{3n}X_n \geq b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+a_{m3}X_3+.........+a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1,X_2,X_3,.........,X_n \geq 0 \end{cases}$$

-صيغة المصفوفات: تأخذ الشكل التالي

$$MINW=CX$$

$$S/C=\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

حيث:

C هو شعاع سطر من R^n: $C=\left[C_1,C_2,C_3,.........,C_n\right]$

B شعاع عمود من R^m

X الشعاع المطلوب إيجاده من R^n

A مصفوفة من الرتبة $(m\times n)$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ . \\ . \\ X_n \end{bmatrix}$$

06-02 الصيغة القانونية: من شروط هذه الصيغة

-أن تكون دالة الهدف من نوع **MAX** فقط.

-أن تكون القيود مكتوبة على شكل متباينات بإشارة أقل أو يساوي فقط.

-أن تكون المتغيرات مقيدة بالإشارة.

أما مكونات نموذج البرمجة الخطية هي نفسها بالصيغتين العامة والقانونية وكمايلي:

وتأخذ الصيغة القانونية لنموذج البرمجة الخطية الصيغة التالية:

$$MAX(Z)=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+.................+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+..........+a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+.........+a_{2n}X_n \le b_2 \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+.........+a_{3n}X_n \le b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+a_{m3}X_3+.........+a_{mn}X_n \le b_m \\ X_1,X_2,X_3,..........,X_n \ge 0 \end{cases}$$

ويمكن إختصار الصيغة القانةنية لنموذج البرمجة الخطية كمايلي:

$$MAX(Z)=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j \le b_i \quad , \quad i=1,2,3,.......,m$$

$$X_j \ge 0 \qquad , \quad j=1,2,3,.........,n$$

وتستخدم الصيغة القانونية في بعض الحالات الخاصة لنماذج البرمجة الخطية،إذ يمكن تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القانونية بإستخدام القواعد التالية:

01- يمكن تحويل التصغير (Minimized) لدالة الهدف إلى تعظيم (Maximized) وبالعكس بضرب دالة الهدف في (01-)،أي: $MAX(Z) = MIN(-Z)$

إذا كانت لدينا دالة الهدف من الشكل التالي : $MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$

تصبح كالتالي: $MAX(-W) = -C_1X_1 - C_2X_2 - C_3X_3 - .... - C_nX_n$

02-يمكن تحويل القيد أكبر من أو يساوي($\geq$) إلى أصغر من أو يساوي($\leq$) بضرب طرفي المتراجحة في (01-)،أي: $a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \geq b_1$

يصبح القيد كالتالي $-a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - .... - a_{1n}X_n \leq -b_1$

03-إذا كانت إشارة القيد مساواة فيتحول القيد إلى متباينتين أحدهما أقل أو تساوي الطرف الأيمن والثانية أكبر او تساوي الطرف الأيمن ثم يتم تحويل المتباينة الثانية إلى أقل أو يساوي بضرب طرفيها في (01-) كمايلي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n = b_1$$

هذا القيد يكافئ القيدين التاليين:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \geq b_1 \end{cases}$$

وحتى يتم تحقيق شروط الصيغة القانونية يتم ضرب طرفي المتباينة الثانية في (01-) كمايلي:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - .... - a_{1n}X_n \leq -b_1 \end{cases}$$

04-يمكن تحويل قيد القيمة المطلقة (absolute value) إلى قيدين من نوع أصغر من أو يساوي في الحالتين التاليتين:

04-01 إذا كانت القيمة المطلقة للقيد أقل أو تساوي وبالشكل التالي:

$$|a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n| \leq b_1$$

يتم تحويل القيمة المطلقة إلى قيدين كالتالي:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \geq -b_1 \end{cases}$$

وبضرب طرفي المتباينة الثانية في (01-) نجد:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1 \\ -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - .... - a_{1n}X_n \leq b_1 \end{cases}$$

04-02 إذا كانت القيمة المطلقة للقيد أكبر من أو تساوي:

$$|a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n| \geq b_1$$

يتم تحويل القيمة المطلقة إلى قيدين كالتالي:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \leq -b_1 \end{cases}$$

وبضرب طرفي المتباينة الأولى في (01-) نجد:

$$\begin{cases} -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - ....- a_{1n}X_n \le -b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n \le -b_1 \end{cases}$$

05-إذا كانت القيمة المطلقة للقيد تساوي

$$\left|a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n\right| = b_1$$

يتم تحويل القيد إلى أربع متباينات كالتالي:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n \ge b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n \le -b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n \ge -b_1 \end{cases}$$

يتم ضرب طرفي المتباينة الثانية والرابعة في (-01) كالتالي:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n \le b_1 \\ -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - ....- a_{1n}X_n \le -b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n \le -b_1 \\ -a_{11}X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - ....- a_{1n}X_n \le b_1 \end{cases}$$

06-يمكن تحويل المتغير غير المقيد في الإشارة (unrestricted sign) إلى متغيرين غير سالبين كالتالي:

$$X_i = X_i^{/} - X_i^{//} \quad , X_i^{/}, X_i^{//} \ge 0$$

وهنا نميز ثلاث حالات:

-إذا كان $X_i^{/} > X_i^{//} \Rightarrow X_i > 0$

-إذا كان $X_i^{/} < X_i^{//} \Rightarrow X_i < 0$

-إذا كان $X_i^{/} = X_i^{//} \Rightarrow X_i = 0$

مثال: حول الصيغة العامة للبرمجة الخطية إلى الصيغة القانونية

$$MIN(Z) = 02X_1 + 03X_2 + 05X_3$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 \ge -05 \\ -06X_1 + 07X_2 - 09X_3 = 15 \\ \left|04X_1 - 06X_2 + 05X_3\right| \le 13 \\ X_1, X_2 \ge 0 \ , \forall X_3 \end{cases}$$

الحل:

قبل التحويل إلى الصيغة القانونية نلاحظ ان المتغير الثالث هو متغير حر أي غير مقيد بإشارة لذلك يتم تحويله بالشكل التالي: $X_3 = X_3^{/} - X_3^{//}$

نحول الصيغة العامة إلى الصيغة المفصلة التالية قبل تحويلها غلى الصيغة القانونية:

$$MIN(Z)=MAX(-Z)=-02X_1-03X_2-05\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)$$

$$S/C=\begin{cases} X_1+X_2-\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\geq -05 \\ -06X_1+07X_2-09\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\leq 15 \\ -06X_1+07X_2-09\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\geq 15 \\ 04X_1-06X_2+05\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\leq 13 \\ 04X_1-06X_2+05\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\geq -13 \\ X_1,X_2,X_3^{/},X_3^{//}\geq 0 \end{cases}$$

يتم تحويل الصيغة السابقة إلى الصيغة القانئنية بضرب طرفي المتباينة رقم (01) و(03) و(05) في (01-) كالتالي:

$$MIN(Z)=MAX(-Z)=-02X_1-03X_2-05\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)$$

$$S/C=\begin{cases} -X_1-X_2+\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\leq 05 \\ -06X_1+07X_2-09\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\leq 15 \\ 06X_1-07X_2+09\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\leq -15 \\ 04X_1-06X_2+05\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\leq 13 \\ -04X_1+06X_2-05\left(X_3^{/}-X_3^{//}\right)\leq 13 \\ X_1,X_2,X_3^{/},X_3^{//}\geq 0 \end{cases}$$

06-03 الصيغة القياسية: إن الفرق بين الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية والصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية يتمثل بمايلي:

01–دالة الهدف (Z) في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون إما من نوع (MAX) أو من نوع (MIN)، وكذلك تكون في الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية.

02–علامات القيود في الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تكون إما في شكل $(\geq,=,\leq)$،بينما تكون في الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية على شكل مساواة فقط $(=)$، وذلك بعد إضافة المتغيرات الوهمية او الراكدة أو متغيرات الفوائض (Slack Variables) غير سالبة ويرمز لها بالرمز $(S_i\geq 0)$، وتكون بشكل $(+S)$ عندما تكون إشارة المتباينة أقل من أو تساوي $(\leq)$، و $(-S)$ عندما تكون إشارة المتباينة أكبر من او تساوي $(\geq)$، ولا نضيف أي شيئ في حالة المساواة $(=)$،وفق الحالات التالية

$$\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.........+a_{1n}X_n\leq b_1 \\ a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.........+a_{1n}X_n\geq b_1 \\ a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.........+a_{1n}X_n=b_1 \end{cases}$$

يتم تحويل القيود إلى الصيغة القياسية كمايلي:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n + S_i = b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n - S_i = b_1 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n = b_1 \end{cases}$$

03-الطرف الأيمن للقيود يكون غير سالب (b_i).

04-معاملات المتغيرات الوهمية او الراكدة في دالة الهدف تاخذ بمعامل صفر

وتكون الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم بالشكل التالي

-الصيغة العامة بالشكل التالي:

$$MAX(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + C_nX_n$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n \le b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \dots\dots\dots + a_{3n}X_n \le b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n \le b_m \\ X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots, X_n \ge 0 \end{cases}$$

الصيغة القياسية بالشكل التالي:

$$MAX(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + \dots\dots\dots + 0S_m$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n + S_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n + S_2 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \dots\dots\dots + a_{3n}X_n + S_3 = b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \dots\dots\dots + a_{mn}X_n + S_m = b_m \\ X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots, X_n \ge 0,\ S_1, S_2, S_3, \dots\dots, S_m \ge 0 \end{cases}$$

-وتكون الصيغة القياسية لنموذج البرمجة الخطية في حالة التقليل بالشكل التالي

الصيفة العامة بالشكل التالي:

$$MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3n}X_n \geq b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1, X_2, X_3, ..., X_n \geq 0 \end{cases}$$

الصيغة القياسية بالشكل التالي:

$$MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + ... + 0S_m$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n - S_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n - S_2 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3n}X_n - S_3 = b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n - S_m = b_m \\ X_1, X_2, X_3, ..., X_n \geq 0,\ S_1, S_2, S_3, ..., S_m \geq 0 \end{cases}$$

مثال03: حول الصيغة العامة التالية إلى الصيغة القياسية

$$MAX(Z) = 08X_1 + 06X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 04X_1 + 02X_2 \leq 60 \\ 03X_1 + 06X_2 = 80 \\ 02X_1 + 05X_2 \geq 40 \end{cases}$$

الحل: يتم تحويل الصيغة العامة إلى القياسية بإضافة المتغير الراكد للقيد الأول، أما القيد الثاني فيبقى على حاله،أما القيد الثالث فيتم طرح المتغير الراكد، وتكون الصيغة القياسية على الشكل التالي:

$$MAX(Z) = 08X_1 + 06X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C = \begin{cases} 04X_1 + 02X_2 + S_1 = 60 \\ 03X_1 + 06X_2 = 80 \\ 02X_1 + 05X_2 - S_2 = 40 \end{cases}$$

07-طرق حل البرمجة الخطية: يمكن حل البرمجة الخطية بإحدى الطرق الثلاثة التالية

-الطريقة البيانية (Graphical Méthod)

-الطريقة الجبرية (Algerbraic Méthod)

-الطريقة المبسطة السمبلكس(Simplex Méthid)

المحور الثالث:الطريقة البيانية

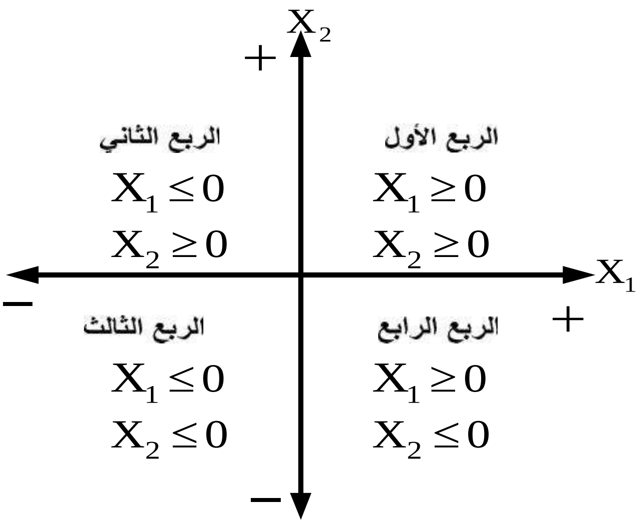
(Graphical Méthod)

المحور الثالث: الطريقة البيانية (Graphical Méthod)

01-مقدمة: تعتبر الطريقة البيانية من أبسط طرق حل نماذج البرمجة الخطية، ولها ميزة كبيرة في إيضاح طبيعة المشاكل التي تحل بأسلوب البرمجة الخطية وكذلك إجراءات حلها دون تعقيدات رياضية، وبذلك فهي تعتبر بمثابة مدخل ملائم لشرح المشاكل التي تحل بأسلوب البرمجة الخطية، وعلى ذلك تعتبر الطريقة البيانية ذات فائدة محدودة، حيث يقتصر تطبيقها عى النماذج التي تحتوي على متغيرين إثنين فقط، ويصعب إستخدامها وتطبيقها على النماذج ذات المتغيرات المتعددة، وذلك يرجع إلى أن الرسم البياني دائما يوضع على محورين وإحداثيين إثنين فقط،أحدهما المحور الأفقي والآخر المحور الرأسي، وبالتالي فإن المشاكل ذات المتغيرات المتعددة تستلزم أبعادا بيانية متعددة وتحتاج إلى نظريات هندسية خاصة.

وتعتمد هذه الطريقة على الرسم البياني للخطوط المستقيمة الممثلة للقيود ومن خلالها يتم تحديد مايدعى بمنطقة الحل المجدي أو الممكن (The Feasible Solution Region) التي تكون محددة بالنقاط القصوى (نقاط تقاطع خطوط القيود)، وهذه المنطقة تمثل مجموعة الحلول الممكنة بالقيود ويمكن عند إستخدام طريقة من طرق إيجاد النقطة القصوى التوصل إلى الحل المثل الذي يمثل أعلى عائد في مشكلة الحد الأعلى (Maximization) او إلى أدنى تكلفة في مشكلة الحد الأدنى (Minimization).

كما يجب ان تكون جميع متغيرات المشكلة في هذه الطريقة والتي تؤثر في إتخاذ القرار يجب أن تكون موجبة أي $\left(X_j \geq 0\right)$، من هذا يتضح أن منطقة الحلول الممكنة ستكون في الربع الأيمن الشمالي (الربع الأول) حيث المحورين موجبين كما يوضحه الشكل التالي:



أما إذا وجد اكثر من متغيرين فيتعذر إستخدام الطريقة البيانية ويتم اللجوء إلى إستخدام ما يعرف بطريقة السمبلكس (Simplex Method) كما سوف نرى ذلك لا حقا.

وقبل التطرق إلى الطريقتين (الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس) لابد من معرفة بعض المصطلحات المهمة التي يجب معرفتها وهذه المصطلحات هي:

01-الحل المقبول (Feasible Solution)(F.S):وهو الحل $X=\left(X_1,X_2,X_3,......,X_n\right)$ الذي لا يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود الفعلية ويحقق كافة القيود لإستخراج قيم X_j (بغض النظر عن كون قيم X_j موجبة أو سالبة أو صفر).

02-الحل غير المقبول (غير ممكن)(Infeasible Solution): وهو الحل الذي يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود الفعلية الواردة بالمسألة.

03-الحل الأساسي المقبول (B.F.S)(Basic Feasible Solution):يسمى الحل الأساسي مقبولا إذا كان عدد المتغيرات الموجبة فيه لا يتجاوز عدد القيود (m) (قيم X_j موجبة أو صفرية بقدر عدد القيود).

04-الحل الأساسي المقبول غير المفكك(غير مجزء،غير منحل)(Non-Degenerate B.F.S): يكون الحل الأساسي المقبول غير مفكك إذا إحتوى بالضبط على m من المتغيرات الموجبة $\left(X_j \geq 0\right)$

05-الحل الأمثل (O.S)(Optimal Solution):وهو أفضل الحلول المقبولة والذي يحقق كافة القيود،إضافة إلى ذلك يجعل قيمة دالة الهدف في نهائتها العظمى أو في نهايتها الصغرى،وقد يوجد للمسألة حل أمثل وحيد **(Unique O.S)**أو عدة حلول مثلى **(Multipe.O.S)**، ويعطي تعدد الحلول المثلى عادة مرونة أكبر لمتخذي القرار لدى قيامهم بتنفيذ أحدها.

06-حل غير أمثل (Non-Optimal Solution):كل حل لا يمكن تصنيفه كحل أمثل يسمى حلا غير أمثل سواء كان مقبولا أو غير مقبول.

07-المجموعة المحدبة (Convex Set):هي مجموعة من النقاط $X=\left(X_1,X_2,X_3,......,X_n\right)$، كل زوج منها X_1 و X_2 يكون قطعة مستقيم كاملة تربط بين هاتين النقطتين في المجموعة وتحقق العلاقة التالية:

$$\lambda X_1+\left(01-\lambda\right)X_2 \in X \qquad 0 \leq \lambda \leq 01$$

08-النقاط المتطرفة (Extreme Point):أي نقطة$\left(X_1,X_2,X_3,......,X_n\right)$ $X=$ في المجموعة المحدبة هي نقطة متطرفة إذا كان X لا يمكم التعبير عنها كتوافيق محدبة لأية نقطتين في المجموعة المحدبة.

02-مزايا وعيوب الطريقة البيانية في حل نماذج البرمجة الخطية: إن البرمجة الخطية هي طريقة تحديد الحل الأمثل أو المزيج الأمثل للأنشطة أو متغيرات القرار ذات الإعتماد المتبادل بسبب الموارد المتاحة النادرة خلال فترة زمنية معينة، وعند الإعتماد على الحل البياني في حل نماذج البرمجة الخطية فإنه يتم تمثيل القيود بمنحنيات دالة (خطوط مستقيمة) على الشكل البياني من أجل صنع او تكوين مايسمى بمنطقة الحل الممكن والتي تمثل النقاط القصوى فيها نقاط الحل، أي نقطة أو اكثر منها تمثل الحل الأمثل.

02- 01 مزايا الطريقة البيانية: تتمثل المزايا في النقاط التالية

-أنها أداة فعالة لحل المشاكل الإدارية و الإقتصادية والمالية ذات المتغيرين.

-أنها تحقق الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة النادرة في محيط التأكد وعند توفر المعلومات.

-إن الطريقة البيانية تقدم صورة واضحة للعلاقات الموجودة بين الموارد.

-إمكانية إستخدام أسلوب تحليل الحساسية للتوصل إلى الحل الأمثل عند تغير الموارد المتاحة.

02-02 عيوب الطريقة البيانية: تتمثل في النقاط التالية

-إن هذه الطريقة لايمكن إستخدامها في حل المشاكل ذات ثلاثة متغيرات أو أكثر.

-أنها تكون ذات هدف واحد (تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف).

-محدودة الإستعمال حيث لا تعمل في محيط عدم التأكد والمخاطرة وهما المحيطان السائدان في الحياة الإقتصادية المعاصرة.

-تتعرض الطريقة البيانية لما يسمى بالحالات الخاصة التي تتسم بعدم التوصل إلى الحل الأمثل فيها.

03-خطوات الحل بإستخدام الطريقة البيانية:

01-تحديد المشكلة وصياغتها رياضيا.

02-تحديد دالة الهدف بدقة على أن يكون التعامل مع متغيرين فقط.

03-تحديد القيود (المتباينات او المتراجحات) بدقة وتحويلها إلى مساواة.

04-حل كل معادلة على حدة عن طريق إفتراض قيمة صفرية للمتغير الأول X_1 وإستنتاج قيمة المتغير الثاني X_2 المقابلة، ثم إفتراض قيمة صفرية للمتغير الثاني X_2 وإستنتاج قيمة المتغير الأول X_1

05- رسم خط مستقيم يعبر عن نقطتي الحل المستخرجة من كل معادلة ويتم رسم هذا الخط المستقيم على البياني، مع تحديد المنطقة التي سيتوافر بها حل هذه المعادلة وذلك حسب علامة المتراجحة الخاصة بهذه المعادلة.

06- يتم تكرار رسم خط مستقيم لكل قيد (لكل معادلة على حدة) إلى أن يتم الإنتهاء من تمثيل جميع القيود بيانيا.

07-جميع الخطوط المستقيمة يجب ان تقع في الربع الأول لأن $\left(X_j \geq 0\right)$، وبخلافه يتم إمداد الخط ليصل إلى الربع الأول،إلا إذا كان قيد عدم السلبية يشير إلى غير ذلك.

08- يتم تحديد منطقة الحل الممكن والتي تسمى بالمنطقة المحدبة وذلك بتشطيب المستقيمات حسب المتراجحة الخاصة بكب قيد فإذا كان

-المتراجحة من نوع أقل أو يساوي ($\leq$) نقوم بالتشطيب من جهة اليمين لذلك المستقيمم أي بالإتجاه العلوي.

-المتراجة من نوع أكبر أو يساوي ($\geq$) نقوم بالتشطيب من جهة اليسار لذلك المستقيمم أي بالإتجاه السفلي.

-إذا كان القيد على شكل مساواة يجب معرفة طبيعة المسألة إذا كانت تعظيم (MAX) أو تقليل (MIN)

-إذا كانت المسألة من نوع تعظيم (MAX) نقوم بالتشطيب ناحية اليمين.

- إذا كانت المسألة من نوع تعظيم (MIN) نقوم بالتشطيب ناحية اليسار.

09-تحديد منطقة الحلول الممكنة والتي تحقق جميع شروط المسألة ولا تخل بأي شرط منها، هذه المنطقة هي هي المنطقة الممثلة لأقرب النقاط من نقطة الأصل (نقطة تقاطع المستقيمات) وذلك إذا كان الهدف من الدالة هو تعظيم الأرباح (MAX)، بينما تكون منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة الممثلة لأبعد النقاط عن نقطة الأصل إذا كان الهدف من الدالة هو تخفيض الخسائر أو تقليل التكاليف.

10–تحدد نقطة الحل المثل (Optimal Solution) والتي تمثل إحدى النقاط على الأقل الواقعة على تقاطعات المستقيمات الممثلة لمنطقة الحل الأساسي الإبتدائي المقبول والتي تسمى بنقاط التطرف (Extreme Point)، التي تجعل الأرباح أعظم ما يمكن إذا كانت دالة الهدف تعظيم (MAX)، أو أقل ما يمكن إذا كانت دالة الهدف تقليل الخسائر (MIN)

11–لتحديد الحل الأمثل نستعمل إحدى الطريقيتين التاليتين

11–01 الطريقة المطولة: بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة(المنطقة المحدبة) وإستخراج النقاط المتطرفة نقوم بإختبار كل نقطة منها وذلك بالتعويض في دالة الهدف والنقطة التي تجعل دالة الهدف أكبر مايمكن تكون هي التي تمثل الحل الأمثل إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم (MAX)، أما إذا كانت النقطة التي تجعل دالة الهدف أقل مايمكن في حالة كون دالة الهدف من نوع تقليل (MIN) هي التي تمثل الحل الأمثل.

11–02 الطريقة المختصرة:بعد تحديد منطقة الحلول الممكنة(المنطقة المحدبة) والناتجة من تقاطع المستقيمات (القيود)، نجعل دالة الهدف مساوية للصفر ونرسم المستقيم الممثل لها والذي نرمز له بالرمز (Δ) بحيث يمر هذا المستقيم من منطقة الأصل، نحرك هذا المستقيم بإتجاه منطقة الحلول الممكنة فإذا كانت المسالة من نوع تعظيم (MAX) فإن الحل الأمثل يتمثل في آخر نقطة يصل إليها المستقيم(Δ) ، أما إكانت المسألة من نوع تقليل (MIN) فإن الحل الأمثل يتمثل في أول نقطة يصل إليها المستقيم(Δ).

مثال01:ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية

$$MAX(Z)=08X_1+06X_2$$

$$S/C=\begin{cases}04X_1+02X_2\le 60\\02X_1+04X_2\le 48\\X_1,X_2\ge 0\end{cases}$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل بإستخدام الطريقة البيانية

الحل:

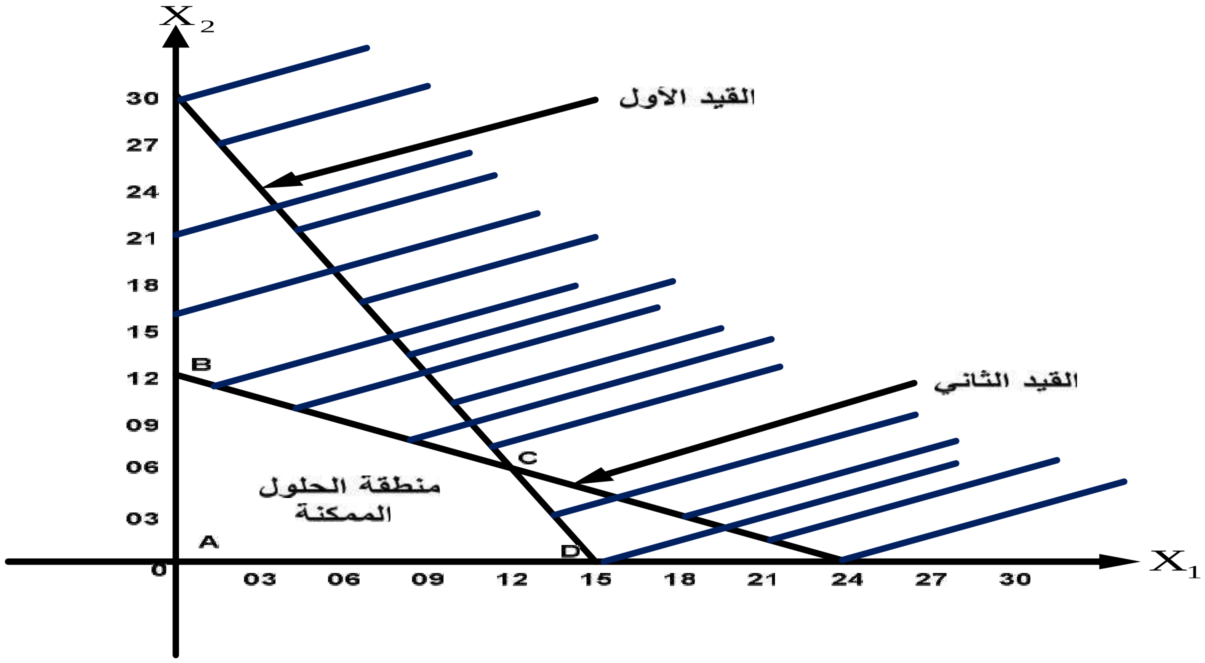
01–نحول جميع المتراجحات إلى مساواة ،ثم نأخذ نقاط مساعدة لكل مستقيم ونقوم برسمه

$04X_1+02X_2=60............(01)$

$02X_1+04X_2=48............(02)$

X_1	0	15	X_1	0	24
X_2	30	0	X_2	12	0

نرسم المستقيمين على محور متعامد ومتجانس كمايلي:



بعد رسم المستقيمين نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة وذلك بالتشطيب نحو الأعلى أي على يمين كل مستقيم فنتحصل على مضلع الرؤوس ذي النقاط المتطرفة (A,B,C,D) والذي يمثل منطقة الحلول الممكنة.

لتحديد النقطة المثلى والتي تعظم دالة الهدف نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

01–الطريقة المطولة: نستخرج إحداثيتي النقاط المتطرفة ونقوم بتعويضها في دالة الهدف كالتالي

النقاط المتطرفة	إحداثيتي النقاط المتطرفة	دالة الهدف $MAX(Z)=08X_1+06X_2$	$MAX(Z)$
A	(0,0)	0	132
B	(12,0)	72	
C	(06,12)	132	
D	(0,15)	120	

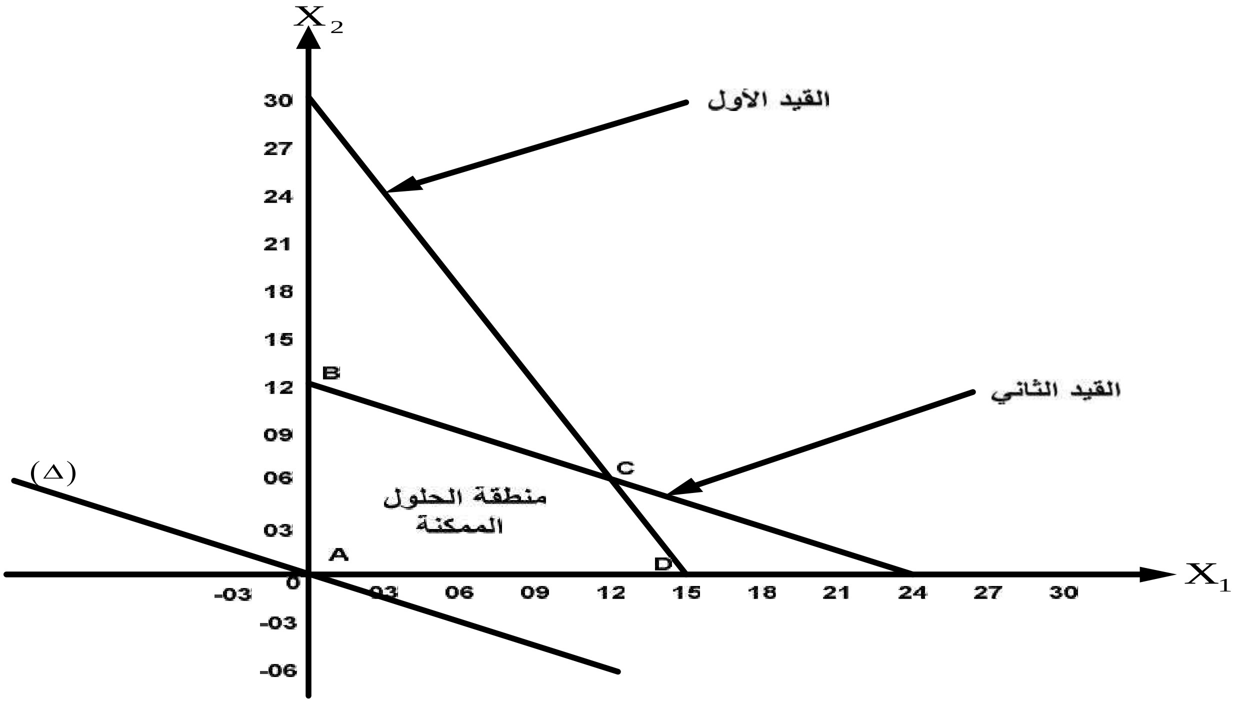
إذن النقطة C هي النقطة المثلى

02–الطريقة المختصرة: نقوم بجعل دالة الهدف مساوية للصفر، ثم نقوم باخذ نقاط مساعدة لرسم المستقيم الممثل لها وليكن (Δ) بحيث يجب أن يمر بالمبدأ

$$MAX(Z)=08X_1+06X_2=0$$

X_1	03	-03
X_2	-04	04

والشكل التالي يوضح ذلك



للحصول على النقطة المثلى والتي تعظم دالة الهدف نقوم بتحريك المستقيم (Δ) الممثل لدالة الهدف بإتجاه منطقة الحلول الممكنة آخر نقطة يصل إليها المستقيم هي نقطة الحل المثل وفي حالتنا آخر نقطة يصل إليها المستقيم هي النقطة C

مثال02: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية

$$MIN(Z) = 03X_1 + 04X_2$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + 03X_2 \geq 60 \\ 02X_1 + X_2 \geq 40 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل بإستخدام الطريقة البيانية

الحل:

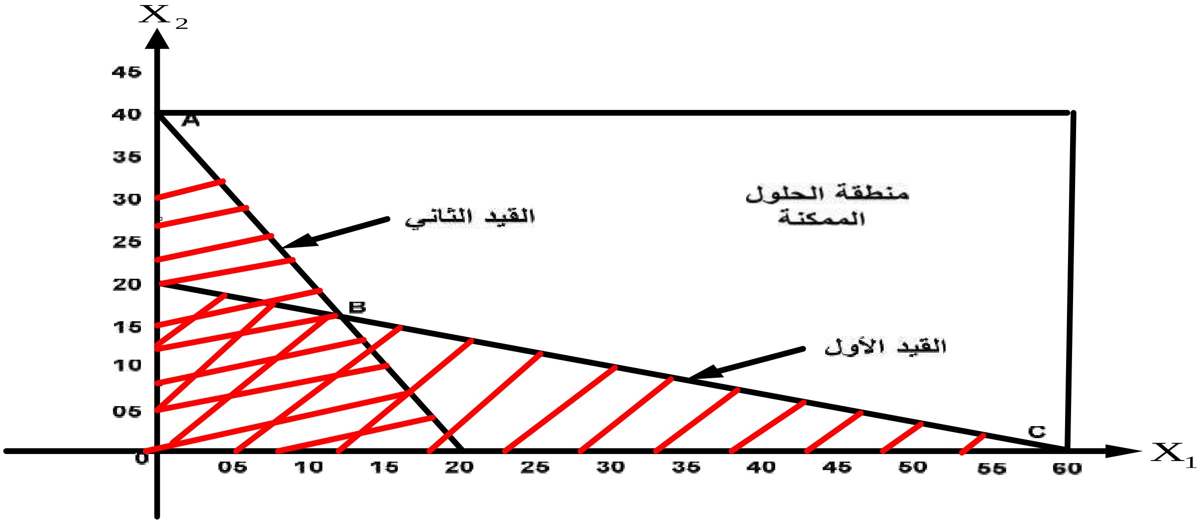
01–نحول جميع المتراجحات إلى مساواة ،ثم نأخذ نقاط مساعدة لكل مستقيم ونقوم برسمه

$X_1 + 03X_2 = 60$.................(01)

$02X_1 + X_2 = 40$.................(02)

X_1	0	60	X_1	0	20
X_2	20	0	X_2	40	0

نرسم المستقيمين على محور متعامد ومتجانس كمايلي:



بعد رسم المستقيمين نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة وذلك بالتشطيب نحو الأسفل أي على يسار كل مستقيم فنتحصل على مضلع الرؤوس ذي النقاط المتطرفة (A,B,C) والذي يمثل منطقة الحلول الممكنة.

لتحديد النقطة المثلى والتي تدني دالة الهدف نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

01–الطريقة المطولة: نستخرج إحداثيتي النقاط المتطرفة ونقوم بتعويضها في دالة الهدف كالتالي

$MIN(Z)$	دالة الهدف $MIN(Z)=03X_1+04X_2$	إحداثيتي النقاط المتطرفة	النقاط المتطرفة
100	160	(40,0)	A
	100	(16,12)	B
	180	(0 ,60)	C

إذن النقطة B هي النقطة المثلى

ملاحظة: بما أن النقطة C تمثل تقاطعي المستقيمين ولإيجاد إحداثيتي هاته النقطة نقوم بحل جملة معادلتي المستقيمين بعدة طرق منها طريقة التعويض أو طريقة الحذف أو طريقة المصفوفات...إلخ أو أي طريقة أخرى.

على سبيل المثال سوف نستخدم طريقة المصفوفات كالتالي:

نشكل النظام المصفوفي للمعادلتين كمايلي

$$\begin{bmatrix} 01 & 03 \\ 02 & 01 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

نحسب المحدد العام ثم نستخرج X_1 و X_2

المحدد العام هو $|D|=-05$

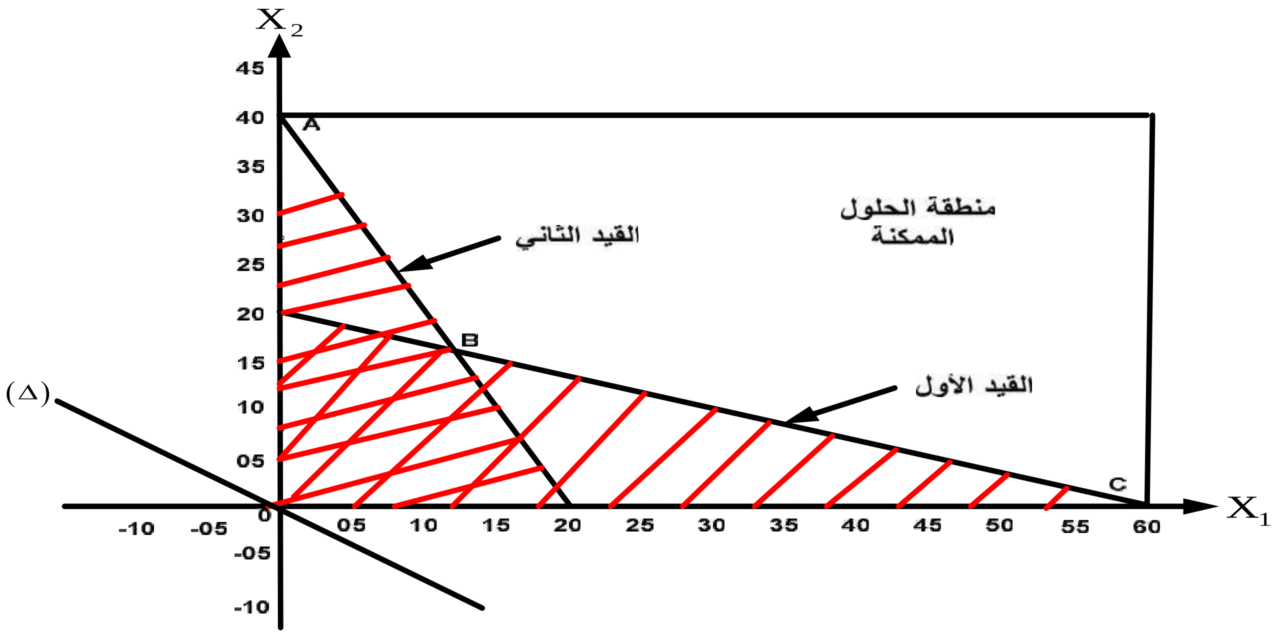
$$X_1=\frac{\begin{vmatrix} 60 & 03 \\ 40 & 01 \end{vmatrix}}{-05}=\frac{-60}{-05}=12 \quad , \quad X_2=\frac{\begin{vmatrix} 01 & 60 \\ 02 & 40 \end{vmatrix}}{-05}=\frac{-80}{-05}=16$$

02–الطريقة المختصرة: نقوم بجعل دالة الهدف مساوية للصفر، ثم نقوم باخذ نقاط مساعدة لرسم المستقيم الممثل لها وليكن (Δ) بحيث يجب أن يمر بالمبدأ

$MIN(Z) = 03X_1 + 04X_2 = 0$

X_1	08	-08
X_2	-06	06

والشكل التالي يوضح ذلك



للحصول على النقطة المثلى والتي تعظم دالة الهدف نقوم بتحريك المستقيم (Δ) الممثل لدالة الهدف بإتجاه منطقة الحلول الممكنة أول نقطة يصل إليها المستقيم هي نقطة الحل المثل وفي حالتنا أول نقطة يصل إليها المستقيم هي النقطة B.

04-الطريقة الجبرية: تعد الطريقة الجبرية من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري للقيم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقا إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم، وتستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط هما (X_1, X_2) .

ولحل نموذج البرمجة الخطية بموجبها، نتبع الخطوات التالية:

01-تقسم متغيرات النموذج الرياضي إلى نوعين هما:

01-01المتغيرات الأساسية(Basic Variables):وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (أكبر من الصفر) دائما،أي أن $\left(X_j > 0, S_j > 0\right)$.

01-02المتغيرات غير الأساسية (Non- Basic Variables): وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكلة، وتكون قيم هذه المتغيرات (مساوية للصفر) دائما،أي أن $\left(X_j = 0, S_j = 0\right)$

02-تحويل النموذج الرياضي من الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية وذلك بإستخدام المتغيرات الفائضة أو الراكدة في دالة الهدف والقيود الهيكلية للنموذج كالتالي:

نوع علامة القيود	آلية إستخدام المتغيرات الراكدة في القيود	آلية إستخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف	
		MAX(Z)	MIN(Z)
أقل أو يساوي $(\leq)$	$+S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
أكبر أو يساوي $(\geq)$	$-S_i$	$-0S_i$	$-0S_i$
يساوي $(=)$	/	/	/

03-عمل جدول يتضمن المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية، لغرض الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة قيد الدراسة بالطريقة الجبرية.

04-حساب عدد الحالات الممكنة بإستخدام العلاقة التالية: $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

حيث: n: عدد المتغيرات $(X_1, X_2, ..., X_n, S_1, S_2, ..., S_m)$ ،r: عدد القيود الفنية

مثال03: نفس المثال المستخدم في الطريقة البابنية في حالة التعظيم

$$MAX(Z) = 08X_1 + 06X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 04X_1 + 02X_2 \leq 60 \\ 02X_1 + 04X_2 \leq 48 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:إيجاد الحل الأمثل بإستخدام الطريقة الجبرية؟

الحل:

أولا:نحول النموذج من الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية كمايلي

$$MAX(Z) = 08X_1 + 06X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C = \begin{cases} 04X_1 + 02X_2 + S_1 = 60 \\ 02X_1 + 04X_2 + S_2 = 48 \\ X_1, X_2 \geq 0; S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

ثانيا: تحديد عدد الحالات الممكنة لإختيار متغيرين (02) من (04) متغيرت وفقا للعلاقة التالية:

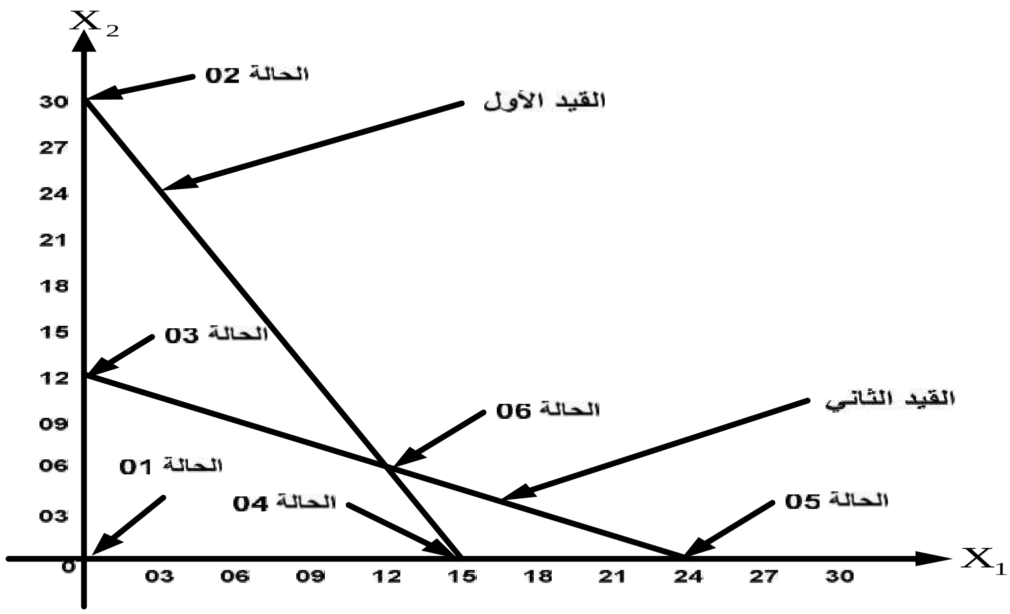
$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \Rightarrow C_4^2 = \frac{04!}{02!(02)!} = 06$$

ثالثا: الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة بإستخدام الطريقة الجبرية، وذلك من خلال إعداد الجدول التالي

$MAX(z)$	دالة الهدف $MAX(z) = 08X_1 + 06X_2 + 0S_1 + 0S_2$	المتغيرات الأساسية $X_j > 0, S_j > 0$		المتغيرات غير الأساسية $X_j = 0, S_j = 0$		عدد الحالات الممكنة
132	0	$S_2 = 48$	$S_1 = 60$	$X_2 = 0$	$X_1 = 0$	01
	180 (يهمل)	$S_2 = -72$	$X_2 = 30$	$S_1 = 0$	$X_1 = 0$	02
	72 (يهمل)	$S_1 = -36$	$X_2 = 12$	$S_2 = 0$	$X_1 = 0$	03
	120	$S_2 = 18$	$X_1 = 15$	$S_1 = 0$	$X_2 = 0$	04
	192 (يهمل)	$S_1 = -36$	$X_1 = 24$	$S_2 = 0$	$X_2 = 0$	05
	132	$X_2 = 06$	$X_1 = 12$	$S_2 = 0$	$S_1 = 0$	06

وعليه يكون الحل الأمثل للمشكلة كمايلي: $X_1 = 12, X_2 = 06, Z^* = 132$

كما يمكن توضيح الحالات الستة من خلال الشكل التالي:



مثال04: نفس المثال السابق في حالة التدنية

$$MIN(Z) = 03X_1 + 04X_2$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + 03X_2 \geq 60 \\ 02X_1 + X_2 \geq 40 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:إيجاد الحل الأمثل بإستخدام الطريقة الجبرية؟

الحل:

أولا:نحول النموذج من الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية كمايلي

$$MIN(Z)=03X_1+04X_2+0S_1+0S_2$$

$$S/C=\begin{cases}X_1+03X_2-S_1=60\\02X_1+X_2-S_2=40\\X_1,X_2\geq 0,S_1,S_2\geq 0\end{cases}$$

ثانيا: تحديد عدد الحالات الممكنة لإختيار متغيرين (02) من (04) متغيرت وفقا للعلاقة التالية:

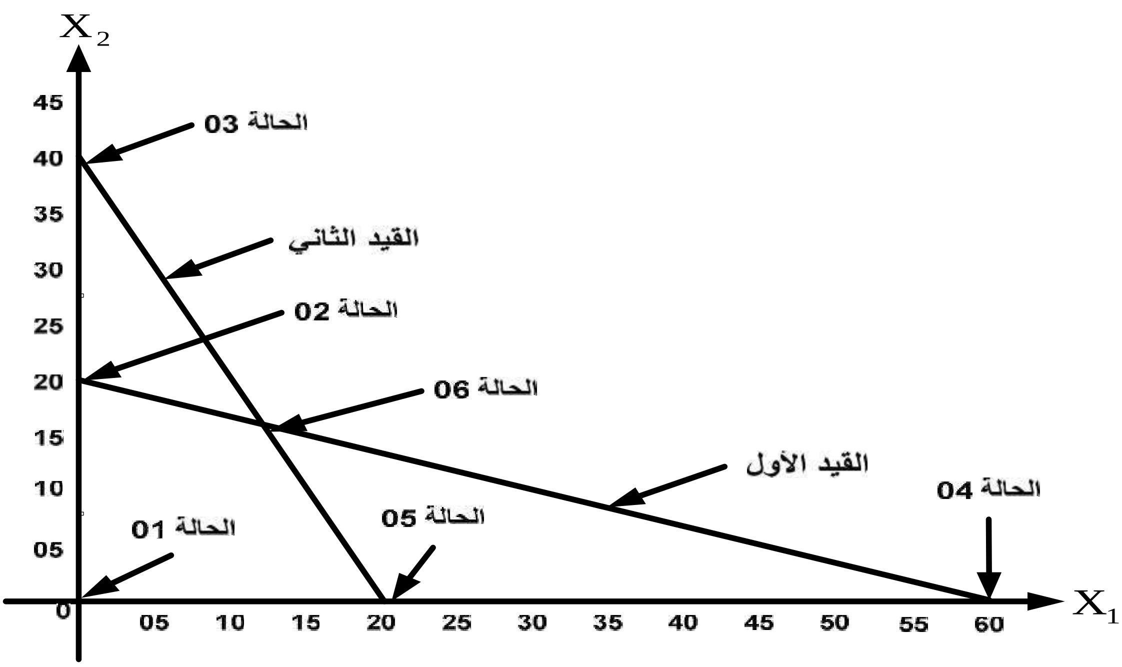
$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}\Rightarrow C_4^2=\frac{04!}{02!(02)!}=06$$

ثالثا: الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة بإستخدام الطريقة الجبرية، وذلك من خلال إعداد الجدول التالي

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات غير الأساسية $X_j=0,S_j=0$		المتغيرات الأساسية $X_j>0,S_j>0$		دالة الهدف $MIN(z)=03X_1+04X_2+0S_1+0S_2$	$MIN(z)$
01	$X_1=0$	$X_2=0$	$S_1=-60$	$S_2=-40$	0 (يهمل)	100
02	$X_1=0$	$S_1=0$	$X_2=20$	$S_2=-20$	80 (يهمل)	
03	$X_1=0$	$S_2=0$	$X_2=40$	$S_1=60$	160	
04	$X_2=0$	$S_1=0$	$X_1=60$	$S_2=80$	180	
05	$X_2=0$	$S_2=0$	$X_1=20$	$S_1=-40$	60 (يهمل)	
06	$S_1=0$	$S_2=0$	$X_1=12$	$X_2=16$	100	

وعليه يكون الحل الأمثل للمشكلة كمايلي: $X_1=12,X_2=16,Z^*=100$

كما يمكن توضيح الحالات الستة من خلال الشكل التالي:



05-بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية: توجد خمس حالات خاصة وصعوبات تواجه إستخدام طريقة الحل البياني في بعض الحالات عند حل مشاكل البرمجة الخطية وهذه الحالات هي:

01-الإنحلال

02-تعدد الحلول المثلى

03-الحلول غير المحدودة

04-عدم وجود حلول مقبولة

05-القيود غير الضرورية

وفيمايلي شرح لهذه العناصر

01-الإنحلال: ويحصل هذا النوع من الحلول إذا كانت عدد المتغيرات الأساسية والتي تكون قيمتها أكبر من الصفر،أقل من عدد القيود (أي تكون قيمة أحد المتغيرات مساوية للصفر)، فيكون الحل عبارة عن حل منحل.

مثال05: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MAX(Z) = 03X_1 + 09X_2$$

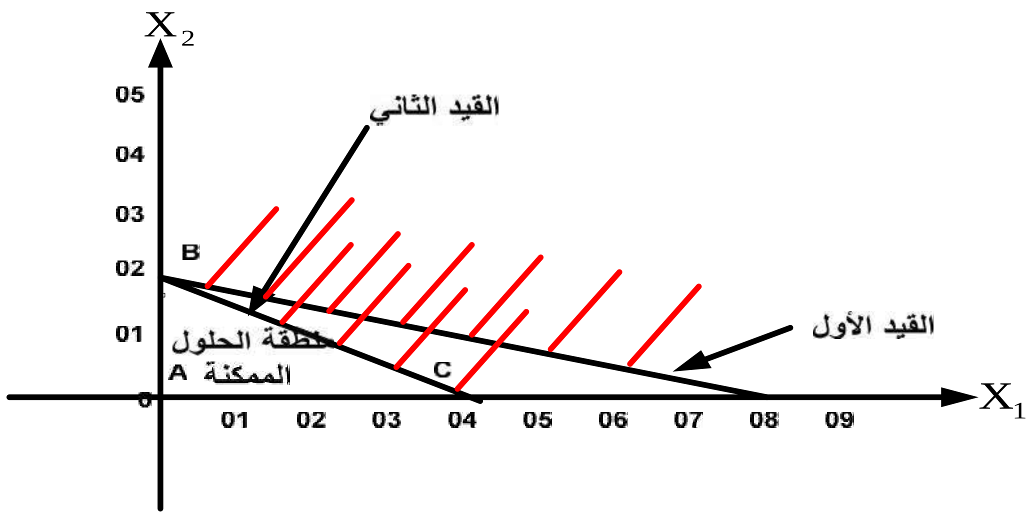
$$S/C = \begin{cases} X_1 + 04X_2 \le 08 \\ X_1 + 02X_2 \le 04 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

نحول المتراجحتين إلى مساواة ونأخذ نقاط مساعدة لرسمهما كالتالي

$$X_1 + 04X_2 = 08..............(01)$$
$$X_1 + 02X_2 = 04..............(02)$$

X_1	0	08	X_1	0	04
X_2	02	0	X_2	02	0

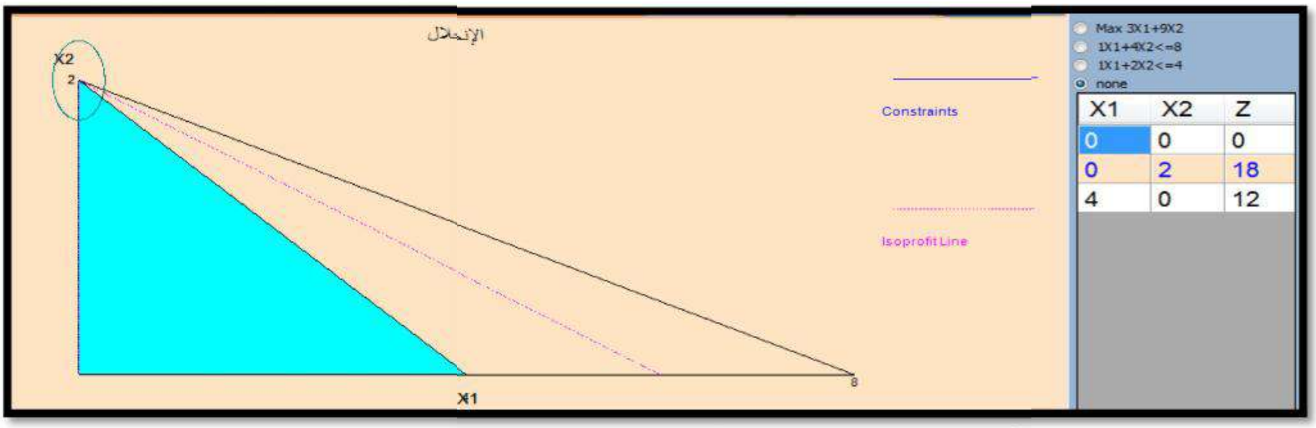


منطقة الحلول الممكنة ممثلة في المثلث (A,B,C)،نستخرج إحداثيتي النقاط المتطرفة ونقوم بتعويضها في دالة الهدف كالتالي

النقاط المتطرفة	إحداثيتي النقاط المتطرفة	دالة الهدف $MAX(Z)=03X_1+09X_2$	$MAX(Z)$
A	(0 ,0)	0	
B	(02,0)	18	18
C	(0 ,04)	12	

وبهذا تكون النقطة B هي الحل المثل لتحقيقها أكبر عائد وبهذا تكون قيم المتغيرات $X_1=0, X_2=02$ وبهذا انطبق تعريف الحل المنحل على نتيجة الحل.

كما يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بإستخدام أحد البرمجيات الجاهزة والمستخدمة في بحوث العمليات وليكن على سبيل المثال لا الحصر البرنامج QM for Windows



02-تعدد الحلول المثلى: ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة التعظيم أو أقل قيمة في حالة التدنية

مثال06: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX(Z)=X_1+02X_2$$

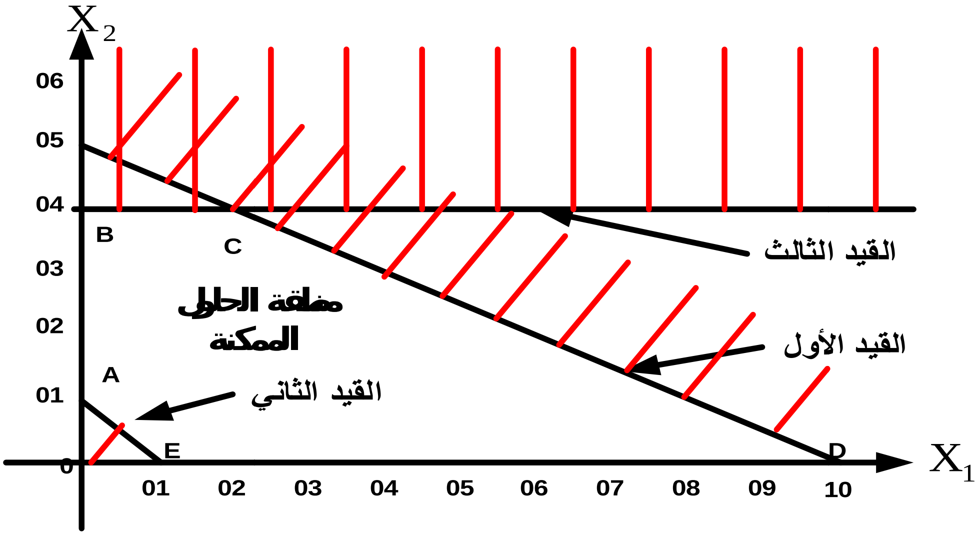
$$S/C=\begin{cases} X_1+02X_2 \le 10 \\ X_1+X_2 \ge 01 \\ \quad X_2 \le 04 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

نحول المتراجحات إلى مساواة ونأخذ نقاط مساعدة لرسمهما كالتالي

$$X_1+02X_2=10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(01)$$
$$X_1+X_2=01 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(02)$$
$$X_2=04 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(03)$$

X_1	0	10	X_1	0	01
X_2	05	0	X_2	01	0

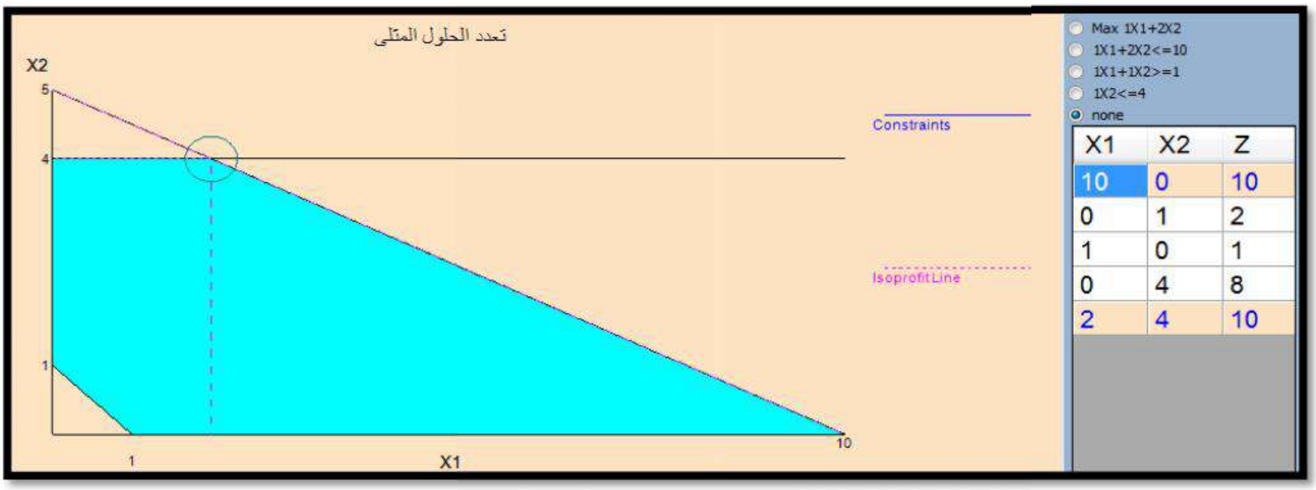


منطقة الحلول الممكنة ممثلة في مضلع الرؤوس(A,B,C,D,E)،نستخرج إحداثيتي النقاط المتطرفة ونقوم بتعويضها في دالة الهدف كالتالي

النقاط المتطرفة	إحداثيتي النقاط المتطرفة	دالة الهدف $MAX(Z)=X_1+02X_2$	$MAX(Z)$
A	(01 ,0)	02	10
B	(04,0)	08	
C	(04 ,02)	10	
D	(0 ,10)	10	
E	(0 ,01)	01	

واضح جدا أن النقطتين C و D أعطت قيمتين متساويتين لدالة الهدف وهي (10) وبقيم للمتغيرات مختلفتين وهذا يعني وجود حرية لمتخذ القرار أن يأخذ واحدة من النقطتين السابقتي الذكر، وأيهما يصلح لحل المشكلة ولذلك اطلق على هذا النوع من الحلول هو تعدد الحلول.

كما يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بإستخدام البرنامج QM for Windows



03-الحلول غير المحدودة: يكون هذا النوع من الحلول عندما تكون منطقة الحلول الممكنة منطقة مفتوحة وعند تعيين نقطة بعيدة عن النقطة التي تم تسميتها بالحل الأمثل فممكن الحصول على حل أمثل آخر وهكذا لا توجد نهاية للحلول.

مثال07: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX(Z) = 02X_1 + X_2$$

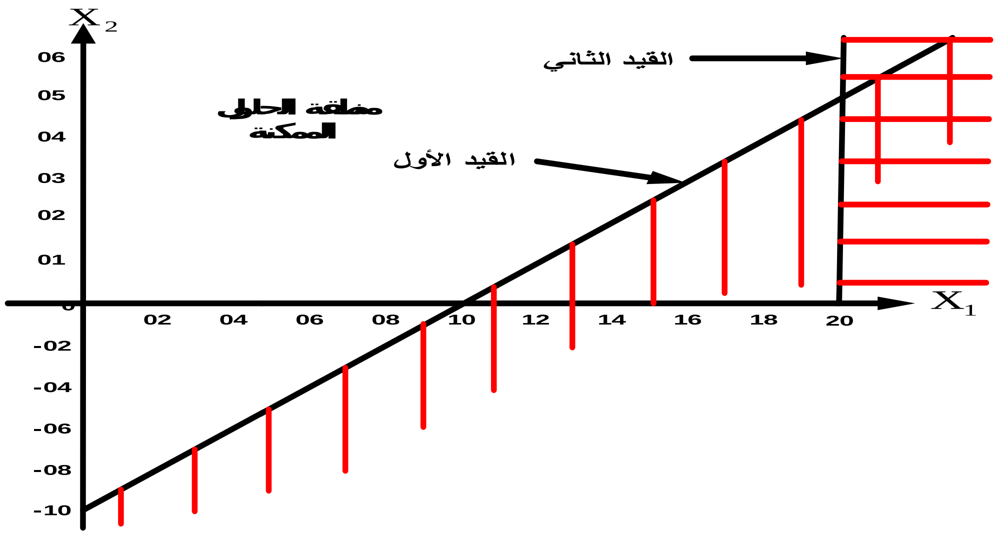
$$S/C = \begin{cases} X_1 - X_2 \leq 10 \\ 02X_1 \quad \leq 40 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

نحول المتراجحتين إلى مساواة ونأخذ نقاط مساعدة لرسمهما كالتالي

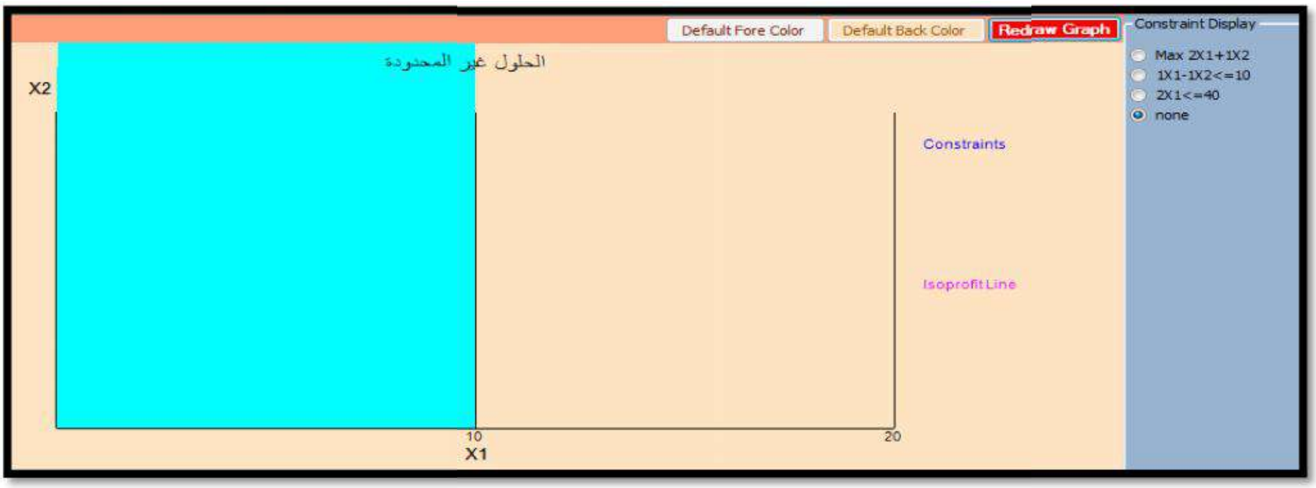
$$X_1 - X_2 = 10 ....(01)$$
$$02X_1 = 40 ....(02)$$

X_1	0	10
X_2	-10	0



منطقة الحلول الممكنة منطقة مفتوحة.

كما يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بإستخدام البرنامج QM for Windows



04-عدم وجود حلول مقبولة:يحصل هذا النوع من الحلول عندما لايمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولايوجد هنا حل أساسي مقبول، أي قيود المشكلة فيها تضارب بحيث تقاطع القيود هو عبارة عن مجموعة خالية

مثال08: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX(Z) = 20X_1 + 15X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 05X_1 + 10X_2 \le 25 \\ 05X_1 + 10X_2 \ge 50 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

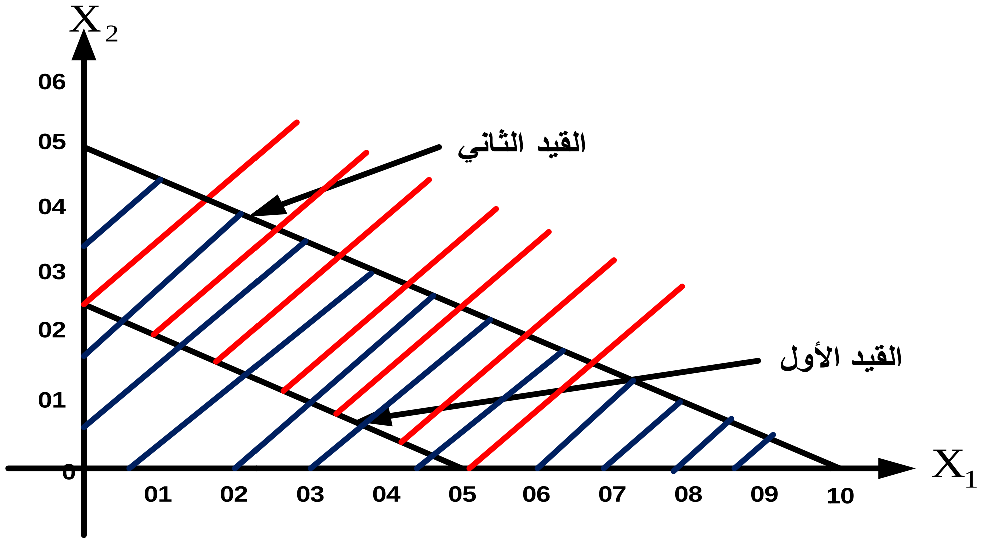
الحل:

نحول المتراجحتين إلى مساواة ونأخذ نقاط مساعدة لرسمهما كالتالي

$$05X_1 + 10X_2 = 25..............(01)$$

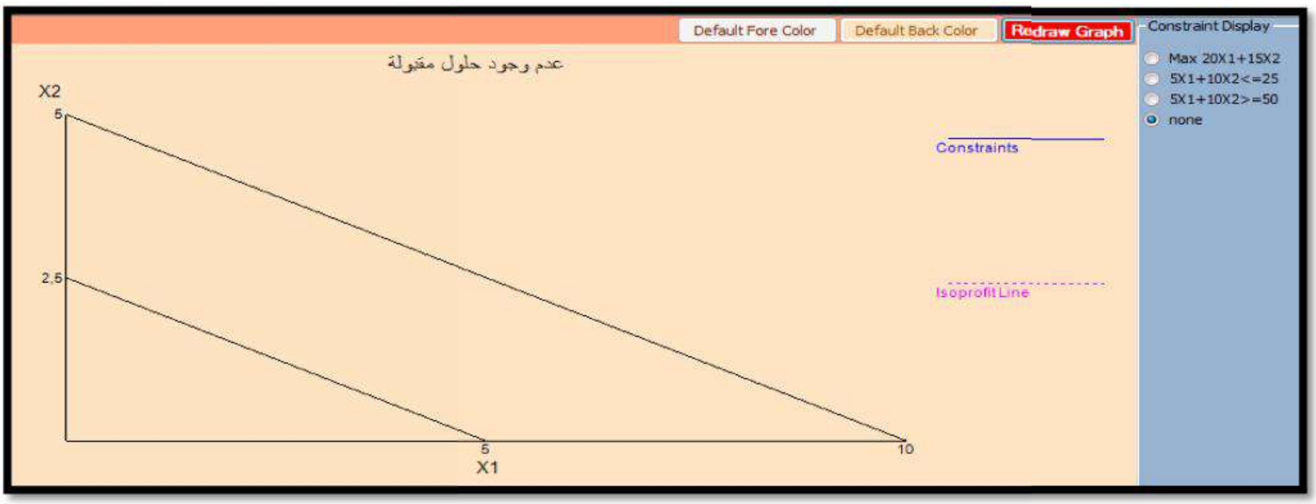
$$05X_1 + 10X_2 = 50..............(02)$$

X_1	0	05	X_1	0	10
X_2	02.50	0	X_2	05	0



يتضح من الشكل السابق أنه لا وجود لمنطقة الحلول الممكنة،أي لا يوجد تقاطع بين القيود

كما يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بإستخدام البرنامج QM for Windows



05-القيود غير الضرورية (القيد الزائد عن الحاجة): في مثل هذه الحالة فإن أحد القيود الذي يشكل المسألة يعتبر زائد عن الحاجة، أي أنه لا يساهم في تحديد منطقة الحل المثل، إذ أن المستقيم الممثل لمعادلة هذا القيد يكون بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة ولايؤثر بأي حال على الحلول.

مثال09: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX(Z) = 20X_1 + 30X_2$$

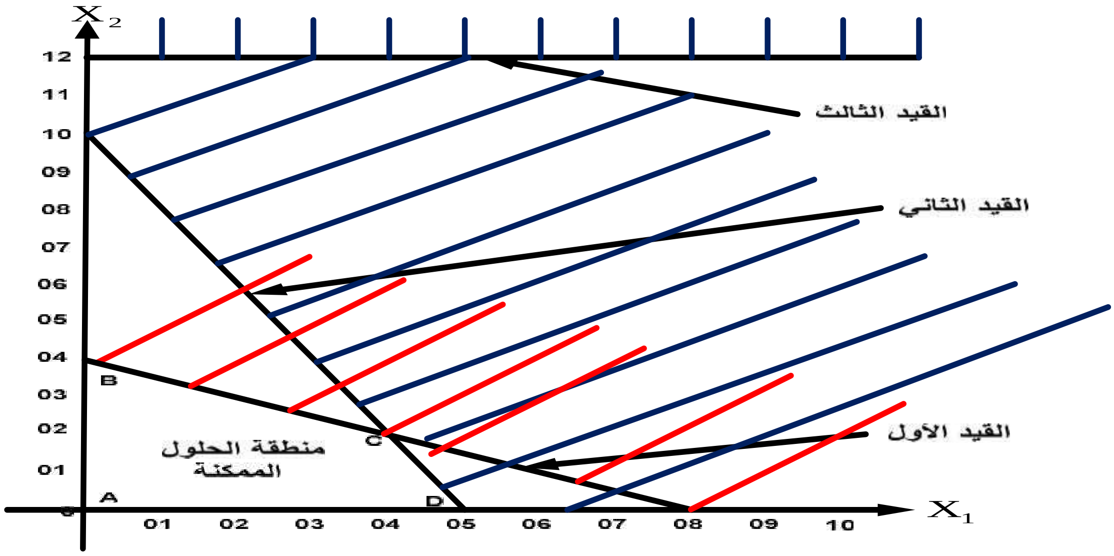
$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 06X_2 \le 24 \\ 02X_1 + X_2 \le 10 \\ \quad X_2 \le 12 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل:

نحول المتراجحتين إلى مساواة ونأخذ نقاط مساعدة لرسمهما كالتالي

$$03X_1 + 06X_2 = 24..............(01)$$
$$02X_1 + X_2 = 10..................(02)$$
$$X_2 = 12..................(03)$$

X_1	0	08	X_1	0	05
X_2	04	0	X_2	10	0



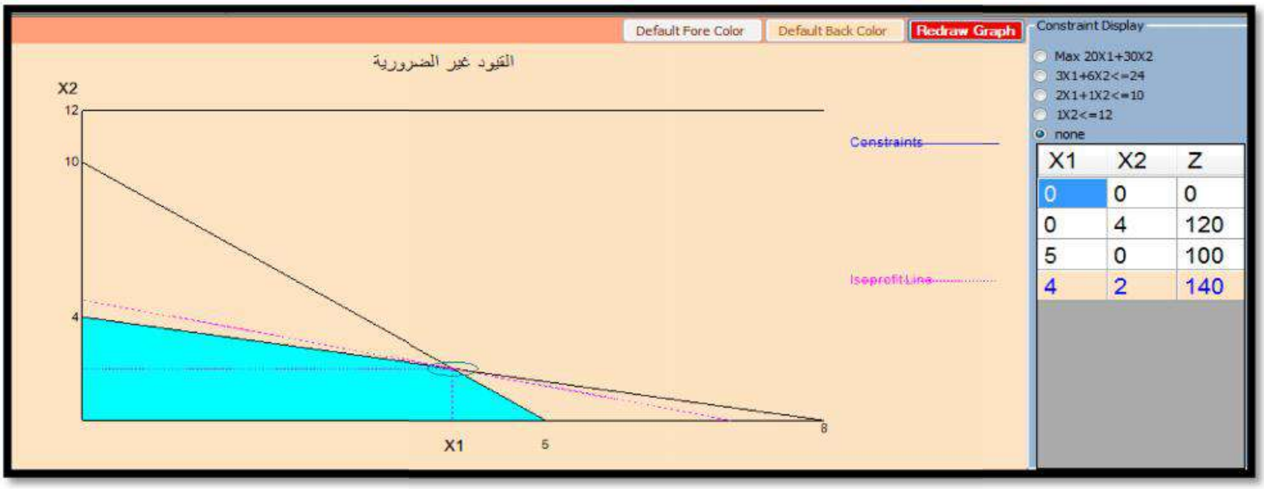
منطقة الحلول الممكنة ممثلة في مضلع الرؤوس(A,B,C,D)،نستخرج إحداثيتي النقاط المتطرفة ونقوم بتعويضها في دالة الهدف كالتالي

النقاط المتطرفة	إحداثيتي النقاط المتطرفة	دالة الهدف $MAX(Z) = 20X_1 + 30X_2$	$MAX(Z)$
A	(0,0)	0	140
B	(04,0)	120	
C	(02 ,04)	140	
D	(0 ,05)	100	

نلاحظ ان القيد الثالث هو قيد زائد عن الحاجة لوقوعه بعيدا عن منطقة الحلول الممكنة،أما الحل الأمثل فهو

$$X_1 = 4, X_2 = 02, Z^* = 140$$

كما يمكن التوصل إلى نفس النتيجة بإستخدام البرنامج QM for Windows



المحور الرابع: البرمجة الخطية

طريقة السمبلكس

(The Simplex Méthod)

المحور الرابع: البرمجة الخطية طريقة السمبلكس (The Simplex Méthod)

01-مقدمة: إن الحل البياني لنموذج البرمجة الخطية بالرغم من أنه يتميز بسهولة تطبيقه كما انه يفيد في فهم خصائص تركيب وحل نموذج البرمجة الخطية،إلا أنه لا يصلح إلا في حالة وجود متغيرين قراريين $\left(X_1, X_2\right)$ ويصعب إستخدام هذا الأسلوب البياني في حالة وجود ثلاثة متغيرات قرارية $\left(X_1, X_2, X_3\right)$،إذ يتطلب ذلك ثلاث أبعاد على الرسم البياني، ويستحيل إستخدامه إذا زاد عدد المتغيرات القرارية عن ثلاثة.

لذا تعتبر طريقة السمبلكس هي الطريقة العامة لحل معظم نماذج البرمجة الخطية، حيث تغلبت على قصور الطريقة البيانية،وذلك بإستخدامها في حل الأنواع المختلفة من نماذج البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرات متعددة، وتعتبر هذه الطريقة من أكثر الطرق إستخداما وشيوعا في حل مشاكل البرمجة الخطية، إذ تعتمد على خصائص المصفوفات الرياضية حيث يتم ترتيب المتغيرات وترتيب عواملها على هيئة مصفوفة رياضية تشتمل على دالة الهدف وهي تمثل رأس الجدول بينما يشمل جسم الجدول على مصفوفة رياضية مأخوذة من معادلات القيود في النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة.

إن البداية التاريخية لتطبيق هذه الطريقة تعود إلى الجهود المبذولة من قبل العالم الرياضيات البريطاني (جورج دانتزيغ)(George Dantzig) عام 1947،عندما تبين له عجز كل من الطريقة البيانية والطريقة الجبرية في معالجة مشاكل البرمجة الخطية عندما تحتوي على أكثر من متغيرين.

تبدأ هذه الطريقة بإيجاد حل مبدئي أساسي ممكن ثم التحرك إلى حل أساسي ممكن يكون أفضل من الحل السابق وذلك بإحلال أحد المتغيرات غير الأساسية محل المتغيرات الأساسية في الجدول الأول وهذا مايسمى بالمتغير الداخل، ويتم إختياره على أساس نسبه مساهمته في تحسين دالة الهدف، أما المتغير الذي سيتم مغادرته والذي حل محله أحد المتغيرات الأساسية فيسمى بالمتغير الخارج ويتم إختياره طبقا لقاعدة تضمن إمكانية الحصول على حل جديد، وعندما يتم الوصول إلى هذا الحل فإنه سيكون لدينا نقطة بداية جديدة لتكرار العملية السابقة نفسها لتحديد حل أساسي ممكن أفضل من ذلك الذي حصلنا عليه في المرحلة السابقة وتتوقف هذه العملية عندما نصل إلى أحد الحالات الآتية:

-الحصول على حل نهائي ويكون الحل الأمثل.

-تحديد عدد لا نهائي من الحلول.

-المشكلة ليس لها حل ممكن.

ولهذه الطريقة نوعان أساسيان من نماذج البرمجة الخطية على أساس طريقة الحل المستخدمة لكل منهما وهما:

النوع الأول: في هذا النموذج تكون جميع القيود الهيكلية على صورة أصغر من أو تساوي $(\leq)$،وجميع قيم الثوابت في نفس الوقت موجبة وطريقة السمبلكس التي تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى طريقة السمبلكس الأساسية.

النوع الثاني: في هذا النموذج تكون كل او بعض أو احد القيود على صورة أكبر او يساوي $(\geq)$ أو على صورة يساوي $(=)$، وطريقة السمبلكس التي تستخدم لحل هذا النوع من النماذج تسمى "طريقة السمبلكس المبدلة" وهي تستخدم طريقتين للحل هما:

-طريقة-م-الكبيرة (BIG-M)

-طريقة المرحلتين (Two Phase)

02-طريقة السمبلكس في حالة تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف (النموذج الأولي Primal)

يمكن إستخدام النموذج الأولي(primal) في حالة التعظيم والتقليل بشرط أن تكون إشارة المتراجحات أقل أو يساوي فقط$(\leq)$ ،اما إذا كانت القيود من الشكل أكبر أو تساوي $(\geq)$ أو تساوي $(=)$ أو أقل أو تساوي $(\leq)$ فإننا سوف نتبع طريقة أخرى في الحل سوف يتم شرحها لاحقا.

02-01 طريقة السمبلكس في حالة تعظيم الأرباح وإشارة المتراجحة أقل من او تساوي $(\leq)$

قبل البدئ بإستخدام طريقة السمبلكس لحل مشكلة التعظيم لابد من تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الشكل المعياري (القياسي) والذي يتناسب مع القواعد والإجراءات الجبرية المعينة لمشكلة البرمجة الخطية، فإ0ذا كانت لدينا الصيغة العامة لمشكلة التعظيم من الشكل التالي:

$$MAX(Z)=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+.................+C_nX_n$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.........+a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+.........+a_{2n}X_n \leq b_2 \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+.........+a_{3n}X_n \leq b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+a_{m3}X_3+...+a_{mn}X_n \leq b_m \\ X_1,X_2,X_3,.........,X_n \geq 0 \end{cases}$$

فإن الصيغة القياسية لها ستكون بالشكل التالي:

$$MAX(Z)=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3+.................+C_nX_n+0S_1+0S_2+0S_3+.........+0S_m$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3+.........+a_{1n}X_n+S_1=b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3+.........+a_{2n}X_n+S_2=b_2 \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3+.........+a_{3n}X_n+S_3=b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1+a_{m2}X_2+a_{m3}X_3+.........+a_{mn}X_n+S_m=b_m \\ X_1,X_2,X_3,.........,X_n \geq 0,\ S_1,S_2,S_3,.....,S_m \geq 0 \end{cases}$$

أما الصيغة الجدولية فهي كالتالي:

C_B	C_j	C_1	C_2	C_3	..	C_n	0	0	0	....	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
	BASIC	X_1	X_2	X_3	..	X_n	S_1	S_2	S_3	....	S_m		
0	S_1	a_{11}	a_{21}	a_{13}	..	a_{1n}	01	0	0	....	0	b_1	
0	S_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	..	a_{2n}	0	01	0	....	0	b_2	
0	S_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	..	a_{3n}	0	0	01	....	0	b_3	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	0	0	0	....	0	⋮	
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	⋮	a_{mn}	0	0	0	....	01	b_m	
$Z_j\text{-}C_j$		$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	…	$-C_n$	0	0	0	0	0	Z=0	

ملاحظات حول الجدول السابق

C_B: هي معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف (لأية مرحلة من مراحل جدول السمبلكس)

C_j: هي معاملات المتغيرات كافة (الأساسية وغير الأساسية) لدالة الهدف.

BASIC: ويسمى بعمود القاعدة، ويعني المتغيرات الأساسية لذلك الجدول من جداول السمبلكس(أي لكل مرحلة من مراحل السمبلكس،أي لكل جدول سمبلكس له متغيراته الأساسية الخاصة به).

$Z_j\text{-}C_j$: يسمى بسطر التقييم وهو حاصل طرح معاملات المتغيرات كافة في دالة الهدف من حاصل ضرب معاملات المتغيرات الأساسية لذلك الجدول في حاصل ضرب أعمدة الجدول (المعاملات الفنية) بحيث:

$$Z_i = \sum_{i=1}^{m} \left(C_B \times a_{ij} \right)$$

a_{ij}: تسمى بالمعاملات الفنية.

b_i: هو عمود الكميات المتاحة أو شعاع الثوابت.

قيمة دالة الهدف (Z) تحسب وفق العلاقة التالية: $Z = \sum_{i=1}^{m} C_B \times b_i$

بما أن الصيغة القياسية تتحقق فقط بإضافة المتغيرات الوهمية في الجانب الأيسر للقيود الهيكلية وبمعاملات صفر في دالة الهدف وبالتالي يمكن إعطاء تعريف لها كمايلي:

-**تعريف المتغيرات الوهمية (Slack Variables)**:هي متغيرات تضاف إلى نموذج البرمجة الخطية لتحقيق شروط الصيغة القياسية (القيود على هيئة معادلات)،أي أساسا لا علاقة بين طرفي المعادلة وفي حالة إستغلال

الجانب الأيمن (المصدر) إستغلالا كاملا من قبل المتغيرات الأساسية $(X_1, X_2, X_3, ..., X_n)$ في الجانب الأيسر،ظهرت قيم المتغيرات الوهمية (S_i) في الحل الأمثل عبارة عن أصفار،أما إذا كان المصدر غير مستغل إستغلالا كاملا فهنا يظهر دور المتغير الوهمي وبقيم موجبة في الحل الأمثل، للدلالة على أن المصدر في الجانب الأيسر لم يستغل بالكامل، وتكون تكاليف وأرباح المتغيرات الوهمية (S_i) صفر دائما،أي أن معامل المتغيرات الوهمية (S_i) في دالة الهدف صفر، وأن إضافة (Si) ليس لها تأثير في دالة الهدف.

02-02 خطوات الحل بإستخدام طريقة السمبلكس:

1-تحويل القيود ودالة الهدف إلى الصيغة القياسية.

2-تحويل الصيغة القياسية إلى هيئة جدول وتسمى عندها بالصيغة الجدولية.

3-تعيين الحل الأساسي الإبتدائي.

4-إختيار المتغير ذي القيمة الصغرى في سطر التقييم أو القيمة الكبرى بالقيمة المطلقة في حالة تعظيم الأرباح،إذ يطلق على العمود الذي يقابل تلك القيمة **بالمتغير الداخل** (عمود الإرتكاز).

5-قسمة ثوابت الطرف الأيمن (الكميات المتاحة أو شعاع الثوابت) على المعاملات الفنية الموجبة فقط للمتغير الداخل وذلك لإستخراج النسبة ثم إختيار أقلها وفق العلاقة التالية $\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}},\ a_{ij} > 0\ ,\ b_i > 0\right\}$ ، وتشير هذه النسبة المختارة إلى المتغير الأساسي المقابل لها وهو المتغير الخارج (سطر الإرتكاز)

6-تعيين نقطة الإرتكاز وهو العنصر المشترك بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج.

7-تنظيم جدول جديد يدرج فيه المتغيرات الأساسية الجديدة، أي إستبدال المتغير الداخل محل المتغير الخارج في عمود القاعدة (BASIC).

8-قسمة سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز،أما عمود المتغير الداخل فيأخذ صفرا.

9-بقية القيم الموجودة في الجدول يتم إستخراجها وفقا للمعادلة التالية بما ذلك قيم عمود الكميات (b_i) كالتالي:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{\text{المقابل في العمود الداخل} \times \text{المقابل في الصف الخارج}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

$$= \text{العنصر القديم} - \frac{\text{جداء النقطتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$$

10-يتم تكرار الخطوات (4-5-6-7-8-9) إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل والذي يتميز بوجود جميع القيم فيه موجبة أو معدومة وذلك في سطر التقييم.

ملاحظة: يوجد من يأخذ الحل الأمثل في حالة التعظيم هو أن تكون جميع قيم سطر التقييم معدومة أو سالبة

مثال01:ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX(Z)=05X_1+02X_2+10X_3+X_4$$

$$S/C=\begin{cases}02X_1+X_2+04X_3+07X_4\le 1000\\ 05X_2+02X_3+07X_4\le 200\\ 04X_1+03X_2+06X_3+13X_4\le 2000\\ X_1,X_2,X_3,X_4\ge 0\end{cases}$$

المطلوب:أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة السمبلكس؟

الحل:

1–تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى النموذج القياسي

$$MAX(Z)=05X_1+02X_2+10X_3+X_4+0S_1+0S_2+0S_3$$

$$S/C=\begin{cases}02X_1+X_2+04X_3+07X_4+S_1=1000\\ 05X_2+02X_3+07X_4+S_2=200\\ 04X_1+03X_2+06X_3+13X_4+S_3=2000\\ X_1,X_2,X_3,X_4\ge 0\ ;\ S_1,S_2,S_3\ge 0\end{cases}$$

2–نشكل جدول الحل الإبتدائي(الجدول الأول)

C_B	C_j / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	02	01	04	07	01	0	0	1000	250
0	S_2	0	05	02	07	0	01	0	200	100
0	S_3	04	03	06	13	0	0	01	2000	333.33
Z_j-C_j		-05	-02	-10	-01	0	0	0	Z=0	

من خلال سطر التقييم نقوم بإستخراج المتغير الداخل إلى القاعدة والذي يقابل أقل قيمة سالبة أو أكبر قيمة بالقيمة المطلقة، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_3(عمود الإرتكاز).

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) نقوم بقسمة عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ أقل قيمة موجبة، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ أن أقل قيمة موجبة توافق المتغير S_2 وأن نقطة الإرتكاز هي القيمة 02

إذن X_3 يدخل إلى قاعدة الحل و S_2 يخرج من قاعدة الحل، ونعيد جدول سمبلكس آخر كمايلي:

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1			0		01		0		
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	
0	S_3			0		0		01		
Z_j-C_j				0	-01	0		0	Z=	

في أول خطوة نقوم بتقسم سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز في أن العمود يأخذ أصفارا، مع ملاحظة أن المتغيرات في عمود القاعدة تكون قيمها دائما صفر في سطر التقييم.

ماتبقى من القيم (المعاملات الفنية) يتم حسابها وفق العلاقة السابقة الذكر وهي:

العنصر الجديد= العنصر القديم- (المقابل في العمود الداخل×المقابل في الصف الخارج) / (نقطة الإرتكاز)

= العنصر القديم- (جداء النقطتين المتقابلتين) / (نقطة الإرتكاز)

على سبيل المثال نأخذ القيمة 02 في الجدول السابق وهي نقطة تلاقي X_1 و S_1 ونحسب القيمة الجديدة لها في الجدول الثاني كمايلي:

العنصر الجديد= $02 - \frac{0\times 04}{02} = 02$

وبنفس الطريقة نكمل جميع القيم فنتحصل على الجدول السمبلكس الثاني التالي:

C_B	C_j / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	02	-09	0	-07	01	-02	0	600	300
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100	∞
0	S_3	04	-12	0	-08	0	-03	01	1400	350
Z_j-C_j		-05	23	0	34	0	05	0	Z=1000	

أما قيمة الدالة الإقتصادية أو دالة الهدف فتحسب وفق العلاقة التالية:

$$Z=\sum_{i=1}^{m} C_B\times b_i \Rightarrow Z=\sum_{i=1}^{03}(C_B\times b_i)\Rightarrow Z=0\times 600+10\times 100+0\times 1400=1000$$

نلاحظ من خلال الجدول السابق أن قيم سطر التقييم لاتزال بها قيم سالبة وبالتالي لم نتوصل بعد إلى الحل المثل ونعيد نفس الخطوات السابق شرحها.

من خلال الجدول نلاحظ ان القيمة السالبة الوحيدة تقابل المتغير الداخل هو X_1 (عمود الإرتكاز).

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) نقوم بقسمة قيم عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ أقل قيمة موجبة، ومن خلال نفس الجدول السابق نلاحظ ان أقل قيمة موجبة توافق المتغير S_1 وأن نقطة الإرتكاز هي 02 إذن

X_1 يدخل إلى قاعدة الحل و S_1 يخرج من قاعدة الحل.

C_B	C_j / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
05	X_1	01	-9/2	0	-7/2	1/2	-01	0	**300**	
10	X_3	0		01				0		
0	S_3	0		0				01		
Z_j-C_j		**0**		**0**				**0**	Z=	

أول خطوة نقوم بتقسيم سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز في حين يأخذ العمود أصفارا مع ملاحظة أن متغيرات القاعدة الأخرى تأخذ هي الأخرى أصفارا في سطر التقييم.

أما باقي المعاملات الفنية تحسب وفق العلاقة السابقة الذكر فنتحصل على جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	05	02	10	01	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	
05	X_1	01	-9/2	0	-7/2	1/2	-01	0	**300**
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	**100**
0	S_3	0	0	0	06	-02	01	01	**200**
Z_j-C_j		**0**	**1/2**	**0**	**33/2**	**5/2**	**0**	**0**	**Z=2500**

نلاحظ من خلال الجدول الثالث أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية: $X_1 = 300, X_3 = 100, S_3 = 200$

المتغيرات غير الأساسية: $X_2 = X_4 = 0, S_1 = S_2 = 0$

أسعار الظل: $S_1 = \frac{05}{02}$

02-03 طريقة السمبلكس في حالة تقليل الأرباح وإشارة المتراجحة أقل أو يساوي $(\leq)$

إذا كنا نبحث في مشكلة خفض التكاليف وكانت القيود الهيكلية تأخذ إشارة المتراجحة من النوع أقل أو يساوي $(\leq)$،أي نسعى لإيجاد أصغر قيمة لتابع الهدف، فإننا نعالج هذه المسألة بشكل مشابه لمسألة البحث عن أعظم

قيمة لتابع الهدف، والفرق الوحيد بينهما متعلق في دالة الهدف ذلك أن هدفنا هو تخفيض التكاليف،لذا فإن المتغير الداخل سيكون المتغير الذي يرافقه أكبر عنصر موجب لأن هذا المتغير سيئدي إلى تخفيض التكاليف أكثر من أي متغير آخر، ونتوصل ايضا إلى الحل الأمثل لمسالة تخفيض التكاليف عندما نجد أن العناصر في سطر التقييم كلها معدومة أو سالبة.

مثال02: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MIN(W) = X_1 - 03X_2 - 02X_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 - X_2 + 02X_3 \leq 07 \\ -02X_1 + 04X_2 \leq 12 \\ -04X_1 + 03X_2 + 08X_3 \leq 10 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة السمبلكس؟

الحل:

1-تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى النموذج القياسي

$$MIN(W) = X_1 - 03X_2 - 02X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 - X_2 + 02X_3 + S_1 = 07 \\ -02X_1 + 04X_2 + S_2 = 12 \\ -04X_1 + 03X_2 + 08X_3 + S_3 = 10 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \ ; \ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

2-نشكل جدول الحل الإبتدائي(الجدول الأول)

C_B	C_j / BASIC	01	-03	-02	0	0	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	03	-01	02	01	0	0	07	-07
0	S_2	-02	04	0	0	01	0	12	03
0	S_3	-04	03	08	0	0	01	10	03.33
Z_j-C_j		-01	03	02	0	0	0	Z=0	

من خلال سطر التقييم نقوم بإستخراج المتغير الداخل إلى القاعدة والذي يقابل أكبر قيمة موجبة ، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_2(عمود الإرتكاز).

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) نقوم بقسمة عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ أقل قيمة موجبة، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ أن أقل قيمة موجبة توافق المتغير S_2 وأن نقطة الإرتكاز هي القيمة 04

إذن X_2 يدخل إلى قاعدة الحل و S_2 يخرج من قاعدة الحل، ونعيد جدول سمبلكس آخر كمايلي:

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	01	-03	-02	0	0	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	5/2	0	02	01	1/4	0	10	05
-03	X_2	-1/2	01	0	0	1/4	0	03	∞
0	S_3	-5/2	0	08	0	-3/4	01	01	0.128
Z_j-C_j		1/2	0	02	0	-3/4	0	Z=-09	

نلاحظ أننا لم نتوصل بعد إلى الحل الأمثل لوجود قيم موجبة في سطر التقييم

المتغير الداخل هو X_3 (عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج هو S_3 (سطر الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي 08

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	01	-03	-02	0	0	0	b_i R.H.S	خارج القسمة RATIO
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	25/8	0	0	01	7/16	-2/8	78/8	03.12
-03	X_2	-1/2	01	0	0	1/4	0	03	-06
-02	X_3	-5/16	0	01	0	-3/32	1/8	1/8	-2/5
Z_j-C_j		18/16	0	0	0	-9/16	-2/8	Z=-74/8	

نلاحظ أن المتغير X_1 هو الوحيد الذي به قيمة موجبة وبالتالي فهو المتغير الداخل (عمود الإرتكاز) في حين أن المتغير الخارج هو S_1(سطر الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي 25/8

جدول السمبلكس الرابع

C_B	C_j / BASIC	01	-03	-02	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
01	X_1	01	0	0	8/25	7/50	-2/25	78/25
-03	X_2	0	01	0	8/50	8/25	-1/25	114/25
-02	X_3	0	0	01	1/10	-1/20	1/10	88/80
Z_j-C_j		0	0	0	-9/25	-18/25	-3/50	Z=-319/25

نلاحظ ان جميع القيم في سطر التقييم معدومة او سالبة وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل

المتغيرات الأساسية: $X_1=\frac{78}{25}, X_2=\frac{114}{25}, X_3=\frac{88}{80}$

المتغيرات غير الأساسية: $S_1=S_2=S_3=0$

أسعار الظل: $S_1=\frac{09}{25}, S_2=\frac{18}{25}, S_3=\frac{03}{50}$

03-طريقة السمبلكس في حالة تقليل التكاليف(النموذج الأولي Primal)

تطرقنا في الحالة السابقة (حالة تعظيم الأرباح او تقليل التكايف)،أنه يمكن الحصول على حل أولي ممكن تكون فيه المتغيرات الوهمية هي المتغيرات الأساسية اما المتغيرات الحقيقية فتكون مساوية للصفر، هذه البداية ممكنة فقط إذا كانت جميع القيود الهيكلية بشكل المتراجحة من النوع أقل أو يساوي فقط $(\leq)$، أما إذا كانت المتراجحة من الشكل $(\geq)$ أو في شكل مساواة $(=)$ لايمكن إعتبار المتغيرات الوهمية متغيرات أساسية في الحل الأولي (لا يمكنها أن تعطي حلال أوليا ممكنا)، وبالتالي لابد من إضافة نوع آخر من المتغيرات يسمى بالمتغيرات الإصطناعية والذي سوف نرمز له بالرمز (A)

-تعريف المتغيرات الإصطناعية (A):هي متغيرات تساعدنا في الحل فقط وليس لها معنى إقتصادي أي لا يمكن أن تظهر في الحل تماما،مادامت لا يجب أن تظهر في الحل إذن يجب تحميلها بغرامة كبيرة جدا في الحل تدعى(M) تعمل تماما عكس دالة الهدف.

فبإستخدام طريق (BIG-M)تأخذ المتغيرات الإصطناعية(M) في دالة الهدف الحالتين التاليتين:

فإذا كانت المسألة تعظيم MAX فإنها تأخذ الأشارة السالبة (M-)

أما إذا كانت المسألة تدنية MIN فإنها تاخذ الإشارة الموجبة (M+)

أما بإستخداط طريقة المرحلتين فتأخذ المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف الحالتين التاليتين:

فإذا كانت المسألة تعظيم MAX فإنها تأخذ المعامل (01-)

أما إذا كانت المسألة تدنية MIN فإنها تاخذ المعامل (01+)

03-01 طريقة السمبلكس في حالة تقليل التكاليف وإشارة المتراجحة أقل أو يساوي $(\geq)$

إذا كانت لدينا الصيغة العامة لمشكلة تقليل التكاليف من الشكل التالي:

$$MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \dots\dots\dots\dots\dots + C_nX_n$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + \dots\dots\dots + a_{3n}X_n \geq b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \dots + a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

في هذه الحالة يتم طرح المتغيرات الفائضة (الراكدة) للحصول على التساوي بين الطرفين وعليه يتم تحويل المشكلة إلى الصيغة التالية:

$$MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + ... + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + ... + 0S_m$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n - S_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n - S_2 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3n}X_n - S_3 = b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n - S_m = b_m \\ X_1, X_2, X_3, ..., X_n \geq 0;\ S_1, S_2, S_3....., S_m \geq 0 \end{cases}$$

وبما أن الحل الإبتدائي الأساسي يبدأ من خلال وضع قيم كل متغيرات القرار مساويا إلى الصفر وعليه فإن الموارد تأخذ قيم المتغيرات الفائضة لنحصل على الصيغة التالية:

$$S/C = \begin{cases} -S_1 = b_1 \\ -S_2 = b_2 \\ -S_3 = b_3 \\ \quad . \\ \quad . \\ -S_m = b_m \end{cases}$$

نلاحظ أن هذه العلاقة تعارض شرط عدم السلبية، وعليه لايوجد حل متاح وبموجيه يتطلب إجراء تعديلات لغرض التحول إلى الحل المتاح وهذا ما يمكن إجراؤه من خلال إضافة المتغيرات الإصطناعية لكل معادلة ولتكن هذه المتغيرات الإصطناعية $\left(A_1, A_2, A_3, ..., A_m\right)$ ل (m) من المعادلات وبناءا على ذلك يمكن التعبير عن القيود كالتالي:

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1n}X_n - S_1 + A_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2n}X_n - S_2 + A_2 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ... + a_{3n}X_n - S_3 + A_3 = b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ... + a_{mn}X_n - S_m + A_m = b_m \end{cases}$$

وبما أن الحل الإبتدائي الأساسي يبدأمن خلال وضع قيم كل متغيرات القرار والمتغيرات الفائضة مساوية إلى الصفر وعليه فإن الموارد تأخذ قيم المتغيرات الإصطناعية لنحصل على الصيغة التالية:

$$
S/C=\begin{cases} A_1 = b_1 \\ A_2 = b_2 \\ A_3 = b_3 \\ . \\ . \\ . \\ A_m = b_m \end{cases}
$$

قيم شعاع الثوابت (الكميات المتاحة) موجبة وبالتالي يتوافق مع شرط عدم السلبية ومنه يوجد حل ممكن.

وتكون الصيغة القياسية لنموذج في شكلها النهائي كالتالي:

$$
MIN(W) = C_1X_1 + C_2X_2 + ...+ C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + ...+ 0S_m + MA_1 + MA_2 + MA_3 + ...+ MA_m
$$

$$
S/C=\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ...+ a_{1n}X_n - S_1 + A_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ...+ a_{2n}X_n - S_2 + A_2 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + ...+ a_{3n}X_n - S_3 + A_3 = b_3 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + ...+ a_{mn}X_n - S_m + A_m = b_m \\ X_1, X_2, X_3, ..., X_n \geq 0;\ S_1, S_2, S_3 ....., S_m \geq 0; A_1, A_2, A_3, ..., A_m \geq 0 \end{cases}
$$

03-02 طرق الحل في حالة تقليل التكاليف

في مشاكل التعظيم كانت القيود من الشكل أصغر أو يساوي(≤) ويتم تحويلها إلى الصيغة القياسية بإضافة المتغيرات الفائضة، أما إذا كانت قيود المشكلة على شكل أكبر أو يساوي (≥) فلا بد من طرح المتغيرات الفائضة منها لتحويلها إلى النموذج القياسي، وهنا نواجه مشكلة تعذر الحصول على حل إبتدائي ممكن لأن المتغيرات الفائضة تحمل إشارة سالبة وهذا يتعارض مع شرط عدم السلبية، مما يتطلب إضافة متغيرات أخرى موجبة يطلق عليها بالمتغيرات الإصطناعية لتكون بمثابة المتغير الأساسي للتوصل إلى حل ممكن، أما القيود التي تحتوي على علامة مساواة (=) فيتم إضافة متغير إصطناعي اليها فقط تمهيدا لتوفير المتغيرات الأساسية التي تستند عليها مصفوفة الوحدة ومن ثم التوصل إلى حل النموذج.

نستطيع التوصل إلى حل المشكلة المتضمنة المتغيرات الإصطناعية من خلال إستبعاد هذه المتغيرات من النموذج، ومن ثم الإستمرار في خطوات الحل للتوصل إلى الحل الأمثل ويمكن تطبيق طريقتان لحل النموذج الذي يحتوي على المتغيرات الإصطناعية وهما:

-طريقة M الكبيرة (طريقة الغرامة) (BIG-M-Technique)

-طريقة المرحلتين (Two Phase)

01-02-03 طريقة M الكبيرة (طريقة الغرامة) (BIG-M-Technique)

تعتمد هذه الطريقة على إضافة (M) إلى المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف إذ تمثل (M) قيمة كبيرة جدا، وتحمل بإشارة سالبة في حالة التعظيم وبإشارة موجبة في حالة التقليل وتساعد إضافة (M) إلى دالة الهدف في إخراج المتغيرات الإصطناعية من الحل الأمثل.

-خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس

1-تحويل القيود ودالة الهدف إلى الصيغة القياسية.

2-تحويل الصيغة القياسية إلى هيئة جدول وتسمى عندها بالصيغة الجدولية.

3-تعيين الحل الأساسي الإبتدائي.

4-إختيار المتغير ذي القيمة الكبرى للمعامل (M) في سطر التقييم ،إذ يطلق على العمود الذي يقابل تلك القيمة **بالمتغير الداخل** (عمود الإرتكاز).

5-قسمة ثوابت الطرف الأيمن (الكميات المتاحة أو شعاع الثوابت) على المعاملات الفنية الموجبة فقط للمتغير الداخل وذلك لإستخراج النسبة ثم إختيار أقلها وفق العلاقة التالية $\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}},\ a_{ij} > 0\ ,\ b_i > 0\right\}$ ، وتشير هذه النسبة المختارة إلى المتغير الأساسي المقابل لها وهو المتغير الخارج (سطر الإرتكاز)

6-تعيين نقطة الإرتكاز وهو العنصر المشترك بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج.

7-تنظيم جدول جديد يدرج فيه المتغيرات الأساسية الجديدة، أي إستبدال المتغير الداخل محل المتغير الخارج في عمود القاعدة (BASIC).

8-قسمة سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز،أما عمود المتغير الداخل فيأخذ صفرا.

9-بقية القيم الموجودة في الجدول يتم إستخراجها وفقا للمعادلة التالية بما ذلك قيم عمود الكميات (b_i) كالتالي:

العنصر الجديد= العنصر القديم- $\dfrac{\text{المقابل في العمود الداخل}\times\text{المقابل في الصف الخارج}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$

= العنصر القديم- $\dfrac{\text{جداء النقطتين المتقابلتين}}{\text{نقطة الإرتكاز}}$

10-يتم تكرار الخطوات (4-5-6-7-8-9) إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل والذي يتميز بوجود جميع القيم فيه موجبة أو معدومة وذلك في سطر التقييم.

ملاحظة: يوجد من يأخذ الحل الأمثل في حالة التقليل هو أن تكون جميع قيم سطر التقييم معدومة أو موجبة.

مثال03: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MIN(W) = 2400X_1 + 1000X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 \geq 20 \\ 06X_1 + X_2 \quad \geq 30 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة Mالكبيرة (BIG−M)

الحل:

01–تحويل الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية كمايلي:

$$\text{MIN}(W) = 2400X_1 + 1000X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 - S_1 + A_1 = 20 \\ 06X_1 + X_2 + S_2 + A_2 = 30 \\ X_1, X_2 \geq 0; S_1, S_2 \geq 0; A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

02–تشكيل جدول الحل الإبتدائي (الحل الأولي الممكن)

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i R.H.S	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	03	02	-01	0	01	0	20	6.66
M	A_2	06	01	0	-01	0	01	30	05
W_j-C_j		09 M-2400	03 M-1000	- M	- M	0	0	W=50 M	

من خلال سطر التقييم نقوم بإستخراج المتغير الداخل إلى القاعدة والذي يقابل أكبر قيمة موجبة للمعامل M،ومن خلال جدول الحل الإبتدائي نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_1 (عمود الإرتكاز).

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) نقوم بقسمة عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ أقل قيمة موجبة فقط،أما إن كانت قيمة سالبة فيتم إهمالها، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ أن أقل قيمو موجبة توافق المتغير A_2، وان نقطة الإرتكاز هي القيمة 06 إذن X_1 يدخل إلى القاعدة وA_2 يخرج من القاعدة ونعيد تشكيل جدول آخر للسمبلكس كمايلي:

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i R.H.S	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	0				01			
2400	X_1	01	1/6	0	−1/6	0	1/6	05	
W_j-C_j		0				0		W=	

في أول خطوة نقوم بتقسم سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز أما العمود فياخذ صفرا.

ماتبقى من القيم (الخانات الفارغة)(المعاملات الفنية) يتم حسابها تبعا للعلاقة التالية:

العنصر الجديد= العنصر القديم- (المقابل في العمود الداخل×المقابل في الصف الخارج) / (نقطة الإرتكاز)

= العنصر القديم- (جداء النقطتين المتقابلتين) / (نقطة الإرتكاز)

فنتحصل على جدول السمبلكس الثاني:

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i R.H.S	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
M	A_1	0	3/2	-01	1/2	01	-1/2	05	10/3
2400	X_1	01	1/6	0	-1/6	0	1/6	05	30
W_j-C_j		0	3/2 M-600	- M	M/2-400	0	-3/2 M+400	W=50 M+12000	

قيمة الدالة الإقتصادية فيتم حسابها كمايلي:

$$W=\sum_{i=1}^{m} C_B \times b_i \Rightarrow W=\sum_{i=1}^{02}\left(C_B \times b_i\right) \Rightarrow W = M \times 05 + 05 \times 2400 = 05M + 12000$$

نلاحظ من خلال الجدول الثاني أن قيم سطر التقييم لا تزال بها قيم موجبة وبالتالي لم نتوصل بعد إلى الحل الأمثل ونعيد نفس الخطوات السابق شرحها.

من خلال الجدول الثاني نلاحظ أن أكبر قيمة موجبة للمعامل M تقابل المتغير الداخلX_2 (عمود الإرتكاز).

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) نقوم بقسمة قيم عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ أقل قيمة موجبة فقط، ومن خلال الجدول السابق فإن أقل قيمو موجبة توافق المتغير A_1،وأن نقطة الإرتكاز هي 3/2 إذن

X_2 يدخل إلى القاعدة وA_1 يخرج من القاعدة كما يوضحه الجدول التالي:

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i R.H.S	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2		
1000	X_2	0	01	−2/3	1/3	2/3	−1/3	10/3	
2400	X_1	01	0						
W_j-C_j		0	0					W=	

أول خطوة تتمثل في قسمة سطر الإرتكاز على نقطة الإرتكاز في حين العمود يأخذ أصفارا.

باقي المعاملات (الخانات الفارغة) تحسب حسب الطريقة السابق شرحها.

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	M	M	b_i R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	
1000	X_2	0	01	−2/3	1/3	2/3	−1/3	10/3
2400	X_1	01	0	1/9	−2/9	−1/9	2/9	40/9
W_j-C_j		0	0	−400	−200	400−9 M	200−3 M	W=14000

نلاحظ من خلال الجدول الثالث أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة وبالتالي فقد توصلنا إلى الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية: $X_1 = \frac{40}{09}, X_2 = \frac{10}{03}$

المتغيرات غير الأساسية: $S_1 = S_2 = 0$

أسعار الظل: $S_1 = 400, S_2 = 200$

مثال04: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

$$MAX(Z) = 03X_1 + X_2 - X_3$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ 02X_1 - X_2 \geq 02 \\ X_1 - 02X_2 + X_3 \geq 06 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة Mالكبيرة (BIG−M)

الحل:

01−تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية

$$MAX(Z) = 03X_1 + X_2 - X_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2 - MA_3$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + A_1 = 10 \\ 02X_1 - X_2 - S_1 + A_2 = 02 \\ X_1 - 02X_2 + X_3 - S_2 + A_3 = 06 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0; S_1 \geq 0; A_1, A_2, A_3 \geq 0 \end{cases}$$

02−تشكيل جدول الحل الإبتدائي (الحل الأولي الممكن)

C_B	C_j	03	01	−01	0	0	-M	-M	-M	b_i	خارج
	BASIC	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	R.H.S	القسمة
-M	A_1	01	01	01	0	0	01	0	0	**10**	10
-M	A_2	02	−01	0	−01	0	0	01	0	**02**	01
-M	A_3	01	−02	01	0	−01	0	0	01	**06**	06
Z_j-C_j		−4M−3	2M -1	−2M+1	M	M	0	0	0	Z=-18M	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_1(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو A_2 ونقطة الإرتكازهي 02

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	03 X_1	01 X_2	−01 X_3	0 S_1	0 S_2	-M A_1	-M A_2	-M A_3	b_i R.H.S	خارج القسمة
-M	A_1	0	3/2	01	1/2	0	01	−1/2	0	**09**	09
03	X_1	01	−1/2	0	−1/2	0	0	1/2	0	**01**	∞
-M	A_3	0	−3/2	01	1/2	−01	0	−1/2	01	**05**	05
Z_j-C_j		0	−5/2	-2M+1	-M-3/2	M	0	3/2	0	Z=-14M+3	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_3(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو A_3 ونقطة الإرتكازهي 01

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	03 X_1	01 X_2	−01 X_3	0 S_1	0 S_2	-M A_1	-M A_2	-M A_3	b_i R.H.S	خارج القسمة
-M	A_1	0	03	0	0	01	01	0	−01	**04**	4/3
03	X_1	01	−1/2	0	−1/2	0	0	1/2	0	**01**	-02
-01	X_3	0	−3/2	01	1/2	−01	0	−1/2	01	**05**	-10/3
Z_j-C_j		0	-3M-1	0	-02	-M+1	0	02	2M-1	Z=-04M-2	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_2(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو A_1 ونقطة الإرتكازهي 03

جدول السمبلكس الرابع

C_B	C_j / BASIC	03 X_1	01 X_2	−01 X_3	0 S_1	0 S_2	-M A_1	-M A_2	-M A_3	b_i R.H.S	خارج القسمة
01	X_2	0	01	0	0	1/3	1/3	0	−1/3	**4/3**	∞
03	X_1	01	0	0	−1/2	1/6	1/6	1/2	−1/6	**5/3**	-10/3
-01	X_3	0	0	01	1/2	−1/2	1/2	−1/2	1/2	**07**	14
Z_j-C_j		0	0	0	-02	4/3	1/3+ M	M+2	M-4/3	Z=-2/3	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو S_1(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو X_3 ونقطة الإرتكازهي 1/2

جدول السمبلكس الخامس

C_B	C_j / BASIC	03	01	−01	0	0	-M	-M	-M	b_i	خارج
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	R.H.S	القسمة
01	X_2	0	01	0	0	1/3	1/3	0	−1/3	4/3	04
03	X_1	01	0	01	0	−1/3	2/3	0	1/3	26/3	-57/2
0	S_1	0	0	02	01	−01	01	−01	01	07	−07
Z_j-C_j		0	0	04	0	−2/3	5/3+ M	M	2/3+ M	Z=-2/3	

المتغير الداخل إلى القاعدة هوS_2(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هوX_2 ونقطة الإرتكازهي 1/3

جدول السمبلكس السادس

C_B	C_j / BASIC	03	01	−01	0	0	-M	-M	-M	b_i
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	R.H.S
0	S_2	0	03	0	0	01	01	0	−01	04
03	X_1	01	01	01	0	0	01	0	0	10
0	S_1	0	03	02	01	0	02	−01	0	11
Z_j-C_j		0	02	04	0	0	3+ M	M	−01	Z=30

نلاحظ أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي فقد توصلنا إلى الحل الأمثل

المتغيرات الأساسية: $S_2 = 04, S_1 = 11, X_1 = 10$

المتغيرات غير الأساسية: $X_2 = X_3 = 0$

03-02-02 طريقة المرحلتين (TOW PHASE):

إن هذه الطريقة تختلف عن طريقة M الكبيرة (BIG−M) حيث أنها لا تستخدم المتغير M إذ أن القيمة المفترضة لـM كرقم كبير جدا قد يجعل الحل يتضمن بعض الصعوبة وقد طور العالمان دانتزيغ وجوردن (Dantzig et Gorden) طريقة المرحلتين والتي تعتمد في إيجاد الحل الأمثل على مرحلتين،وتتلخص خطوات طريقة السمبلكس ذات المرحلتين فيمايلي:

المرحلة الأولى:

01−يتم إضافة المتغيرات الإصطناعية (A_i) إلى قيود نموذج البرمجة الخطية.

02−في المرحلة الأولى للحل (Phase I) وفيها نستخدم دالة هدف جديدة وهمية من نوع (MIN) بغض النظر عن دالة الهدف الأصلية، تحتوي هذه الأخيرة على مجموع المتغيرات الإصطناعية فقط بمعامل (01) بدلا من (M)،أو بمعامل (−01) في حالة دالة الهدف من نوع (MAX)،أما بقية المتغيرات فتكون بمعامل (0)،والهدف من هذه المرحلة هو التخلص من المتغيرات الإصطناعية التي تم إضافتها إلى القيود ودالة الهدف قبل الإنتقال إلى المرحلة الثانية، ليحل محلها متغيرات المسألة الأصلية.

03-نحول المسألة إلى اصيغة القياسية ونستمر بالدورات التكرارية الإعتيادية حتى تصبح دالة الهدف مساوية إلى الصفر ويتحقق شرط الأمثلية لتنتهي بهذا المرحلة الأولى،ونفحص الحل المثل للتأكد من خلوه من المتغيرات الإصطناعية بقيم أكبر من الصفر، فإن وجدت فذلك يعني بأن الحل غير مقبول (غير متاح) ولا يوجد حل للمسألة وننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

01-نحذف كل صفوف وأعمدة المتغيرات الإصطناعية ودالة الهدف الجديدية، من الجدول الأخير للمرحلة الأولى، ونستخدم في دالة الهدف الأصلية متغيرات القرار والمتغيرات الفوائض فقط لتبدأ المرحلة الثانية (Phase II) ،والتي تستخدم لإيجاد الحل الأمثل.

02-نكون الجدول الأول للمرحلة الثانية بالإعتماد على دالة الهدف الأصلية ونستمر بالدورات التكرارية الإعتيادية حتى نصل إلى الحل الأمثل النهائي للمسألة.

مثال05: نفس معطيات المثال03

$$MIN(W) = 2400X_1 + 1000X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 \geq 20 \\ 06X_1 + X_2 \quad \geq 30 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة المرحلتين

الحل:

المرحلة الأولى:

01-نشكل دالة هدف جديدة بمجموع المتغيرات الإصطناعية فقط،أما قيود المسألة فتبقى على حالها كالتالي:

$$MIN(W) = A_1 + A_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 - S_1 + A_1 = 20 \\ 06X_1 + \quad X_2 + S_2 + A_2 \quad = 30 \\ X_1, X_2 \geq 0; S_1, S_2 \geq 0; A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

نشكل جدول الحل الأساسي الممكن للمسألة كمايلي:

C_B	BASIC	0	0	0	0	01	01	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S	القسمة
01	A_1	03	02	-01	0	01	0	20	6.66
01	A_2	06	01	0	-01	0	01	30	05
W_j-C_j		09	03	- 01	- 01	0	0	W=50	

من خلال سطر التقييم نقوم بإستخراج المتغير الداخل إلى القاعدة والذي يقابل أكبر قيمة موجبة ، ومن خلال جدول الحل الإبتدائي نلاحظ أن المتغير الداخل هو X_1 (عمود الإرتكاز).

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) نقوم بقسمة عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ أقل قيمة موجبة فقط،أما إن كانت قيمة سالبة فيتم إهمالها، ومن خلال الجدول السابق نلاحظ أن أقل قيمو موجبة توافق المتغير A_2، وان نقطة الإرتكاز هي القيمة 06 إذن

X_1 يدخل إلى القاعدة(عمود الإرتكاز) وA_2 يخرج من القاعدة(سطر الإرتكاز) و نقطة الإرتكاز هي القيمة 06 ونعيد تشكيل جدول آخر للسمبلكس كمايلي:

جدول السمبلكس الثاني:

C_B	C_j / BASIC	0	0	0	0	01	01	b_i	خارج القسمة
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S	
01	A_1	0	3/2	-01	1/2	01	-1/2	05	10/3
0	X_1	01	1/6	0	-1/6	0	1/6	05	30
W_j-C_j		0	3/2	-01	1/2	0	-3/2	W=05	

نلاحظ من خلال الجدول الثاني أن قيم سطر التقييم لا تزال بها قيم موجبة وبالتالي لم نتوصل بعد إلى الحل الأمثل ونعيد نفس الخطوات السابق شرحها.

من خلال الجدول الثاني نلاحظ أن أكبر قيمة موجبة هي 3/2 و تقابل المتغير الداخلX_2 (عمود الإرتكاز).

ولتحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) نقوم بقسمة قيم عمود الثوابت (الكميات المتاحة) على المعاملات الفنية للمتغير الداخل بحيث نأخذ أقل قيمة موجبة فقط، ومن خلال الجدول السابق فإن أقل قيمو موجبة توافق المتغير A_1،وأن نقطة الإرتكاز هي 3/2 إذن

X_2 يدخل إلى القاعدة(عمود الإرتكاز) وA_1 يخرج من القاعدة(سطر الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي 3/2

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	0	0	0	0	01	01	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S
0	X_2	0	01	-2/3	1/3	2/3	-1/3	10/3
0	X_1	01	0	1/9	-2/9	-1/9	2/9	40/9
W_j-C_j		0	0	0	0	-01	-01	W=0

نلاحظ من خلال الجدول الثالث أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة،كما ان قيمة الدالة تساوي صفر وبالتالي فقد توصلنا إلى نهاية المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية:

نعيد دالة الهدف الأصلية ونحذف أعمدة المتغيرات الإصطناعية من الجدول الأخير للمرحلة الأولى.

$MIN(W) = 2400X_1 + 1000X_2 + 0S_1 + 0S_2$

C_B	C_j / BASIC	2400	1000	0	0	b_i
		X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
1000	X_2	0	01	−2/3	1/3	**10/3**
2400	X_1	01	0	1/9	−2/9	**40/9**
W_j-C_j		**0**	**0**	**−400**	**−200**	**W=14000**

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية: $X_1 = \frac{40}{09}, X_2 = \frac{10}{03}$

المتغيرات غير الأساسية: $S_1 = S_2 = 0$

أسعار الظل: $S_1 = 400, S_2 = 200$

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها بطريقة (BIG−M)

مثال06:نفس معطيات المثال 05

$$MAX(Z) = 03X_1 + X_2 - X_3$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 10 \\ 02X_1 - X_2 \geq 02 \\ X_1 - 02X_2 + X_3 \geq 06 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بإستخدام طريقة المرحلتين.

الحل:

المرحلة الأولى:

01−نشكل دالة هدف جديدة بمجموع المتغيرات الإصطناعية فقط،أما قيود المسألة فتبقى على حالها، مع ملاحظة أن الدالة من نوع (MAX)وبالتالي يجب تحويلها إلى الدالة من نوع (MIN) كالتالي:

$$MIN(Z) = MAX(-Z) = -A_1 - A_2 - A_3$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + A_1 = 10 \\ 02X_1 - X_2 - S_1 + A_2 = 02 \\ X_1 - 02X_2 + X_3 - S_2 + A_3 = 06 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0; S_1 \geq 0; A_1, A_2, A_3 \geq 0 \end{cases}$$

02–تشكيل جدول الحل الإبتدائي (الحل الأولي الممكن)

C_B	C_j	0	0	0	0	0	-01	-01	-01	b_i	خارج
	BASIC	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	R.H.S	القسمة
-01	A_1	01	01	01	0	0	01	0	0	10	10
-01	A_2	02	−01	0	−01	0	0	01	0	02	01
-01	A_3	01	−02	01	0	−01	0	0	01	06	06
Z_j-C_j		−04	02	−02	01	01	0	0	0	Z=-18	

المتغير الداخل إلى القاعدة هوX_1(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هوA_2 ونقطة الإرتكازهي 02

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j	0	0	0	0	0	-01	-01	-01	b_i	خارج
	BASIC	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	R.H.S	القسمة
-01	A_1	0	3/2	01	1/2	0	01	−1/2	0	09	09
0	X_1	01	−1/2	0	−1/2	0	0	1/2	0	01	∞
-01	A_3	0	−3/2	01	1/2	−01	0	−1/2	01	05	05
Z_j-C_j		0	0	-02	-01	01	0	02	0	Z=-14	

المتغير الداخل إلى القاعدة هوX_3(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هوA_3 ونقطة الإرتكازهي 01

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j	0	0	0	0	0	-01	-01	-01	b_i	خارج
	BASIC	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	R.H.S	القسمة
-01	A_1	0	03	0	0	01	01	0	−01	04	4/3
0	X_1	01	−1/2	0	−1/2	0	0	1/2	0	01	-02
0	X_3	0	−3/2	01	1/2	−01	0	−1/2	01	05	-10/3
Z_j-C_j		0	-03	0	0	-01	0	01	02	Z=-04	

المتغير الداخل إلى القاعدة هوX_2(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هوA_1 ونقطة الإرتكازهي 03

جدول السمبلكس الرابع

C_B	C_j / BASIC	0	0	0	0	0	-01	-01	-01	b_i	خارج
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	A_1	A_2	A_3	R.H.S	القسمة
0	X_2	0	01	0	0	1/3	1/3	0	−1/3	4/3	∞
0	X_1	01	0	0	−1/2	1/6	1/6	1/2	−1/6	5/3	-10/3
0	X_3	0	0	01	1/2	−1/2	1/2	−1/2	1/2	07	14
Z_j-C_j		0	0	0	0	0	01	01	01	Z=0	

نلاحظ من خلال الجدول الرابع أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة،كما ان قيمة الدالة تساوي صفر وبالتالي فقد توصلنا إلى نهاية المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية:

01– نعيد دالة الهدف الأصلية ونحذف أعمدة المتغيرات الإصطناعية من الجدول الأخير للمرحلة الأولى.

$$MAX(Z) = 03X_1 + X_2 - X_3 + 0S_1 + 0S_2$$

C_B	C_j / BASIC	03	01	−01	0	0	b_i	خارج
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S	القسمة
01	X_2	0	01	0	0	1/3	4/3	∞
03	X_1	01	0	0	−1/2	1/6	5/3	-10/3
-01	X_3	0	0	01	1/2	−1/2	07	14
Z_j-C_j		0	0	0	-02	4/3	Z=0	

بما أن الحل الأمثل يتمثل في كون جميع قيم سطر التقيم مومجبة أو معدومة ،إذن لا بد من التخلص من القيمة السالبة.

المتغير الداخل إلى القاعدة هوS_1(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هوX_3 ونقطة الإرتكازهي 1/2

جدول السمبلكس الأول

C_B	C_j / BASIC	03	01	−01	0	0	b_i	خارج
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S	القسمة
01	X_2	0	01	0	0	1/3	4/3	04
03	X_1	01	0	01	0	−1/3	26/3	-57/2
0	S_1	0	0	02	01	−01	07	−07
Z_j-C_j		0	0	04	0	−2/3	Z=82/3	

المتغير الداخل إلى القاعدة هوS_2(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هوX_2 ونقطة الإرتكازهي 1/3

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	03	01	−01	0	0	b_i
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R.H.S
0	S_2	0	03	0	0	01	04
03	X_1	01	01	01	0	0	10
0	S_1	0	03	02	01	0	11
Z_j-C_j		0	02	04	0	0	Z=30

نلاحظ أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي فقد توصلنا إلى الحل الأمثل والذي يمثل نهاية المرحلة الثانية.

المتغيرات الأساسية: $S_2 = 04, S_1 = 11, X_1 = 10$

المتغيرات غير الأساسية: $X_2 = X_3 = 0$

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها بطريقة M الكبيرة (BIG−M).

04-الحالات الخاصة في حل مسائل البرمجة الخطية:

هناك أربع حالات ومشاكل خاصة تظهر عند إستخدام طريقة الحل بإستخدام السمبلكس في حل مشاكل البرمجة الخطية، وتنشأ هذه الحالات نتيجة الخلل في بناء النموذج الرياضي، أو نتيجة الحل بالطريقة المبسطة وهذه الحالات هي:

01-تعذر الحل أو عدم وجود حل ممكن (Infeasibility)

02-عدم محدودية الحل (Unboundness)

03-تعدد البدائل (وجود أكثر من حل أمثل) (Alternative Optimal Solutions)

04- الإنحلال (التكرار أو الدوران)(Degeneracy)

وفيما يلي شرح لهذه الحالات الأربعة:

01-تعذر الحل أو عدم وجود حل ممكن (Infeasibility):يعني ذلك عدم وجود أية نقطة تحقق جميع قيود المسألة،ويتعبير آخر تكون منطقة الإمكانات عبارة عن مجموعة خالية، وعند إستخدام الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) نلاحظ ذلك عند الوصول إلى الجدول الذي يعطي الحل الأمثل، ولكن هناك متغيرا إصطناعيا لايزال موجودا في الحل بين المتغيرات الأساسية وبقيمة موجبة.

مثال07:ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 03X_1 + 02X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 02X_1 + X_2 \le 02 \\ 03X_1 + 04X_2 \ge 12 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية؟

الحل:

نحول البرنامج إلى الصيغة القياسية ونشكل جدول الحل الأولي (الإبتدائي)

$$MAX(Z) = 03X_1 + 02X_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1$$

$$S/C = \begin{cases} 02X_1 + X_2 + S_1 = 02 \\ 03X_1 + 04X_2 - S_2 + A_1 = 12 \\ X_1, X_2 \geq 0; S_1, S_2 \geq 0; A_1 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الإبتدائي (الأولي)

C_B	C_j	03	02	0	0	-M	b_i	خارج
	BASIC	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	R.H.S	القسمة
0	S_1	02	01	01	0	0	02	02
-M	A_1	03	04	0	−01	01	12	03
Z_j-C_j		-3M-03	−4M−2	0	M	0	Z=-12M	

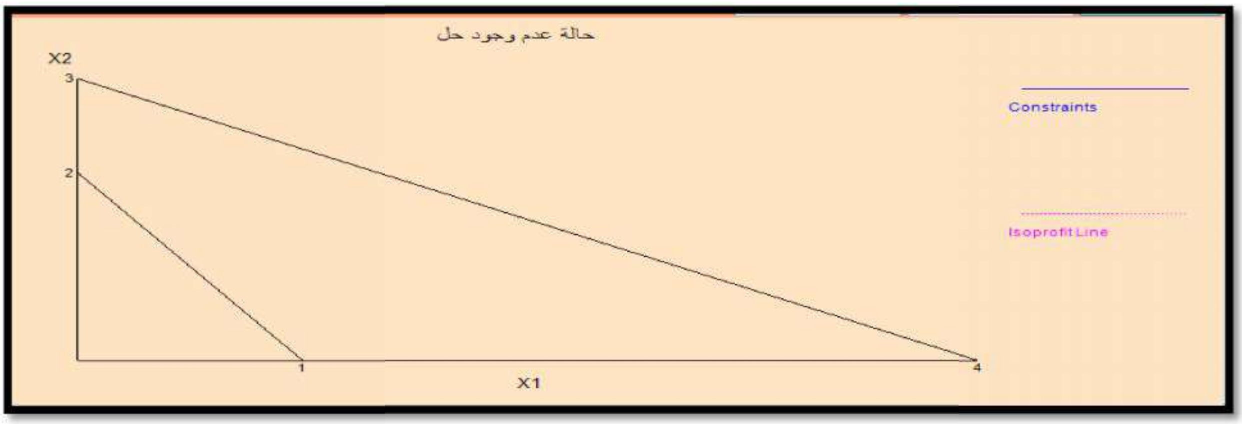
المتغير الداخل إلى القاعدة هوX_2(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو S_1 ونقطة الإرتكازهي 01

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j	03	02	0	0	-M	b_i	
	BASIC	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	R.H.S	
02	X_2	02	01	01	0	0	02	
-M	A_1	−05	0	−04	−01	01	04	
Z_j-C_j		5M+1	0	4M+2	M	0	Z=04-04 M	

نلاحظ من خلال هذا الجدول ان جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي فهو يعتبر حل أمثل، لعدم إمكانية إدخال متغير آخر إلى القاعدة،ولكن مع ملاحظة بقاء المتغير الإصطناعي A_1 في القاعدة (أي متغير أساسي) مما يعني لايوجد حل لهذه المسألة.

ويمكن إظهار نتيجة هذا الحل بإستخدام البرنامج QM for Windows



عدم وجود حل لوجود تناقض في القيود (عدم تقاطع القيود)

02-عدم محدودية الحل (Unboundness): ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير او أكثر من متغيرات المشكلة، وبالنسبة لطريقة الحل بإستخدام طريقة السمبلكس فإن هذا يحدث عندما لا نستطيع تحديد سطر الإرتكاز اي المتغير الذي سوف يغادر قاعدة الحل لعدم وجود نسبة موجبة، أي عدم وجود حاصل قسمة موجبة لقيم عمود الكميات المتاحة على المعاملات الفنية لعمود الإرتكاز (المتغير الداخل)،أي ان في هذه الحالة تكون جميع قيم سطر الإرتكاز أقل من او تساوي الصفر (سالبة او أصفارا)،علما بأن ذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية التي دالة الهدف لها من نوع تعظيم (MAX).

مثال08: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z)=X_1+X_2$$

$$S/C=\begin{cases}08X_1+06X_2\geq 24\\ 02X_1+06X_2\geq 12\\ X_1,X_2\geq 0\end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية؟

الحل:

نحول البرنامج إلى الصيغة القياسية ونشكل جدول الحل الأولي (الإبتدائي)

$$MAX(Z)=X_1+X_2+0S_1+0S_2-MA_1-MA_2$$

$$S/C=\begin{cases}08X_1+06X_2-S_1+A_1=24\\ 02X_1+06X_2-S_2+A_2=12\\ X_1,X_2\geq 0;S_1,S_2\geq 0;A_1,A_2\geq 0\end{cases}$$

جدول الحل الإبتدائي (الأولي)

C_B	C_j / BASIC	01	01	0	0	-M	-M	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S	القسمة
-M	A_1	08	06	−01	0	01	0	24	04
-M	A_2	02	06	0	−01	0	01	12	02
Z_j-C_j		-10M-01	-12M−01	M	M	0	0	Z=-36M	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_2(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو A_2 ونقطة الإرتكازهي 06

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	01	01	0	0	-M	-M	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S	القسمة
-M	A_1	06	0	−01	01	01	−01	12	02
01	X_2	1/3	01	0	−1/6	0	1/6	02	06
Z_j-C_j		-06M-2/3	0	M	-M-1/6	0	02M+1/6	Z=-12M+02	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_1 (عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو A_1 ونقطة الإرتكازهي 06

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	01	01	0	0	-M	-M	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S	القسمة
01	X_1	01	0	−1/6	1/6	1/6	−1/6	02	−12
01	X_2	0	01	1/18	−2/9	−1/18	2/9	4/3	24
Z_j-C_j		0	0	−1/9	−1/18	1/9+ M	1/18+ M	Z=10/3	

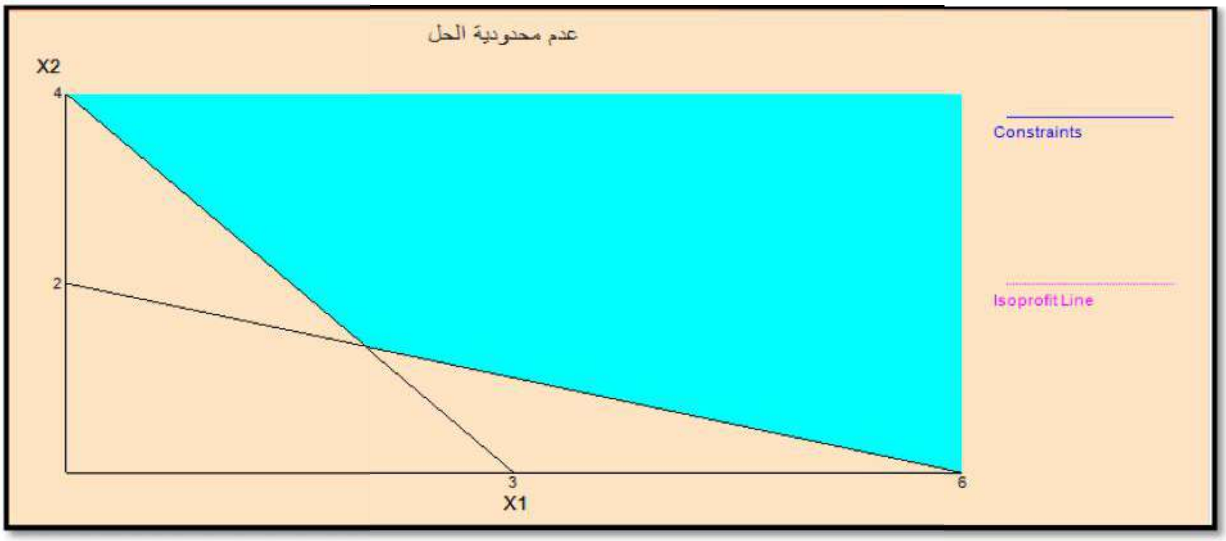
المتغير الداخل إلى القاعدة هو S_1 (عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو X_2 ونقطة الإرتكازهي 1/18

جدول السمبلكس الرابع

C_B	C_j / BASIC	01	01	0	0	-M	-M	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	R.H.S	القسمة
01	X_1	01	03	0	−1/2	0	1/2	06	−12
0	S_1	0	18	01	−04	−01	04	24	−16
Z_j-C_j		0	02	0	-1/2	M	1/2+ M	Z=10/3	

نلاحظ من الجدول الرابع أن المتغير الذي سوف يدخل إلى القاعدة هو S_2 (عمود الإرتكاز)، ولكن يتعذر تحديد المتغير الذي سيغادر القاعدة (سطر الإرتكاز) بسبب عدم إمكانية الحصول على نسبة موجبة وذلك لأن جميع المعاملات الفنية لعمود الإرتكاز سالبة.

ويمكن إظهار نتيجة هذا الحل بإستخدام البرنامج QM for Windows



نلاحظ أن منطقة الحلول الممكنة هي منطقة مفتوحة.

03–تعدد البدائل (وجود أكثر من حل أمثل) (Alternative Optimal Solutions): وتعني أن مشكلة البرمجة الخطية لها أكثر من نقطة حل أمثل،أي أن قيمة دالة الهدف (Z) متساوية عند أكثر من نقطة، وفي حالة إستخدام طريقة السمبلكس يتم تشخيص هذه الحالة عندما يمكن تكوين أكثر من حل أساسي ويعطي نفس قيمة الحل المثل، وتتحقق هذه الحالة عندما تكون قيم سطر التقييم لحد المتغيرات غير الأساسية تساوي الصفر (معدومة)،إذ انه في هذه الحالة يمكن ان يتحول هذا المتغير إلى متغير أساسي وتكوين جدول جديد يعطي نفس الحل الأمثل.

مثال09: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z)=04X_1+14X_2$$

$$S/C=\begin{cases}02X_1+07X_2\le 21\\07X_1+02X_2\le 21\\X_1,X_2\ge 0\end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية؟

الحل:

نحول البرنامج إلى الصيغة القياسية ونشكل جدول الحل الأولي (الإبتدائي)

$$MAX(Z)=04X_1+14X_2+0S_1+0S_2$$

$$S/C=\begin{cases}02X_1+07X_2+S_1=21\\07X_1+02X_2+S_2=21\\X_1,X_2\ge 0;S_1,S_2\ge 0\end{cases}$$

جدول الحل الإبتدائي (الأولي)

C_B	BASIC	04	14	0 C_j	0	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	القسمة
0	S_1	02	07	01	0	21	03
0	S_2	07	02	0	01	21	10.50
Z_j-C_j		−04	−14	0	0	Z=0	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_2(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو S_1 ونقطة الإرتكازهي07

جدول السمبلكس الثاني

C_B	BASIC	04	14	0	0	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	القسمة
14	X_2	2/7	01	1/7	0	03	10.50
0	S_2	45/7	0	−2/7	01	15	02.33
Z_j-C_j		0	0	02	0	Z=42	

نلاحظ أن جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي فقد توصلنا إلى الحل الأمثل

$X_2 = 03, X_1 = 0, Z^* = 42$

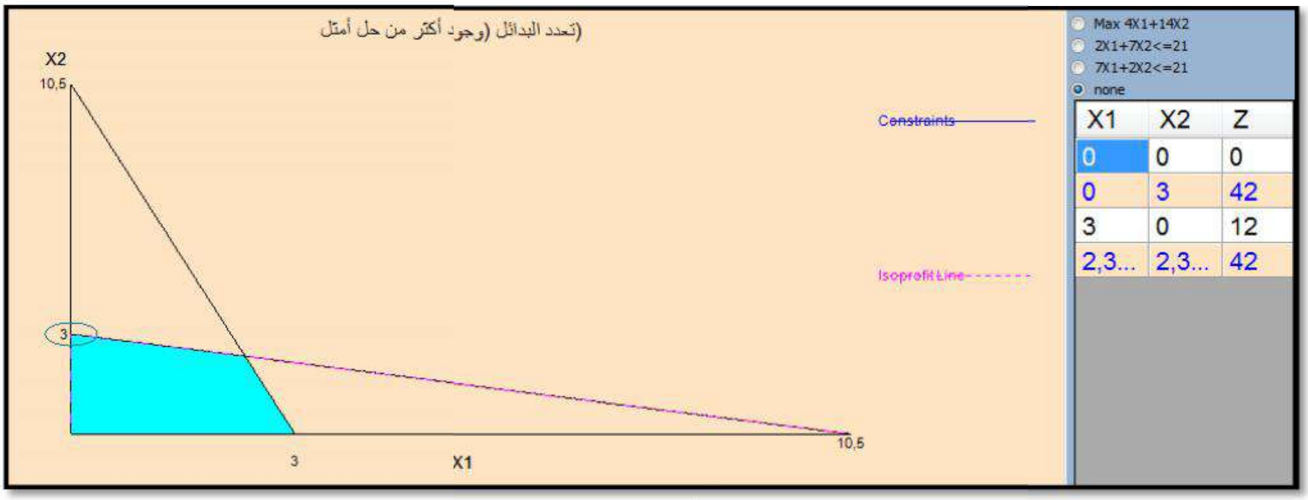
كما يمكننا ايضا أن نلاحظ أن المتغير X_1 هو متغير غير أساسي في حين أن قيمته في سطر التقييم تساوي صفر مما يعني أن هناك عددا لانهائيا من الحلول، وبالتالي يمكننا إدخال المتغير X_1 إلى الحل بجعله متغيرا أساسي و إخراج المتغير S_2، فنتحصل على الجدول التالي

C_B	BASIC	04	14	0	0	b_i	
		X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	
14	X_2	0	01	7/45	−2/45	7/3	
04	X_1	01	0	−2/45	7/45	7/3	
Z_j-C_j		0	0	02	0	Z=42	

نلاحظ ان جميع قيم سطر التقييم موجبة أو معدومة وبالتالي فهو حل أمثل بديل

$X_1 = \frac{07}{03}, X_2 = \frac{07}{03}, Z^* = 42$

ويمكن إظهار نتيجة هذا الحل بإستخدام البرنامج QM for Windows



04- الإنحلال (التكرار أو الدوران)(Degeneracy): تصادف هذه المشكلة عندما يكون احد قيود المسألة قيدا فائضا، وتبرز مشكلة الإنحلال (التكرار او الدوران) عند حساب النسبة من أجل تحديد المتغير الخارج من الحل وكان هناك مساواة في النسبة الأقل لأكثر من سطر وهذا يعني ان هناك دوران في الحل.

إن وجود تعادل في النسبة الأقل لكثر من سطر يعني أن قيمة احد المتغيرات الأساسية في الحل القادم سوف تساوي الصفر، إن وجود قيمة صفرية لأحد المتغيرات الأساسية ليست مشكلة ولكنها ستكون مشكلة إذا ظهرت هذه القيمة قبل الوصول إلى الحل المثل،وذلك أن هذا يستدعي الدوران(التحرك للخلف والأمام) وقد يؤدي إلى عدم الوصول إلى الحل الأمثل.

بشكل عام إذا حصل تعادل في النسبة الأقل لمسألة البرمجة الخطية فإننا ننصح بإختيار السطر الأعلى من الجدول ليكون هو سطر الإرتكاز.

مثال10: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 03X_1 + 09X_2$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + 04X_2 \leq 08 \\ X_1 + 02X_2 \leq 04 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية؟

الحل:

نحول البرنامج إلى الصيغة القياسية ونشكل جدول الحل الأولي (الإبتدائي)

$$MAX(Z) = 03X_1 + 09X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + 04X_2 + S_1 = 08 \\ X_1 + 02X_2 + S_2 = 04 \\ X_1, X_2 \geq 0; S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الإبتدائي (الأولي)

C_B	BASIC	03	09	0 C_j	0	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	القسمة
0	S_1	01	04	01	0	08	02
0	S_2	01	02	0	01	04	02
Z_j-C_j		-03	-09	0	0	Z=0	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_2(عمود الإرتكاز)أما بالنسبة للمتغير الخارج فنلاحظ تساوي النسبتين الأقل للسطرين لذا نختار السطر الأعلى من الجدول أي نختار S_1 كمتغير خارج من القاعدة ونقطة الإرتكازهي04

جدول السمبلكس الثاني

C_B	BASIC	03	09	0	0	b_i	خارج
		X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	القسمة
09	X_2	1/4	01	1/4	0	02	08
0	S_2	1/2	0	-1/2	01	0	0
Z_j-C_j		-3/4	0	9/4	0	Z=18	

المتغير الداخل إلى القاعدة هو X_1(عمود الإرتكاز) والمتغير الخارج من القاعدة هو S_2 ونقطة الإرتكازهي1/2

جدول السمبلكس الثالث

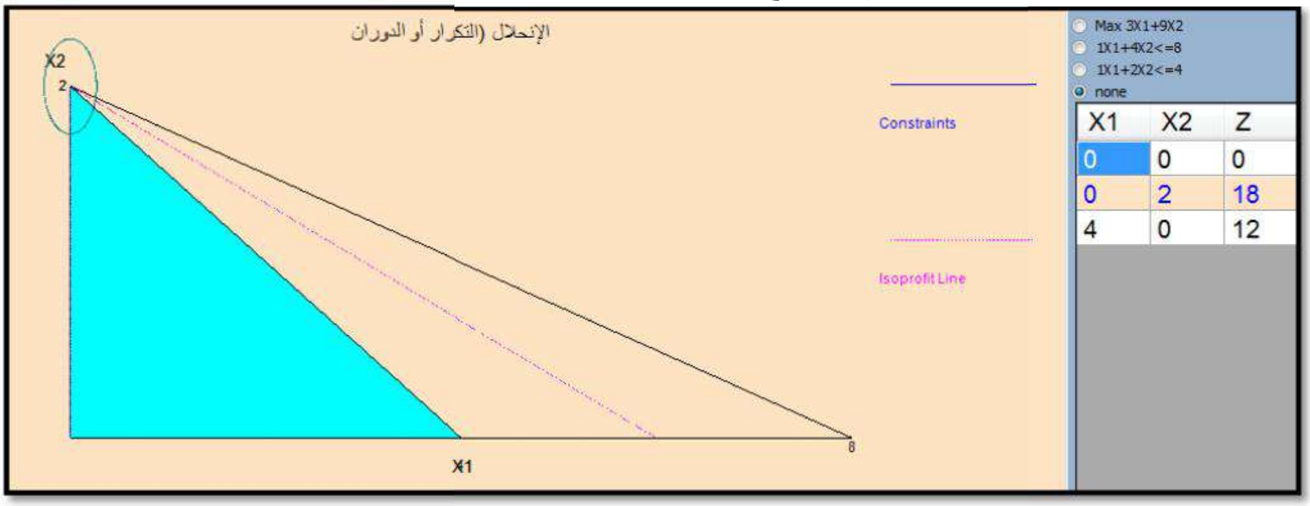
C_B	BASIC	03	09	0	0	b_i	
		X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	
09	X_2	0	01	1/2	−1/2	02	
03	X_1	01	0	−01	02	0	
Z_j-C_j		0	0	3/2	3/2	Z=18	

نلاحظ ان جميع قيم سطر التقييم موجبة او معدومة وبالتلي فقد توصلنا إلى الحل الأمثل.

$X_1 = 0, X_2 = 02, Z^* = 18$

من خلال هذا المثال نلاحظ ان قيمة الدالة الإقتصادية في الجدول الثاني والثالث بقيت كماهي $(Z^* = 18)$،وهذا مايسمى بدوران الحل، وذلك لأن قيمة أحد المتغيرات $(X_1 = 0)$ يساوي الصفر.

ويمكن إظهار نتيجة هذا الحل بإستخدام البرنامج QM for Windows



المحور الخامس:البرمجة الخطية الثنائية أوالإزدواجية

(Duality in linear programming)

المحور الخامس:البرمجة الخطية الثنائية أوالإزدواجية(Duality in linear programming)

01-مقدمة:إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها إصطلاح النماذج الأولية (Primal Models) ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه إصطلاح النموذج المقابل (Dual Models).

وعند مناقشة مشاكل البرمجة الخطية لابد من مناقشة مشكلة أخرى الأ وهي الثنائية (Duality)،إذ يقترن دائما بكل مشكلة أولية (Primal Probleme) نموذج آخر يطلق عليه المشكلة المقابلة أو الثنائية(Duality Probleme) ويعني هذا أنه بالإمكان تحويل أي مشكلة في البرمجة الخطية إلى مايقابها من نموذج.

02-فوائد إستخدام النموذج المقابل: يتضمن إستخدام النموذج المقابل على فوائد عديدة نذكر منها

01-سهولة وسرعة التوصل إلى الحل المثل،إذ يتطلب إحدى المشاكل إجراءات حل مطولة وفق الطريقة المبسطة للمشكلة الأولية وبالمقابل يتضمن حل المشكلة بالنموذج المقابل سهولة أكبر وعليه يكون حلها أسهل عند تحويلها إلى النموذج الثنائي.

02-تساعد الإدارة في معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار.

03-الحل الأمثل لأحدهما يعطي معلومة كاملة عن الحل الأمثل للأخرى وللتعرف على القيمة الحقيقية للموارد التي إستخدمت كمدخلات.

04-يجب ان يتم حساب أسعر الظل لأنها تمثل القيمة الحقيقية للموارد وذلك للتأكد من أنها لاتزيد عن إجمالي الأرباح.

05-لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الأخرى (الثنائية) فإذا كان النموذج أولي (Primal) وبصيغة التعظيم (MAX) أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج المقابل ويكون بصيغة التقليل (MIN) وتمثيله للجانب الكلفوي في نفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية (Primal).

03-خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل: لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل او العكس يمكن ذلك بإتباع الخطوات التالية:

01-إذا كان هدف المشكلة في النموذج الأولي تعظيم الأرباح (MAX) فتصبح هدف المشكلة في النموذج المقابل تقليل التكاليف(MIN) والعكس بالعكس.

02-عدد المتغيرات في النموذج الأولي يكون مساويا لعدد القيود في النموذج المقابل، فمثلا لو كان النموذج الأولي يحوي على ثلاث متغيرات فإن النموذج المقابل سيحتوي على ثلاث قيود.

03-تحويل معاملات المتغيرات (المعاملات الفنية) في قيود المشكلة (القيود الهيكلية) بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفا.

04-الطرف الأيمن من القيود الفنية للنموذج الأولي (الكميات المتاحة) هي معاملات دالة الهدف للنموذج المقابل والعكس صحيح.

05-تحويل إتجاه المتباينات من أصغر أو يساوي إلى أكبر أو يساوي والعكس بالعكس.

06–إستبدال جميع المتغيرات المشار إليها بالمتغيرات (X) في النموذج الأولي إلى المتغيرات (Y) في النموذج المقابل.

07–إذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم الربح،فيفترض ان تكون جميع المتباينات بإتجاه واحد (أصغر أو يساوي)، بينما تكون المتباينات (أكبر او تساوي) في حالة كون المشكلة تهدف إلى تقليل التكاليف، أما إذا وجدت بعض المتباينات تخالف الصيغة العامة للتعظيم او التقليل فلابد من تحويلها إلى الإتجاه المطلوب زذلك بضرب طرفي المتباينة في (01−).

08–بالنسبة للقيود التي تحمل إشارة المساواة (=) فإن المتغير الذي يقابله في المسألة المقابلة سيكون غير محدد الإشارة (متغير حر) والعكس صحيح، فالمتغير غير المحدد بإشارة في المسألة الأولية سيقابله قيد بإشارة المساواة(=) في المسألة المقابلة.

09–إذا كان إتجاه كل القيود الفنية في النموذج الأولي على شكل معادلات (مساواة)(=)،فإنه يجب أولا تحويل قيد المساواة إلى قيدين أحدهما أكبر أو يساوي والثاني أصغر أو يساوي، فإذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم فيجب ضرب القيد الذي به إشارة المتراجحة من نوع أكبر أو يساوي في (01−) لجعل جميع القيود من الشكل أصغر أو يساوي ثم بعد ذلك يتم تكوين النموذج المقابل، اما إذاكانت الدالة من نوع تقليل (MIN) فيجب ضرب القيد الذي به إشارة المتراجحة من نوع أصغر أو يساوي في (01−) لجعل القيود من الشكل أكبر أو يساوي ثم بعد ذلك يتم تكوين النموذج المقابل.

10–إذا كانت للمشكلة المقابلة (الثنائية) حل أمثل، فإن للمشكلة الأولية حلا أمثلا والعكس صحيح.

11–إن نظرية الثنائية في البرمجة الخطية تبين أنه عند الحل الأمثل يلزم أن تكون قيمة دالة الهدف في النموذج الأولي تساوي دالة الهدف في النموذج المقابل $\mathrm{MAX}(Z)=\mathrm{MIN}(W)$ ، ماعدا بعض الحالات الخاصة التي تكون فيها العلاقة كالتالي:

–إن قيمة دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية الأولية من نوع تعظيم (MAX) لأي حل مقبول تمثل الحد الأدنى للقيمة الصغرى لدالة الهدف في النموذج المقابل.

–وبالمثل فإن قيمة دالة الهدف للنموذج المقابل (الثنائي) من نوع تقليل (MIN) تمثل الحد الأعلى للقيمة العظمى لدالة الهدف للمسألة الأولية.

–إذا كان حل المسالة الأولية مقبول وقيمة دالة الهدف غير محدودة أي أن $\left(\mathrm{MAX}(Z)\to\infty\right)$ فإن المسألة المقابلة لايوجد لها حل مقبول.

–إذا كان حل المسألة المقابلة مقبول وقيمة دالة الهدف غير محدودة أي أن $\left(\mathrm{MIN}(W)\to\infty\right)$، فإن المسألة الأولية لها حل غير مقبول.

–إذا كان حل النموذج الأولي مقبول، وحل النموذج المقابل غير مقبول، فإن حل المسألة الأولية يكون غير محدود.

–إذا كان حل النموذج المقابل مقبول وحل النموذج الأولي غير مقبول فإن النموذج الثنائي يكون غير محدود.

-إذا كان النموذج الأولي له حل غير منتظم ،فإن النموذج المقابل له يكون له عدة حلول مثلى والعكس أيضا صحيح.

12-يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل من خلال الجدول التالي:

2المشكلة بصيغتها الأولية	المشكلة بصيغتها الثنائية
دالة الهدف من نوع تعظيم (MAX)	دالة الهدف من نوع تقليل (MIN)
عدد القيود	عدد متغيرات القرار (Y)
عدد متغيرات القرار (X)	عدد القيود
معاملات الطرف الأيمن للقيود (الكميات المتاحة)(b_i)	معاملات دالة الهدف
معاملات دالة الهدف	معاملات الطرف الأيمن للقيود (الكميات المتاحة)(b_i)

13-الجدول التالي يوضح كيفية التعامل مع قيود ومتغيرات المشكلة الأولية والثنائية

المشكلة بصيغتها الأولية		**المشكلة بصيغتها الثنائية**
القيود -أصغر أو يساوي (≤) -أكبر أو يساوي (≥) -قيد مساواة (=)	⟺	**المتغيرات** -أكبر أو يساوي (≥) -أصغر أو يساوي (≤) -غير مقيد بإشارة (حر)
المتغيرات -أكبر أو يساوي (≥) -أصغر أو يساوي (≤) -غير مقيد بإشارة (حر)	⟺	**القيود** -أكبر أو يساوي (≥) -أصغر أو يساوي (≤) -قيد مساواة (=)

04-حالات التحويل من النموذج الأولي إلى النموذج المرافق (الثنائية): توجد عدة حالات سوف نتطرق لها وهي إما ان تكون القيود من الشكل أكبر أو يساوي(≥)، أو من الشكل أصغر أو يساوي(≤)،أو من الشكل المختلط (≤,=,≥)، كما أن النموذج المقابل يمكن الحصول عليه بطريقتين مختلفتين سوف نتطرق لهمل بالتفصيل عند معالجة كل حالة.

04- 01 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأولي في صيغته العامة: هنا نميز حالتين إما في حالة التعظيم أو في حالة التقليل

الحالة الأولى: النموذج الأولي في حالة التعظيم (MAX)

يمكن الحصول على النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين هما:

الطريقة الأولى: حسب الصيغة العامة للنموذج

إذا كانت الصيغة العامة للنموذج الأولي في حالة التعظيم بالشكل التالي

$$MAX(Z)=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3\le b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3\le b_2 \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3\le b_3 \\ X_1,X_2,X_3\ge 0 \end{cases}$$

عندها تكون الصيغة العامة للنموذج المقابل بالصيغة التالية:

$$MIN(W)=b_1Y_1+b_2Y_2+b_3Y_3$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}Y_1+a_{21}Y_2+a_{31}Y_3\ge C_1 \\ a_{12}Y_1+a_{22}Y_2+a_{32}Y_3\ge C_2 \\ a_{13}Y_1+a_{23}Y_2+a_{33}Y_3\ge C_3 \\ Y_1,Y_2,Y_3\ge 0 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

طريقة الجداول تسهل علينا إيجاد النموذج المرافق للمسالة الأولية، فإذا كانت المسألة الأولية من نوع تعظيم فإننا نقوم في البداية برسم جدول ونضع فيه تفاصيل النموذج الأولي بشكل أفقي ثم نحصل من خلال هذا الجدول على النموذج المرافق بالنظر إلى الجدول بشكل عمودي كما يوضحه الجدول التالي:

	$MIN(W)$		$MAX(Z)$				
			متغيرات القرار للنموذج الأولي				
			$X_1\ge 0$	$X_2\ge 0$	$X_3\ge 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$Y_1\ge 0$	Y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\le b_1$	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$Y_2\ge 0$	Y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\le b_2$	
	$Y_3\ge 0$	Y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\le b_3$	
			$\ge C_1$	$\ge C_2$	$\ge C_3$		
			القيود الهيكلية للنموذج المقابل				

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W)=b_1Y_1+b_2Y_2+b_3Y_3$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}Y_1+a_{21}Y_2+a_{31}Y_3\ge C_1 \\ a_{12}Y_1+a_{22}Y_2+a_{32}Y_3\ge C_2 \\ a_{13}Y_1+a_{23}Y_2+a_{33}Y_3\ge C_3 \\ Y_1,Y_2,Y_3\ge 0 \end{cases}$$

مثال01: إذا كن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 10X_1 + 20X_2 + 15X_3$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + 04X_2 + 04X_3 \le 12 \\ 03X_1 + 02X_2 + 05X_3 \le 30 \\ 03X_1 + 03X_2 + X_3 \le 18 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين؟

الحل:

الطريقة الأولى: طريقة الصيغة العامة

بما أن دالة الهدف من النوع MAX والقيود جميعها من النوع أقل أو يساوي $(\le)$،والمتغيرات X_1, X_2, X_3 مقيدة بالإشارة، لذا فإنه من الممكن كتابة النموذج المقابل مباشرة مع إفتراض أن Y_1, Y_2, Y_3 هي متغيرات النموذج المقابل كمايلي:

$$MIN(W) = 12Y_1 + 30Y_2 + 18Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} Y_1 + 03Y_2 + 03Y_3 \ge 10 \\ 04Y_1 + 02Y_2 + 03Y_3 \ge 20 \\ 04Y_1 + 05Y_2 + Y_3 \ge 15 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">$MIN(W)$</td><td colspan="4">$MAX(Z)$</td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">**متغيرات القرار للنموذج الأولي**</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$X_1 \ge 0$</td><td>$X_2 \ge 0$</td><td>$X_3 \ge 0$</td></tr>
<tr><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">**متغيرات القرار للنموذج المقابل**</td><td>$Y_1 \ge 0$</td><td>Y_1</td><td>**01**</td><td>**04**</td><td>**04**</td><td>≤ 12</td><td rowspan="3">**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**</td></tr>
<tr><td>$Y_2 \ge 0$</td><td>Y_2</td><td>**03**</td><td>**02**</td><td>**05**</td><td>≤ 30</td></tr>
<tr><td>$Y_3 \ge 0$</td><td>Y_3</td><td>**03**</td><td>**03**</td><td>**01**</td><td>≤ 18</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td></td><td>≥ 10</td><td>≥ 20</td><td>≥ 15</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">**القيود الهيكلية للنموذج المقابل**</td></tr>
</table>

فيكون النموذج المقابل بالصيغة التالية:

$$MIN(W) = 12Y_1 + 30Y_2 + 18Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} Y_1 + 03Y_2 + 03Y_3 \ge 10 \\ 04Y_1 + 02Y_2 + 03Y_3 \ge 20 \\ 04Y_1 + 05Y_2 + Y_3 \ge 15 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

الحالة الثانية: النموذج الأولي في حالة التقليل (MIN)

يمكن الحصول على النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين هما:

الطريقة الأولى:طريقة الصيغة العامة

إذا كانت الصيغة العامة للنموذج الأولي في حالة التقليل بالشكل التالي

$$MIN(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \geq \ b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \geq \ b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \geq \ b_3 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

عندها تكون الصية العامة للنموذج المقابل بالصيغة التالية:

$$MAX(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \leq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \leq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 \leq C_3 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

إذا كان النموذج الأولي في شكل تقليل MIN فإننا نقوم برسم جدول ونضع فيه تفاصيل النموذج بشكل عمودي، ثم نحصل من هذا الجدول على النموذج المرافق بالنظر إلى الجدول بشكل أفقي،أي أن النموذج المرافق (القيمة العظمى) يوضع في الجدول بشكل أفقي،أما نموذج التقليل (النموذج الأولي) فيوضع بشكل رأسي والجدول التالي يوضح ذلك.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">$MIN(W)$</td><td colspan="4">$MAX(Z)$</td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">**متغيرات القرار للنموذج المرافق**</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$Y_1 \geq 0$</td><td>$Y_2 \geq 0$</td><td>$Y_3 \geq 0$</td></tr>
<tr><td>Y_1</td><td>Y_2</td><td>Y_3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">**متغيرات القرار للنموذج الأولي**</td><td>$X_1 \geq 0$</td><td>X_1</td><td>a_{11}</td><td>a_{21}</td><td>a_{31}</td><td>$\leq C_1$</td><td rowspan="3">**القيود الهيكلية للنموذج المرافق**</td></tr>
<tr><td>$X_2 \geq 0$</td><td>X_2</td><td>a_{12}</td><td>a_{22}</td><td>a_{23}</td><td>$\leq C_2$</td></tr>
<tr><td>$X_3 \geq 0$</td><td>X_3</td><td>a_{13}</td><td>a_{23}</td><td>a_{33}</td><td>$\leq C_3$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td></td><td>$\geq b_1$</td><td>$\geq b_2$</td><td>$\geq b_3$</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**</td></tr>
</table>

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

مثال02: إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MIN(W) = 04X_1 + 06X_2 + 08X_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 05X_2 + X_3 & \geq 18 \\ X_1 + 04X_2 + X_3 & \geq 30 \\ 04X_1 + 02X_2 + 05X_3 & \geq 25 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين؟

الحل:

الطريقة الأولى: حسب الصيغة العامة للنموذج

بما أن دالة الهدف من النوع MIN والقيود جميعها من النوع أكبر أو يساوي $(\geq)$،والمتغيرات X_1, X_2, X_3 مقيدة بالإشارة، لذا فإنه من الممكن كتابة النموذج المقابل مباشرة مع إفتراض أن Y_1, Y_2, Y_3 هي متغيرات النموذج المقابل كمايلي:

$$MAX(W) = 18Y_1 + 30Y_2 + 25Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03Y_1 + Y_2 + 04Y_3 & \leq 04 \\ 05Y_1 + 04Y_2 + 02Y_3 & \leq 06 \\ Y_1 + Y_2 + 05Y_3 & \leq 08 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

الطريقة الثانية:طريقة الجدول

$MIN(Z)$			$MAX(W)$				
			متغيرات القرار للنموذج المقابل				
			$Y_1 \geq 0$	$Y_2 \geq 0$	$Y_3 \geq 0$		
			Y_1	Y_2	Y_3		
متغيرات القرار للنموذج الأولي	$X_1 \geq 0$	X_1	**03**	**01**	**04**	≤ 04	**القيود الهيكلية للنموذج المقابل**
	$X_2 \geq 0$	X_2	**05**	**04**	**02**	≤ 06	
	$X_3 \geq 0$	X_3	**01**	**01**	**05**	≤ 08	
			≥ 18	≥ 30	≥ 25		
			القيود الهيكلية للنموذج الأولي				

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W) = 18Y_1 + 30Y_2 + 25Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03Y_1 + Y_2 + 04Y_3 & \leq 04 \\ 05Y_1 + 04Y_2 + 02Y_3 & \leq 06 \\ Y_1 + Y_2 + 05Y_3 & \leq 08 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

04-02 النموذج الثنائي إذا كان النموذج الأولي في صيغة مختلطة

في كثير من الحالات تكون مسائل البرمجة الخطية غير منتظمة (الصيغة المختلطة) وسوف نشرح كيف يتم تحويل هذا النوع من المسائل إلى الصيغة المقابلة.

الحالة الأولى: القيود من نوع متراجحات أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو على شكل مساواة و المتغيرات مقيدة بإشارة

في هذه الحالة يمكن إيجاد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين:

الطريقة الأولى: طريقة الصيغة العامة

تتمثل هذه الطريقة في تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة العامة حسب مبدا الأمثلية المعطى إما تعظيم (MAX) أو تقليل (MIN)، فإذا كان لدينا نموذج البرمجة الخطية كالتالي

$$MAX(Z)=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}X_1+a_{12}X_2+a_{13}X_3 \le b_1 \\ a_{21}X_1+a_{22}X_2+a_{23}X_3 = b_2 \\ a_{31}X_1+a_{32}X_2+a_{33}X_3 \ge b_3 \\ X_1,X_2,X_3 \ge 0 \end{cases}$$

يتم إجراء تحويل لكل من القيدين الثاني والثالث حسب الخطوات السابق شرحها، لتحويلها إلى الصيغة العامة حسب ملدأ الأمثلية ومن ثم يمكننا إستنتاج النموذج المقابل بالصيغة التالية:

$$MIN(W)=b_1Y_1+b_2Y_2-b_3Y_3$$

$$S/C=\begin{cases} a_{11}Y_1+a_{21}Y_2-a_{31}Y_3 \ge C_1 \\ a_{12}Y_1+a_{22}Y_2-a_{32}Y_3 \ge C_2 \\ a_{13}Y_1+a_{23}Y_2-a_{33}Y_3 \ge C_3 \\ Y_1,Y_3 \ge 0 \;;\forall Y_2 \end{cases}$$

الطريقة الثانية:طريقة الجدول

هذه الطريقة تمكننا من الحصول على النموذج المرافق دون أن نقوم بتحويل المسالة الأولية إلى الصيغة العامة،إذا كانت المسالة الأولية عبارة عن تعظيم بصيغة مختلطة من القيود فإننا نستطيع إيجاد النموذج المرافق كمايلي:

- نفرض أن القيد الأول كان من نوع أقل أو يساوي($\le$) في النموذج الأولي،فإن المتغير في النموذج المقابل لا بد ان يكون من نوع أكبر أو يساوي ($\ge$).

-نفرض أن القيد الأول كان من نوع مساواة (=) في النموذج الأولي،فإن المتغير في النموذج المقابل لا بد أن يكون غير مقيد بإشارة.

- نفرض أن القيد الثاني كان من نوع أكبر أو يساوي($\ge$) في النموذج الأولي،فإن المتغير في النموذج المقابل لا بد ان يكون من نوع أقل أو يساوي ($\ge$).

والجدول التالي يوضح النقاط السابق شرحها

$MIN(W)$			$MAX(Z)$				
			متغيرات القرار للنموذج الأولي				
			$X_1 \geq 0$	$X_2 \geq 0$	$X_3 \geq 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$Y_1 \geq 0$	Y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\leq b_1$	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$= b_2$	
	$Y_3 \leq 0$	Y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\geq b_3$	
			$\geq C_1$	$\geq C_2$	$\geq C_3$		
			القيود الهيكلية للنموذج المقابل				

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \geq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 \geq C_3 \\ Y_1 \geq 0 \;; \forall Y_2 ; Y_3 \leq 0 \end{cases}$$

مثال03:إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 04X_1 + 08X_2 + 06X_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + X_2 + 04X_3 \leq 60 \\ X_1 - 02X_2 + 03X_3 = 40 \\ 02X_1 + 03X_2 + X_3 \geq 50 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:أوجد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين؟

الحل:

الطريقة الأولى: طريقة الصيغة العامة

يتم تحويل القيد الثاني والثالث كما سبق شرحها في الأمثلة السابقة، ومع إفتراض أن Y_1, Y_2, Y_3 هي متغيرات النموذج المقابل كمايلي:

$$MIN(W) = 60Y_1 + 40Y_2 - 50Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03Y_1 + Y_2 - 02Y_3 \geq 04 \\ Y_1 - 02Y_2 - 03Y_3 \geq 08 \\ 04Y_1 + 03Y_2 - Y_3 \geq 06 \\ Y_1, Y_3 \geq 0 ; \forall Y_2 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

$MIN(W)$			$MAX(Z)$				
			متغيرات القرار للنموذج الأولي				
			$X_1 \geq 0$	$X_2 \geq 0$	$X_3 \geq 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$Y_1 \geq 0$	Y_1	**03**	**01**	**04**	≤ 60	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	**01**	**−02**	**03**	$= 40$	
	$Y_3 \leq 0$	Y_3	**02**	**03**	**01**	≥ 50	
			≥ 04	≥ 08	≥ 06		
			القيود الهيكلية للنموذج المقابل				

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W) = 60Y_1 + 40Y_2 + 50Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03Y_1 + Y_2 + 02Y_3 \geq 04 \\ Y_1 - 02Y_2 + 03Y_3 \geq 08 \\ 04Y_1 + 03Y_2 + Y_3 \geq 06 \\ Y_1 \geq 0; \forall Y_2; Y_3 \leq 0 \end{cases}$$

الحالة الثانية:القيود من نوع متراجحات أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو على شكل مساواة و المتغيرات غير مقيدة

في هذه الحالة يمكن إيجاد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين:

الطريقة الأولى: تتمثل هذه الطريقة في تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة العامة حسب مبدا الأمثلية المعطى إما تعظيم (MAX) أو تقليل (MIN)

فإذا كان لدينا نموذج الصيغة العامة التالي

$$MAX(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 \geq b_3 \\ X_2, X_3 \geq 0; \forall X_1 \end{cases}$$

يتم إجراء تحويل لكل من القيدين الثاني والثالث حسب الخطوات السابق شرحها، فيكون النموذج المقابل بالصيغة التالية:

$$MIN(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 - b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 - a_{31}Y_3 = C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 - a_{32}Y_3 \geq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 - a_{33}Y_3 \geq C_3 \\ Y_1, Y_3 \geq 0 \ ; \forall Y_2 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: هذه الطريقة تمكننا من الحصول على النموذج المرافق دون أن نقوم بتحويل المسالة الأولية إلى الصيغة العامة،إذا كانت المسالة الأولية عبارة عن تعظيم بصيغة مختلطة من القيود فإننا نستطيع إيجاد النموذج المرافق كمايلي:

– نفرض أن القيد الأول كان من نوع أقل أو يساوي($\leq$) في النموذج الأولي،فإن المتغير في النموذج المقابل لا بد ان يكون من نوع أكبر أو يساوي ($\geq$).

–نفرض أن القيد الأول كان من نوع مساواة ($=$) في النموذج الأولي،فإن المتغير في النموذج المقابل لا بد أن يكون غير مقيد بإشارة.

– نفرض أن القيد الثاني كان من نوع أكبر أو يساوي($\geq$) في النموذج الأولي،فإن المتغير في النموذج المقابل لا بد ان يكون من نوع أقل أو يساوي ($\geq$).

والجدول التالي يوضح النقاط السابق شرحها

$MIN(W)$		$MAX(Z)$					
		متغيرات القرار للنموذج الأولي					
			$\forall X_1$	$X_2 \geq 0$	$X_3 \geq 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$Y_1 \geq 0$	Y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\leq b_1$	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$= b_2$	
	$Y_3 \leq 0$	Y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\geq b_3$	
			$= C_1$	$\geq C_2$	$\geq C_3$		
		القيود الهيكلية للنموذج المقابل					

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 = C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \geq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 \geq C_3 \\ Y_1 \geq 0 \ ; \forall Y_2 ; Y_3 \leq 0 \end{cases}$$

مثال04: إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 04X_1 + 08X_2 + 06X_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + X_2 + 04X_3 \le 60 \\ X_1 - 02X_2 + 03X_3 = 40 \\ 02X_1 + 03X_2 + X_3 \ge 50 \\ X_1, X_3 \ge 0; \forall X_2 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين؟

الحل:

الطريقة الأولى: طريقة الصيغة العامة

يتم تحويل القيد الثاني والثالث كي يتوافق مع الصيغة العامة حسب مبدأ الأمثلية كما سبق شرحها في الأمثلة السابقة، ومع إفتراض أن Y_1, Y_2, Y_3 هي متغيرات النموذج المقابل كمايلي:

$$MIN(W) = 60Y_1 + 40Y_2 - 50Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03Y_1 + Y_2 - 02Y_3 \ge 04 \\ Y_1 - 02Y_2 - 03Y_3 = 08 \\ 04Y_1 + 03Y_2 - Y_3 \ge 06 \\ Y_1, Y_3 \ge 0; \forall Y_2 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

$MIN(W)$		$MAX(Z)$					
		متغيرات القرار للنموذج الأولي					
			$X_1 \ge 0$	$\forall X_2$	$X_3 \ge 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$Y_1 \ge 0$	Y_1	**03**	**01**	**04**	≤ 60	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	**01**	**-02**	**03**	$= 40$	
	$Y_3 \le 0$	Y_3	**02**	**03**	**01**	≥ 50	
			≥ 04	$= 08$	≥ 06		
		القيود الهيكلية للنموذج المقابل					

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W) = 60Y_1 + 40Y_2 + 50Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03Y_1 + Y_2 + 02Y_3 \ge 04 \\ Y_1 - 02Y_2 + 03Y_3 = 08 \\ 04Y_1 + 03Y_2 + Y_3 \ge 06 \\ Y_1 \ge 0; \forall Y_2; Y_3 \le 0 \end{cases}$$

الحالة الثالثة: القيود على شكل مساواة و المتغيرات مقيدة بإشارة

في هذه الحالة يمكن إيجاد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين:

الطريقة الأولى: تتمثل هذه الطريقة في تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة العامة حسب مبدا الأمثلية المعطى إما تعظيم (MAX) أو تقليل (MIN)

فإذا كان لدينا نموذج الصيغة العامة التالي

$$MAX(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

يتم إجراء تحويل لكل القيود حسب الخطوات السابق شرحها، فيكون النموذج المقابل بالصيغة التالية:

$$MIN(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \geq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 \geq C_3 \\ \forall Y_1, Y_2, Y_3 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

$MIN(W)$		$MAX(Z)$					
		متغيرات القرار للنموذج الأولي					
			$X_1 \geq 0$	$X_2 \geq 0$	$X_3 \geq 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$\forall Y_1$	Y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$= b_1$	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$= b_2$	
	$\forall Y_3$	Y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$= b_3$	
			$\geq C_1$	$\geq C_2$	$\geq C_3$		
		القيود الهيكلية للنموذج المقابل					

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \geq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 \geq C_3 \\ \forall Y_1, Y_2, Y_3 \end{cases}$$

مثال05:إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z)=03X_1+02X_2+06X_3$$

$$S/C=\begin{cases}06X_1+03X_2+08X_3=150\\04X_1+08X_2+12X_3=120\\06X_1+04X_2+04X_3=100\\X_1,X_2,X_3\geq 0\end{cases}$$

المطلوب:أوجد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين؟

الحل:

الطريقة الأولى: طريقة الصيغة العامة

يتم تحويل جميع القيود كما سبق شرحها في الأمثلة السابقة، ومع إفتراض أن Y_1,Y_2,Y_3 هي متغيرات النموذج المقابل كمايلي:

$$MIN(W)=150Y_1+120Y_2+100Y_3$$

$$S/C=\begin{cases}06Y_1+04Y_2+06Y_3\geq 03\\03Y_1+08Y_2+04Y_3\geq 02\\08Y_1+12Y_2+04Y_3\geq 06\\\forall Y_1,Y_2,Y_3\end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

$MIN(W)$			$MAX(Z)$				
			متغيرات القرار للنموذج الأولي				
			$X_1\geq 0$	$X_2\geq 0$	$X_3\geq 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$\forall Y_1$	Y_1	**06**	**03**	**08**	$=150$	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	**04**	**08**	**12**	$=120$	
	$\forall Y_3$	Y_3	**06**	**04**	**04**	$=100$	
			≥ 03	≥ 02	≥ 06		
			القيود الهيكلية للنموذج المقابل				

ويمكن كتابة النموذج المرافق كمايلي:

$$MIN(W)=150Y_1+120Y_2+100Y_3$$

$$S/C=\begin{cases}06Y_1+04Y_2+06Y_3\geq 03\\03Y_1+08Y_2+04Y_3\geq 02\\08Y_1+12Y_2+04Y_3\geq 06\\\forall Y_1,Y_2,Y_3\end{cases}$$

الحالة الرابعة: القيود على شكل مساواة و المتغيرات غير مقيدة بإشارة

في هذه الحالة يمكن إيجاد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين:

الطريقة الأولى: طريقة الصيغة العامة

تتمثل هذه الطريقة في تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة العامة حسب مبدا الأمثلية المعطى إما تعظيم (MAX) أو تقليل (MIN)

فإذا كان لدينا نموذج الصيغة العامة التالي

$$MAX(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2 \\ a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3 \\ X_1 \geq 0; X_2 \leq 0; \forall X_3 \end{cases}$$

يتم إجراء تحويل لكل القيود حسب الخطوات السابق شرحها، فيكون النموذج المقابل بالصيغة التالية:

$$MIN(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \leq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 = C_3 \\ \forall Y_1, Y_2, Y_3 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة الجدول

$MIN(W)$			$MAX(Z)$				
			متغيرات القرار للنموذج الأولي				
			$X_1 \geq 0$	$X_2 \leq 0$	$\forall X_3$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$\forall Y_1$	Y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$=b_1$	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$=b_2$	
	$\forall Y_3$	Y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$=b_3$	
			$\geq C_1$	$\leq C_2$	$=C_3$		
			القيود الهيكلية للنموذج المقابل				

وبالتالي فالنموذج المقابل من خلال الجدول هو كالتالي:

$$MIN(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + b_3Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 \geq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 \leq C_2 \\ a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 = C_3 \\ \forall Y_1, Y_2, Y_3 \end{cases}$$

مثال06:إذا كان لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z)=20X_1+10X_2+08X_3$$

$$S/C=\begin{cases}03X_1+04X_2+05X_3=210\\02X_1+02X_2+04X_3=80\\04X_1+06X_2+03X_3=95\\X_1\le 0;\forall X_2;X_3\ge 0\end{cases}$$

المطلوب:أوجد النموذج المقابل بطريقتين مختلفتين؟

الحل:

الطريقة الأولى: طريقة الصيغة العامة

يتم تحويل جميع القيود كما سبق شرحها في الأمثلة السابقة، ومع إفتراض أن Y_1,Y_2,Y_3 هي متغيرات النموذج المقابل كمايلي:

$$MIN(W)=210Y_1+80Y_2+95Y_3$$

$$S/C=\begin{cases}03Y_1+02Y_2+02Y_3\ge 20\\04Y_1+02Y_2+06Y_3=10\\05Y_1+04Y_2+03Y_3\le 08\\\forall Y_1,Y_2,Y_3\end{cases}$$

الطريقة الثانية:طريقة الجدول

		$MAX(Z)$					
		متغيرات القرار للنموذج الأولي					
$MIN(W)$			$X_1\le 0$	$\forall X_2$	$X_3\ge 0$		
			X_1	X_2	X_3		
متغيرات القرار للنموذج المقابل	$\forall Y_1$	Y_1	**03**	**04**	**05**	$=210$	**القيود الهيكلية للنموذج الأولي**
	$\forall Y_2$	Y_2	**02**	**02**	**04**	$=80$	
	$\forall Y_3$	Y_3	**02**	**06**	**03**	$=95$	
			≥ 20	$=10$	≤ 08		
		القيود الهيكلية للنموذج المقابل					

ويمكن كتابة النموذج المرافق كمايلي:

$$MIN(W)=210Y_1+80Y_2+95Y_3$$

$$S/C=\begin{cases}03Y_1+02Y_2+02Y_3\ge 20\\04Y_1+02Y_2+06Y_3=10\\05Y_1+04Y_2+03Y_3\ge 08\\\forall Y_1,Y_2,Y_3\end{cases}$$

05-العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج المقابل

توجد علاقة بين النموذج الأولي والنموذج المقابل، فبعد تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل يمكننا إستنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل دون حله وذلك إنطلاقا من الحل المثل للنموذج الأولي، وذلك من خلال إتباع الخطوات التالية:

01-متغيرات القرار في النموذج الأولي تصبح متغيرات فائضة في النموذج المقابل وتكتب أسفل جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

02-المتغيرات الفائضة في النموذج الأولي تصبح متغيرات القرار في النموذج المقابل وتكتب أسفل جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي.

03-المتغيرات الأساسية في النموذج الأولي تصبح متغيرات غير أساسية في النموذج المقابل.

04- المتغيرات غير الأساسية في النموذج الأولي تصبح متغيرات أساسية في النموذج المقابل.

05- كميات الإنتاج في النموذج الأولي تصبح أسعار الظل في النموذج المقابل.

06-أسعار الظل في النموذج الأولي تصبح كميات الإنتاج في النموذج المقابل.

07-المعاملات الفنية في النموذج الأولي تؤخذ بإشارة معاكسة (إما موجب أو سالب) في النموذج المقابل.

08-قيمة الدالة الإقتصادية في النموذج الأولي هي نفسها في النموذج المقابل.

مثال07:ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي :

$$MAX(Z)=05X_1+02X_2+10X_3+X_4$$

$$S/C=\begin{cases}02X_1+X_2+04X_3+07X_4\le 1000\\ \quad 05X_2+02X_3+07X_4\le 200\\ 04X_1+03X_2+06X_3+13X_4\le 2000\\ X_1,X_2,X_3,X_4\ge 0\end{cases}$$

الجدول التالي يوضح الحل الأمثل للنموذج الأولي (Primal)

C_B	C_j	05	02	10	01	0	0	0	b_i R.H.S
	BASIC	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	
05	X_1	01	−9/2	0	−7/2	1/2	−01	0	300
10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	100
0	S_3	0	06	0	06	−02	01	01	200
Z_j-C_j		0	1/2	0	33/2	5/2	0	0	Z=2500

المطلوب:

01-أكتب النموذج المقابل؟

02-إنطلاقا من جدول الحل المثل للنموذج الأولي (Primal)،إستنتج الحل الأمثل للنموذج المقابل (Dual)؟

الحل:

01-كتابة النموذج المقابل (المرافق أو الثنائية)

$$MIN(W) = 1000Y_1 + 200Y_2 + 2000Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 02Y_1 + 04Y_3 \geq 05 \\ Y_1 + 05Y_2 + 03Y_3 \geq 02 \\ 04Y_1 + 02Y_2 + 06Y_3 \geq 10 \\ 07Y_1 + 07Y_2 + 13Y_3 \geq 01 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

02-إستنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل إنطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الأولي

لدينا جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي كمايلي:

			متغيرات النموذج الأولي									
			المتغيرات الأساسية				**المتغيرات الفائضة**					
	C_B	C_j	**05**	**02**	**10**	**01**	**0**	**0**	**0**	b_i R.H.S		
		BASIC	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3			
متغيرات النموذج الأولي	**05**	X_1	01	−9/2	0	−7/2	1/2	−01	0	**300**	S_1	**متغيرات النموذج المقابل**
	10	X_3	0	5/2	01	7/2	0	1/2	0	**100**	S_3	
	0	S_3	0	06	0	06	−02	01	01	**200**	Y_3	
	Z_j-C_j		**0**	**1/2**	**0**	**33/2**	**5/2**	**0**	**0**	**Z=2500**		
			S_1	S_2	S_3	S_4	Y_1	Y_2	Y_3			
			المتغيرات الفائضة				**المتغيرات الأساسية**					
			متغيرات النموذج المقابل									

من خلال الجدول التالي يمكننا إستنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل كمايلي:

01-المتغيرات الأساسية في النموذج الأولي هي (X_1, X_3, S_3)تصبح متغيرات غير أساسية في النموذج المقابل وهذه المتغيرات هي (S_1, S_3, Y_3)

02-المتغيرات غير الأساسية في النموذج الأولي هي (X_2, X_4, S_1, S_2)تصبح متغيرات أساسية في النموذج المقابل وهذه المتغيرات هي (S_2, S_4, Y_1, Y_2).

03–كميات الإنتاج في النموذج الأولي هي $(X_1 = 300, X_3 = 100, S_3 = 200)$ تصبح أسعار الظل في النموذج المقابل $(S_1 = -300, S_3 = -100, Y_3 = -200)$

04–أسعار الظل في النموذج الأولي $(S_1 = 5/2)$ تصبح كميات الإنتاج في النموذج المقابل وهي $(Y_1 = 5/2)$

05–المعاملات الفنية تأخذ بإشارة معاكسة لإشارتها في جدول الحل الأمثل.

من خلال ماسبق يكون جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل كمايلي:

جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل

C_B	C_j / BASIC	1000	200	2000	0	0	0	0	b_i R.H.S	
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_2	0	0	−06	9/2	01	−5/2	0	1/2	X_2
0	S_4	0	0	−06	7/2	0	−7/2	01	33/2	X_4
1000	Y_1	01	0	02	−1/2	0	0	0	5/2	S_1
200	Y_2	0	01	−01	01	0	−1/2	0	0	S_2
W_j-C_j		0	0	−200	−300	0	−100	0	W=2500	
		S_1	S_2	S_3	X_1	X_2	X_3	X_4		

مثال08: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي :

$$MIN(Z) = 10X_1 + 24X_2 - 08X_3$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + 03X_2 - 04X_3 \geq 12 \\ 02X_1 + 03X_2 \geq 48 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

الجدول التالي يوضح الحل الأمثل للنموذج الأولي (Primal)

C_B	C_j / BASIC	10	24	−08	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	
10	X_1	01	3/2	0	0	−1/2	24
−08	X_3	0	−3/8	01	1/4	−1/8	03
Z_j-C_j		0	−06	0	−02	−04	Z=216

المطللوب:

01–أكتب النموذج المقابل؟

02–إنطلاقا من جدول الحل المثل للنموذج الأولي (Primal)،إستنتج الحل الأمثل للنموذج المقابل (Dual)؟

الحل:

01–كتابة النموذج المقابل (المرافق أو الثنائية)

$$MAX(W)=12Y_1+48Y_2$$

$$S/C=\begin{cases}01Y_1+02Y_3\leq 10\\ 03Y_1+03Y_2\leq 24\\ -04Y_1\leq -08\\ Y_1,Y_2\geq 0\end{cases}$$

02–إستنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل إنطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الأولي

لدينا جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي كمايلي:

C_B	C_j / BASIC	10	24	−08	0	0	b_i R.H.S	
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2		
10	X_1	01	3/2	0	0	−1/2	**24**	S_1
−08	X_3	0	−3/8	01	1/4	−1/8	**03**	S_3
Z_j-C_j		**0**	**−06**	**0**	**−02**	**−04**	**Z=216**	
		S_1	S_2	S_3	Y_1	Y_2		

من خلال الجدول التالي يمكننا إستنتاج الحل الأمثل للنموذج المقابل كمايلي:

01–المتغيرات الأساسية في النموذج الأولي هي (X_1,X_3)تصبح متغيرات غير أساسية في النموذج المقابل وهذه المتغيرات هي (S_1,S_3)

02–المتغيرات غير الأساسية في النموذج الأولي هي (X_2,S_1,S_2)تصبح متغيرات أساسية في النموذج المقابل وهذه المتغيرات هي (S_2,Y_1,Y_2).

03–كميات الإنتاج في النموذج الأولي هي $(X_1=24,X_3=03)$ تصبح أسعار الظل في النموذج المقابل $(S_1=24,S_3=03)$

04–أسعار الظل في النموذج الأولي $(S_1=-02,S_2=-04)$ تصبح كميات الإنتاج في النموذج المقابل وهي $(Y_1=02,Y_2=04)$

05–المعاملات الفنية تأخذ بإشارة معاكسة لإشارتها في جدول الحل الأمثل.

من خلال ماسبق يكون جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل كمايلي:

جدول الحل الأمثل للنموذج المقابل

C_B	C_j / BASIC	12	48	0	0	0	b_i R.H.S	
		Y_1	Y_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_2	0	0	−3/2	01	3/8	06	X_2
12	Y_1	01	0	0	0	−1/4	02	S_1
48	Y_2	0	01	1/2	0	1/8	04	S_2
W_j-C_j		0	0	24	0	03	W=216	
		S_1	S_2	X_1	X_2	X_3		

06-طريقة السمبلكس المقابلة (The Dual Simples Méthod)

01-مقدمة: إبتكر **ليمكي (C.E.Lemke)** هذه الطريقة في رسالة الدكتوره الخاصة به سنة 1953، ثم نشرها بعد ذلك في بحث له سنة 1954، ولا تخرج الطريقة عن كونها مبدل لطريقة السمبلكس العادية، بحيث تبدأ بتوفير الإمكانية بحثا عن المثالية، بينما الطريقة العادية تبدأ بالبحث عن المثالية في ظل المحافظة على الإمكانية.

بإستخدم طريقة السمبكس البسيطة ولكي نضمن الحصول على حل أمثل يجب أن تكون قيم شعاع الثوابت أو الكميات المتاحة في الطرف الأيمن من القيود موجبة، فإذا كان الجانب الأيمن سالب القيم فعندئذ سوف يتعذر علينا الحصول على الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية، كما أنه توجد حالات أخرى وهي أثناء الحل بطريقة السمبلكس البسيطة (العادية) وعند الإنتقال من جدول سمبلكس إلى آخر يظهر في الجانب الأيمن الإشارة السالبة لبعض قيم المتغيرات أو جميعها.

فالعلاج التام لما ورد للحالتين السابق ذكرهما وللحصول على الحل الأمثل وبشكل أكيد يجب إتباع طريقة السمبلكس الثنائية (Dual Simples Méthod) لتجاوز ما يظهر من عقبات مماثلة تمنع الوصول إلى الحل الأمثل.

02-خطوات الحل بإستخدام طريقة السمبلكس المقابلة

01-نحول النموذج إلى الشكل القياسي بإضافة المتغيرات الفائضة فقط،مع ضمان عدم ظهور المتغيرات الإصطناعية.

02-إختيار المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) لمتغير الحل الأساسي والذي يمتلك أقل قيمة سالبة أوأكبر قيمة بالقيمة المطلقة.

03-لتحديد المتغير الداخل(عمود الإرتكاز) من المتغيرات غير الأساسية، نقوم بإيجاد النسبة وذلك بقسمة معاملات سطر التقييم على المعاملات الفنية لسطر لإرتكاز للمتغير الخارج بحيث نختار المعاملات التي تحمل إشارة سالبة (إهمال الأرقام الموجبة والمعدومة).

04-نختار من بين هذه النسب وفق الحالتين التاليتين

أكبر نسبة في التعظيم $MAX\left[\frac{Z_j - C_j}{a_{ij}}\right]$ وأقل نسبة في التدنية $MIN\left[\frac{Z_j - C_j}{a_{ij}}\right]$

05–نتبع نفس إجراءات طريقة السمبلكس العادية للوصول إلى الحل الأمثل.

06–إذا وجدت قيما سالبة في الحل الأساسي الجديد لأحد المتغيرات الأساسية نكرر الخطوات السابقة، وإلا نطبق إجراءات طريقة السمبلكس العادية وقواعدها.

مثال09: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MIN(Z) = X_1 + 04X_2 + 03X_4$$

$$S/C = \begin{cases} X_1 + 02X_2 - X_3 + X_4 \geq 03 \\ -02X_1 - X_2 + 04X_3 + X_4 \geq 02 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

01–أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس المقابلة؟

الحل:

01–نحول النموذج إلى الصيغة القياسية مع ضمان عدم ظهور المتغيرات الإصطناعية وظهور المتغيرات الفائضة فقط، لذا نقوم بضرب طرفي المتراجحتين في (-01) ثم نحول إلى الصيغة القياسية.

$$MIN(Z) = X_1 + 04X_2 + 03X_4$$

$$S/C = \begin{cases} -X_1 - 02X_2 + X_3 - X_4 \leq -03 \\ 02X_1 + X_2 - 04X_3 - X_4 \leq -02 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{cases}$$

نحول النموذج أعلاه إلى الصيغة القياسية كمايلي:

$$MIN(Z) = X_1 + 04X_2 + 03X_4 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C = \begin{cases} -X_1 - 02X_2 + X_3 - X_4 + S_1 = -03 \\ 02X_1 + X_2 - 04X_3 - X_4 + S_2 = -02 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0;\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

02–نشكل جدول الحل الإبتدائي (الأولي)

جدول الحل الإبتدائي

C_B	C_j / BASIC	01	04	0	03	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
0	S_1	-01	-02	01	-01	01	0	-03
0	S_2	02	01	-04	-01	0	01	-02
Z_j-C_j		-01	-04	0	-03	0	0	Z=0
خارج القسمة RATIO		01	02	0	03	/	/	

من خلال جدول الحل الإبتدائي نلاحظ أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة مما يعني أن الحل أمثل، لاكن بملاحظة الكميات المتاحة نجدها سالبة (تتعارض مع شرط عدم السلبية)، فبظهور الإشارة السالبة للمتغيرات أو بعضها ولغرض الحصول على حل أمثل يجب إتباع طريقة السمبلكس المقابلة.

02–تحديد المتغير الخارج (سطر الإرتكاز)من المتغيرات الأساسية: نلاحظ أن أقل قيمة سالبة هي للمتغير S_1 إذن S_1 يخرج من الحل.

03–تحديد المتغير الداخل (عمود الإرتكاز): لتحديد المتغير الداخل نقوم بقسمة قيم سطر التقييم على المعاملات السالبة فقط لسطر الإرتكاز مع ترشيح أقل نسبة للدخول، وبالتالي فإن المتغر الداخل هو X_1 ونقطة الإرتكاز هي 01–

نشكل جدول السمبلكس الثاني كالتالي

C_B	C_j / BASIC	01	04	0	03	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
01	X_1	01	02	-01	01	-01	0	**03**
0	S_2	0	-03	-02	-03	02	01	**-08**
Z_j-C_j		**0**	**-02**	**-01**	**-02**	**-01**	**0**	**Z=03**
خارج القسمة RATIO		**/**	**2/3**	**1/2**	**2/3**	**-1/2**	**/**	

المتغير الخارج هو S_2 (سطر الإرتكاز) والمتغير الداخل هو X_3 (عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي 02–

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	01	04	0	03	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
01	X_1	01	7/2	0	5/2	-02	-1/2	**07**
0	X_3	0	3/2	01	3/2	-01	-1/2	**04**
Z_j-C_j		**0**	**-1/2**	**0**	**-1/2**	**-02**	**-1/2**	**Z=07**

نلاحظ من خلال سطر التقييم أن جميع القيم سالبة أو معدومة إذن فقد توصلنا إلى الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية: $X_1 = 07, X_3 = 04$

المتغيرات غير الأساسية: $S_1 = S_2 = X_2 = X_4 = 0$

أسعار الظل: $S_1 = 02, S_2 = \frac{01}{02}$

مثال10: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 20X_1 + 25X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 02X_1 + 03X_2 \le 40 \\ X_1 + 02X_2 \quad \le 20 \\ 03X_1 + X_2 \quad \le 30 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب:

01-أوجد النموذج المقابل؟

02-أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس المقابلة؟

الحل:

01-نحول الصيغة العامة للنموذج إلى النموذج المقابل كمايلي:

$$MIN(W) = 40Y_1 + 20Y_2 + 30Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} 02Y_1 + Y_2 + 03Y_3 \ge 20 \\ 03Y_1 + 02Y_2 + Y_3 \ge 25 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

02-نحول النموذج إلى الصيغة القياسية مع ضمان عدم ظهور المتغيرات الإصطناعية و ظهور المتغيرات الفائضة فقط، لذا نقوم بضرب طرفي المتراجحات في(-01) ثم نحول إلى الصيغة القياسية.

$$MIN(W) = 40Y_1 + 20Y_2 + 30Y_3$$

$$S/C = \begin{cases} -02Y_1 - Y_2 - 03Y_3 \le -20 \\ -03Y_1 - 02Y_2 - Y_3 \le -25 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

نحول النموذج المقابل إلى الصيغة القياسية

$$MIN(W) = 40Y_1 + 20Y_2 + 30Y_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C = \begin{cases} -02Y_1 - Y_2 - 03Y_3 + S_1 = -20 \\ -03Y_1 - 02Y_2 - Y_3 + S_2 = -25 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي (الإبتدائي)

C_B	C_j / BASIC	40	20	30	0	0	b_i R.H.S
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	
0	S_1	-02	-01	-03	01	0	**-20**
0	S_2	-03	-02	-01	0	01	**-25**
Z_j-C_j		**-40**	**-20**	**-30**	**0**	**0**	**Z=0**
خارج القسمة RATIO		**40/3**	**10**	**30**	**/**	**/**	

المتغير الخارج هو S_2 (سطر الإرتكاز) والمتغير الداخل هو Y_2 (عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي -02

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	40	20	30	0	0	b_i R.H.S
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	
0	S_1	-1/2	0	-5/2	01	-1/2	**-15/2**
20	Y_2	3/2	01	1/2	0	-1/2	**25/2**
Z_j-C_j		**-10**	**0**	**-20**	**0**	**10**	**Z=250**
خارج القسمة RATIO		**20**	**/**	**08**	**/**	**-20**	

المتغير الخارج هو S_1 (سطر الإرتكاز) والمتغير الداخل هو Y_3 (عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي $-5/2$

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	40	20	30	0	0	b_i R.H.S
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	
30	Y_3	1/5	0	01	-2/5	1/5	**03**
20	Y_2	7/5	01	0	1/5	-3/5	**11**
Z_j-C_j		**-06**	**0**	**0**	**-08**	**-06**	**Z=310**

نلاحظ من خلال سطر التقييم أن جميع القيم سالبة أو معدومة إذن فقد توصلنا إلى الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية: $Y_2 = 11, Y_3 = 03$

المتغيرات غير الأساسية: $Y_1 = S_1 = S_2 = 0$

أسعار الظل: $S_1 = 08, S_2 = 06$

مثال11: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 05X_1 + 16X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 \leq 180 \\ X_1 + 03X_2 \leq 280 \\ X_1 \geq 20 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

01-أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس المقابلة؟

الحل:

01-نحول النموذج إلى الصيغة القياسية مع ضمان عدم ظهور المتغيرات الإصطناعية وظهور المتغيرات الفائضة فقط، لذا نقوم بضرب طرفي المتراجحتين رقم 03 في (01-) ثم نحول إلى الصيغة القياسية.

$$MAX(Z) = 05X_1 + 16X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 \leq 180 \\ X_1 + 03X_2 \leq 280 \\ -X_1 \leq -20 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نحول النموذج أعلاه إلى الصيغة القياسية كمايلي:

$$MAX(Z) = 05X_1 + 16X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 + S_1 = 180 \\ X_1 + 03X_2 + 0S_2 = 280 \\ -X_1 + S_3 = -20 \\ X_1, X_2 \geq 0; S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الإبتدائي (الأولي)

C_B	C_j / BASIC	05	16	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	03	02	01	0	0	180
0	S_2	01	03	0	01	0	280
0	S_3	-01	0	0	0	01	-20
Z_j-C_j		-05	-16	0	0	0	Z=0
خارج القسمة RATIO		05	∞	/	/	/	

المتغير الخارج هوS_3 (سطر الإرتكاز)أما العمود الداخل فيتم تحديده من المتغيرات غير الأساسية وهوX_1 ونقطة الإرتكاز هي 01-

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	05 X_1	16 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	b_i R.H.S
0	**S_1**	0	02	01	01	03	**120**
0	**S_2**	0	03	0	0	01	**260**
05	**X_1**	01	0	0	0	-01	**20**
Z_j-C_j		**0**	**-16**	**0**	**0**	**-05**	**Z=100**

بما أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة إذن فقد توصلنا إلى الحل الأمثل

المتغيرات الأساسية: $X_1 = 20, S_1 = 120, S_2 = 260$

المتغيرات غير الأساسية: $X_2 = S_3 = 0$

أسعار الظل: $S_3 = 05$

مثال12: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية الذي تم مناقشته في المحور الرابع الصفحة 53 التالي

$$MIN(W) = 2400X_1 + 1000X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 \geq 20 \\ 06X_1 + X_2 \quad \geq 30 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

01-أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس المقابلة؟

الحل:

01- نحول النموذج إلى الصيغة القياسية مع ضمان عدم ظهور المتغيرات الإصطناعية وظهور المتغيرات الفائضة فقط، لذا نقوم بضرب طرفي المتراجحتين في (01-) ثم نحول إلى الصيغة القياسية.

$$MIN(W) = 2400X_1 + 1000X_2$$

$$S/C = \begin{cases} -03X_1 - 02X_2 \leq -20 \\ -06X_1 - X_2 \quad \leq -30 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نحول النموذج أعلاه إلى الصيغة القياسية كمايلي:

$$MIN(W) = 2400X_1 + 1000X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$S/C = \begin{cases} -03X_1 - 02X_2 + S_1 = -20 \\ -06X_1 - X_2 + S_2 \quad = -30 \\ X_1, X_2 \geq 0; S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

02-نشكل جدول الحل الإبتدائي (الأولي)

C_B	C_j / BASIC	2400 X_1	1000 X_2	0 S_1	0 S_2	b_i R.H.S
0	S_1	-03	-02	01	0	-20
0	S_2	-06	-01	0	01	-30
W_j-C_j		-2400	-1000	0	0	W=0
خارج القسمة RATIO		400	1000	/	/	

المتغير الخارج هو S_2 (سطر الإرتكاز)أما العمود الداخل فيتم تحديده من المتغيرات غير الأساسية وهو X_1 ونقطة الإرتكاز هي 06-

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	2400 X_1	1000 X_2	0 S_1	0 S_2	b_i R.H.S
0	S_1	0	-3/2	01	-1/2	-05
2400	X_1	01	1/6	0	-1/6	05
W_j-C_j		0	-600	0	400	W=12000
خارج القسمة RATIO		/	400	/	-800	

المتغير الخارج هو S_1 (سطر الإرتكاز)أما العمود الداخل فيتم تحديده من المتغيرات غير الأساسية وهو X_2 ونقطة الإرتكاز هي 3/2-

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	2400 X_1	1000 X_2	0 S_1	0 S_2	b_i R.H.S
1000	X_2	0	01	-2/3	1/3	10/3
2400	X_1	01	0	1/9	-2/9	40/9
W_j-C_j		0	0	-400	-200	W=14000

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة وبالتالي نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية: $X_1 = \frac{40}{09}, X_2 = \frac{10}{03}$

المتغيرات غير الأساسية: $S_1 = S_2 = 0$

أسعار الظل: $S_1 = 400, S_2 = 200$

ملاحظة:

– بإستخدام طريقة السمبلكس المقابلة توصلنا إلى نفس النتيجة بإستخدام طريقة السمبلكس العادية والتي تم إستخدام فيها طريقتين هما M الكبيرة (BIG–M) وطريقة المرحلتين (Two–Phase).

–في طريقة السمبلكس المقابلة توصلنا إلى الحل الأمثل من خلال ثلاث جداول، اما بإستخدام طريقة السمبلكس العادية (طريقة M الكبيرة (BIG–M)) فقد توصلنا إلى الحل الأمثل من خلال ستة جداول،أما بإستخدام طريقة المرحلتين (Two–Phase) فقد توصلنا إلى الحل الأمثل من خلال أربعة جداول،مما يعني أن طريقة السمبلكس المقابلة توفر الوقت والجهد.

مثال13: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية الذي تم مناقشته في المحور الرابع الصفحة 47 التالي

$$\mathrm{MAX}(Z)=05X_1+02X_2+10X_3+X_4$$

$$S/C=\begin{cases}02X_1+X_2+04X_3+07X_4\le 1000\\ \quad 05X_2+02X_3+07X_4\le 200\\ 04X_1+03X_2+06X_3+13X_4\le 2000\\ X_1,X_2,X_3,X_4\ge 0\end{cases}$$

المطلوب:

01–أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس المقابلة؟

الحل:

01–نحول النموذج الأولي إلى النموذج المقابل كمايلي:

$$\mathrm{MIN}(W)=1000Y_1+200Y_2+2000Y_3$$

$$S/C=\begin{cases}02Y_1+04Y_3\ge 05\\ Y_1+05Y_2+03Y_3\ge 02\\ 04Y_1+02Y_2+06Y_3\ge 10\\ 07Y_1+07Y_2+13Y_3\ge 01\\ Y_1,Y_2,Y_3\ge 0\end{cases}$$

02–نحول النموذج إلى الصيغة القياسية مع ضمان عدم ظهور المتغيرات الإصطناعية و ظهور المتغيرات الفائضة فقط، لذا نقوم بضرب طرفي المتراجحات في(01–) ثم نحول إلى الصيغة القياسية.

$$\mathrm{MIN}(W)=1000Y_1+200Y_2+2000Y_3$$

$$S/C=\begin{cases}-02Y_1-04Y_3\le -05\\ -Y_1-05Y_2-03Y_3\le -02\\ -04Y_1-02Y_2-06Y_3\le -10\\ -07Y_1-07Y_2-13Y_3\le -01\\ Y_1,Y_2,Y_3\ge 0\end{cases}$$

نحول النموذج المقابل إلى الصيغة القياسية كمايلي:

$$MIN(W) = 1000Y_1 + 200Y_2 + 2000Y_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$S/C = \begin{cases} -02Y_1 - 04Y_3 + S_1 = -05 \\ -Y_1 - 05Y_2 - 03Y_3 + S_2 = -02 \\ -04Y_1 - 02Y_2 - 06Y_3 + S_3 = -10 \\ -07Y_1 - 07Y_2 - 13Y_3 + S_4 = -01 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0; S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأولي (الإبتدائي)

C_B	C_j / BASIC	1000	200	2000	0	0	0	0	b_i R.H.S
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	-02	0	-04	01	0	0	0	-05
0	S_2	-01	-05	-03	0	01	0	0	-02
0	S_3	-04	-02	-06	0	0	01	0	-10
0	S_4	-07	-07	-13	0	0	0	01	-01
W_j-C_j		-1000	-200	-2000	0	0	0	0	W=0
خارج القسمة RATIO		250	100	2000/6	/	/	/	/	

S_3 يخرج من الحل (سطر الإرتكاز) و Y_2 يدخل إلى الحل (عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي -02

جدول السمبلكس الثاني

C_B	C_j / BASIC	1000	200	2000	0	0	0	0	b_i R.H.S
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	-02	0	-04	01	0	0	0	-05
0	S_2	09	0	12	0	01	-5/2	0	23
200	Y_2	02	01	03	0	0	-1/2	0	05
0	S_4	07	0	08	0	0	-7/2	01	34
W_j-C_j		-600	0	-1400	0	0	-100	0	W=1000
خارج القسمة RATIO		300	/	350	/	/	∞	/	

S_1 يخرج من الحل (سطر الإرتكاز) و Y_1 يدخل إلى الحل (عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي -02

جدول السمبلكس الثالث

C_B	C_j / BASIC	1000	200	2000	0	0	0	0	b_i R.H.S
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
1000	Y_1	01	0	02	-1/2	0	0	0	**5/2**
0	S_2	0	0	-06	9/2	01	-5/2	0	**1/2**
200	Y_2	0	01	-01	01	0	-1/2	0	**0**
0	S_4	0	0	-06	7/2	0	-7/2	01	**33/2**
W_j-C_j		**0**	**0**	**-200**	**-300**	**0**	**-100**	**0**	**W=2500**

بما أن جميع قيم سطر التقييم سالبة أو معدومة فقد توصلنا إلى الحل الأمثل.

ملاحظة:

النتيجة المتوصل إلها هي نفس النتيجة المتوصل إليها في حل النموذج المقابل في الصفحة 49

C_B	C_j / BASIC	1000	200	2000	0	0	0	0	b_i R.H.S	
		Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
0	S_2	0	0	-06	9/2	01	-5/2	0	**1/2**	X_2
0	S_4	0	0	-06	7/2	0	-7/2	01	**33/2**	X_4
1000	Y_1	01	0	02	-1/2	0	0	0	**5/2**	S_1
200	Y_2	0	01	-01	01	0	-1/2	0	**0**	S_2
W_j-C_j		**0**	**0**	**-200**	**-300**	**0**	**-100**	**0**	**W=2500**	
		S_1	S_2	S_3	X_1	X_2	X_3	X_4		

المحور السادس:البرمجة الخطية بأعداد صحيحة (البرمجة العددية)

(Integer Linear Programming)

المحور السادس:البرمجة الخطية بأعداد صحيحة(البرمجة العددية)

01-مقدمة: البرمجة الخطية بأعداد صحيحة (Integer Programming) هي أحد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، حيث ينصب إهتمام هذا النوع من النماذج الرياضية على إيجاد قيم المتغيرات $\left(X_1, X_2, X_3, ..., X_n\right)$ بأعداد صحيحة خالية من الكسور، وعليه فإن ذلك يتطلب وضع تحديدات معينة في صيغة النموذج الرياضي يشترط تحقق القيم الخالية من الكسور للمتغيرات الداخلة في صياغة النموذج،إن الهدف الأساسي لبناء النموذج الرياضي للبرمجة بأعداد صحيحة نابع من الإستجابة لمتطلبات الواقع العملي، حيث من المعروف إن الكثير من الحالات والمشاكل التطبيقية لا يمكن التفاعل معها بقيم كسرية مثل عدد الآلات وعدد العمال أو عدد المشاريع الإنشائية...إلخ.

ويمكن تصنيف مسائب البرمجة الخطية بأعداد صحيحة إلى الحالات التالية:

01-مسائل البرمجة الخطية بأعداد صحيحة البحتة (Pure Integer Linear Programming) ويرمز لها إختصارا ب(PILP)،إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة.

02-مسائل البرمجة الخطية بأعداد صحيحة المختلطة (Mixed Integer Linear Programming) ويرمز لها إختصارا ب (MILP)،إذا كانت قيم بعض متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيما إختيارية.

03-مسائل البرمجة الخطية بأعداد صحيحة ذات متغيرات ثنائية القيم($0-1$Integer Linear Programming) ويرمز لها إختصارا ب ($0-1$ILP)،إذا كانت قيم كل متغيرات المسألة هي 0 أو 1.

02-طرائق حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة

هناك العديد من الطرائق التي طورت لحل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة (ILP) وأغلب هذه الطرائق تقوم على أساس تجاهل قيد العدد الصحيح للتوصل إلى حل المسألة ومن ثم معالجة القيم الكسرية للمتغيرات في حال وجودها والسبب يعود في كون عملية التوصل إلى الحل المثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة يتم من خلال الحل الأمثل لمسألة ابرمجة الخطية العامة (LP) هو تقارب القيم المثلى للحل الأمثل للمسألتين وفي بعض الأحيان تساويها وان هذا يؤدي إلى تقليل العمليات الحسابية للتوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة (ILP)،أما طرائق حل مسائل البرمجة الخطية بأعداد صحيحة فهي كالتالي:

01-طريقة التجريب أو الإختيار.

02-طريقة التقريب

03-طريقة الإقتطاع (أسلوب جومري).

04-طريقة التفريغ (الحد والفرع)

05-طريقة البحث والإستقصاء.

06-طريقة التعداد الضمني.

وسوف نكتفي بثلاث طرائق للحل والتي سوف يتم عرضها لاحقا.

01-طريقة التجريب أو الإختيار(الطريقة البيانية): تقوم هذه الطريقة هي بعد الحصول على الحل المثالي للنموذج المعطى نقوم بإستخلاص جميع النقاط الصحيحة الممكنة ونعوضها في دالة الهدف ونأخذ الحل الذي يحقق أصغر قيمة لدالة الهدف إذا كانت المسألة تصغير أو العكس إذا كانت المسألة تعظيم، ونشير إلى أن هذه الطريقة تكون غير مجدية (غير ممكنة) في حال كان عدد المتحولات في المسألة n عددا كبيرا.

مثال01: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

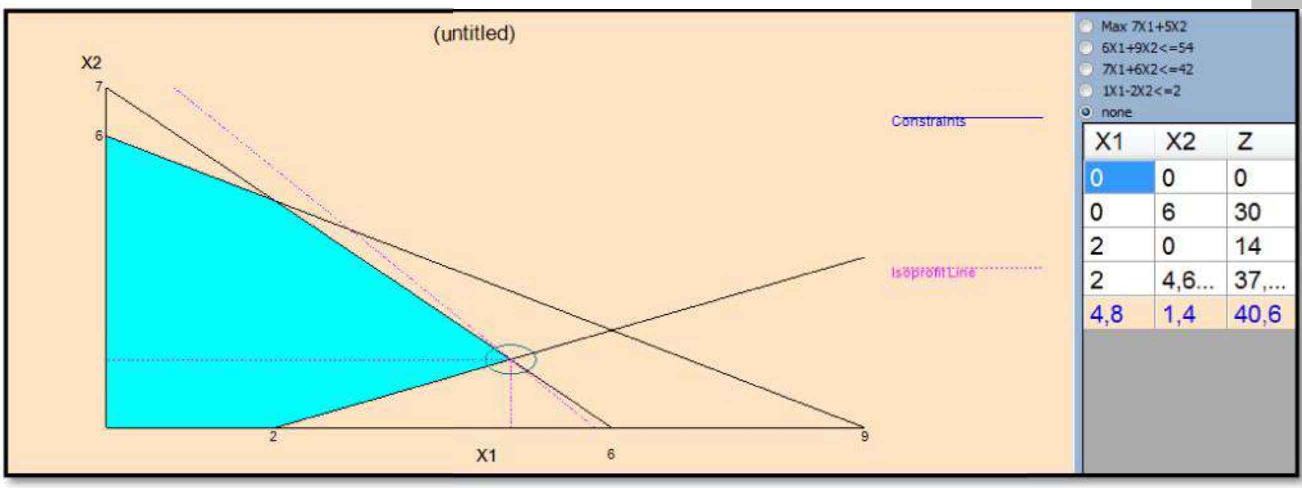
$$MAX(Z) = 07X_1 + 05X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 06X_1 + 09X_2 \leq 54 \\ 07X_1 + 06X_2 \leq 42 \\ X_1 - 02X_2 \leq 02 \\ X_1, X_2 \geq 0 \text{ Non negative integer} \end{cases}$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل بإستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:



نلاحظ من خلال الشكل أن الحل الأمثل يتحقق عند $X_1 = 04.8, X_2 = 01.4, Z^* = 40.6$

وبالتالي فالحل أمثل إلا انه لم يحقق خاصية الأعداد الصحيحة، وللبحث عن الحل الصحيح نستخرج جميع الثنائيات من الأرقام الصحيحة التي تم على المحورين (OX_1, OX_2) مع ملاحظة أن منطقة الحلول محصورة بمضلع الرؤوس والمحدد ب $0 \leq X_2 \leq 06$,$0 \leq X_1 \leq 05$ وبذلك يكون لدينا النقاط الصحيحة التالية:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
3	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
4	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
5	5.0	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6

بعد تحديد جميع النقاط الممكنة نقوم بإختيار هذه النقاط والتي تحقق جميع القيود ونعوض قيمها (X_1, X_2) في دالة الهدف ثم نختار أعظم قيمة والجدول التالي يوضح ذلك.

القيد الأول	القيد الثاني	القيد الثالث	دالة الهدف	النقاط
$06X_1+09X_2\le 54$	$07X_1+06X_2\le 42$	$X_1-02X_2\le 02$	$MAX(Z)=07X_1+05X_2$	
0.0	تحقق	تحقق	تحقق	0
0.1	تحقق	تحقق	تحقق	05
0.2	تحقق	تحقق	تحقق	10
0.3	تحقق	تحقق	تحقق	15
0.4	تحقق	تحقق	تحقق	20
0.5	تحقق	تحقق	تحقق	25
0.6	تحقق	تحقق	تحقق	30
1.0	تحقق	تحقق	تحقق	07
1.1	تحقق	تحقق	تحقق	12
1.2	تحقق	تحقق	تحقق	17
1.3	تحقق	تحقق	تحقق	22
1.4	تحقق	تحقق	تحقق	27
1.5	تحقق	تحقق	تحقق	32
1.6	تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
2.0	تحقق	تحقق	تحقق	14
2.1	تحقق	تحقق	تحقق	19
2.2	تحقق	تحقق	تحقق	24
2.3	تحقق	تحقق	تحقق	29
2.4	تحقق	تحقق	تحقق	34
2.5	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
2.6	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
3.0	تحقق	تحقق	لا تحقق	--------
3.1	تحقق	تحقق	تحقق	26
3.2	تحقق	تحقق	تحقق	31
3.3	تحقق	تحقق	تحقق	36
3.4	تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
3.5	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
3.6	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
4.0	تحقق	تحقق	لا تحقق	--------
4.1	تحقق	تحقق	لا تحقق	--------
4.2	تحقق	تحقق	تحقق	38
4.3	تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
4.4	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
4.5	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
4.6	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
5.0	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
5.1	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
5.2	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------
5.3	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	--------

5.4	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	---------
5.5	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	---------
5.6	لا تحقق	لا تحقق	لا تحقق	---------

نلاحظ أن الدالة تأخذ قيمتها العظمى عند: $X_1 = 04, X_2 = 02, Z^* = 40$

مثال02: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي:

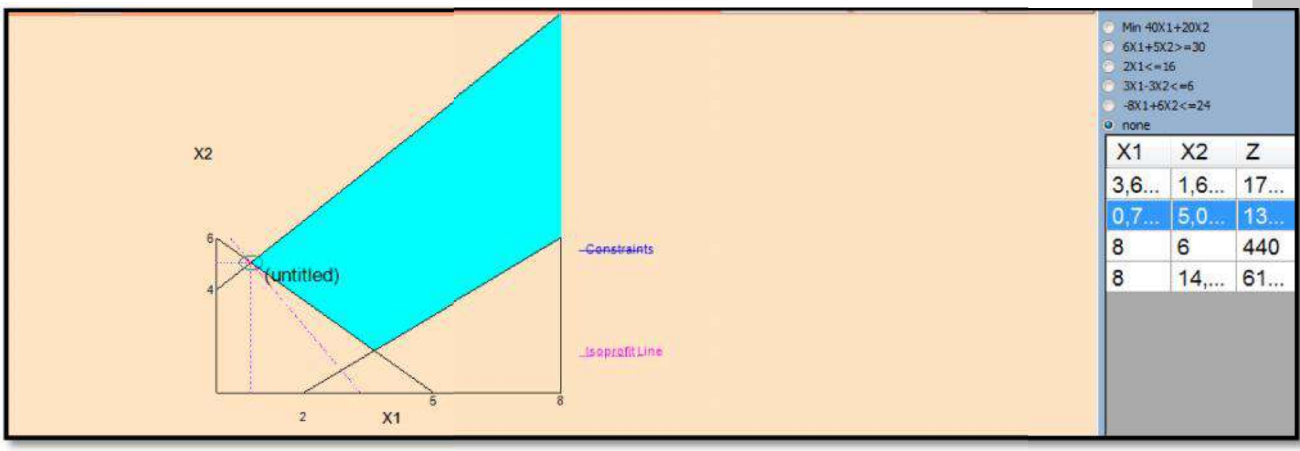
$$MIN(Z) = 40X_1 + 20X_2$$

$$S/C = \begin{cases} 06X_1 + 05X_2 \geq 30 \\ 02X_1 \leq 16 \\ 03X_1 - 03X_2 \leq 06 \\ 08X_1 - 06X_2 \geq -24 \\ X_1, X_2 \geq 0 \text{ Non negative integer} \end{cases}$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل بإستخدام الطريقة البيانية؟

الحل:



نلاحظ من خلال الشكل أن الحل الأمثل يتحقق عند $X_1 = 0.79, X_2 = 05.05, Z^* = 132.63$

وبالتالي فالحل أمثل إلا انه لم يحقق خاصية الأعداد الصحيحة، وللبحث عن الحل الصحيح نستخرج جميع الثنائيات من الأرقام الصحيحة التي تم على المحورين (OX_1, OX_2) مع ملاحظة أن منطقة الحلول محصورة بمضلع الرؤوس والمحدد ب $0 \leq X_2 \leq 06$, $0 \leq X_1 \leq 05$ وبذلك يكون لدينا النقاط الصحيحة التالية:

02-طريقة الإقتطاع (أسلوب جومري): من أجل إيجاد الحل الأمثل لبرنامج الأعداد الصحيحة بطريقة الإقتطاع (أسلوب جومري)، نبدأ أولا بإيجاد الحل الأمثل للمسألة بطريقة السمبلكس العادية دون الأخذ بعين الإعتبار القيد (كون المجاهيل ذات قيم صحيحة)، فإذا حصلنا على حل تكون فيه مجاهيل القاعدة أعدادا صحيحة نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل المطلوب، أما إذا كانت قيمة أحدهما غير صحيح فإننا نقوم بإضافة قيد جديد للمسألة مقابل لهذا المجهول وفق الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: من جدول الحل النهائي بإستخدام طريقة السمبلكس العادية نختار أحد المتغيرات ذات القيم غير الصحيحة وبشكل إختياري، فإذا كان لدينا أكثر من متغير بأرقام غير صحيحة نختار المتغير ذي الجزء الكسرس الأكبر $f(b_i)$

الخطوة الثانية:نعيد كتابة المعاملات الكسرية والثوابت في معادلة القيد الناتجة من الخطوة الأولى، كمجموع الأعداد الصحيحة والكسور الموجبة بين الصفر والواحد، ثم نعيد كتابة المعادلة بحيث يصبح الطرف الأيسر يحتوي على حدود ذات معاملات كسرية فقط (وثابت كسري)، بينما الطرف الأيمن يحتوي على حدود بمعاملات أعداد صحيحة (وثوابت صحيحة).

الخطوة الثالثة:تتطلب أن يكون الطرف الأيسر من المعادلة المعاد كتابتها غير سلبي،وتكون المتراجحة الناتجة هي القيد الجديد

بعد إضافة القيد الجديد، نقوم بحل المسألة الجديدة بتطبيق خطوات السمبلكس

ملاحظة: قبل البدء في عرض طريقة جومري لابد من التطرق لبعض المفاهيم الأساسية

01- إذا كان $r \in R$ فإننا نرمز ب$[r]$ لأكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي r

02- يمكن أن نكتب أي عدد حقيقي r بالشكل التالي: $r = [r] + f(r)$

حيث $[r]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي r و $f(r)$ هو الفرق $f(r) = r - [r]$ ويسمى بالجزء الكسري للعدد الحقيقي ومن الواضح أن $0 \le f(r) < 01$

فمثلا إذا كانت لدينا القيم التالية

01- $r = \frac{15}{04}$ فإن $r = [r] + f(r) \Rightarrow \frac{15}{04} = 03 + \frac{01}{04}$ أي

$$\begin{cases} \left[\frac{15}{04}\right] = 03 \\ f\left(\frac{15}{04}\right) = \frac{01}{04} \end{cases}$$

02- $r = -\frac{15}{04}$ فإن $r = [r] + f(r) \Rightarrow -\frac{15}{04} = -04 + \frac{01}{04}$ أي

$$\begin{cases} \left[-\frac{15}{04}\right] = -04 \\ f\left(\frac{15}{04}\right) = \frac{01}{04} \end{cases}$$

مثال01: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MAX(Z) = 04X_1 + 05X_2 + 07X_3$$

$$S/C = \begin{cases} 03X_1 + 02X_2 + 03X_3 \le 20 \\ 03X_1 + 05X_2 + 07X_3 \le 25 \\ 02X_1 + 03X_2 + 04X_3 \le 25 \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0 \text{ Non negative integer} \end{cases}$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس؟

الحل:

الخطوة الأولى: هي التوصل إلى حل المسألة مع إهمال قيد العدد الصحيح، بعد إضافة المتغيرات الوهمية إلى النموذج نحصل على الحل الأمثل والموضح في الجدول التالي

جدول الحل الأمثل

C_B	C_j / BASIC	04	05	07	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
04	X_1	01	0	1/9	5/9	-2/9	0	**50/9**
05	X_2	0	01	4/3	-1/3	1/3	0	**5/3**
0	S_3	0	0	-2/9	-1/9	-5/9	01	**80/9**
Z_j-C_j		**0**	**0**	**1/9**	**5/9**	**7/9**	**0**	**Z=275/9**

الخطوة الثانية: إختيار معادلة ذو أعلى كسر كالتالي:

$f(r)=r-[r]$	$[r]$	r	المتغيرات
5/9	05	50/9	X_1
2/3	01	5/3	X_2
8/9	08	80/9	S_3

من الجدول أعلاه يتضح ان الإختيار يقع على معادلة المتغير S_3

ومن جدول الحل الأمثل نكتب المعادلة التالية:

$$-\frac{2}{9}X_3-\frac{1}{9}S_1-\frac{5}{9}S_2+S_3=\frac{80}{9}$$

بكتابة كل كسر كمجموع أعداد صحيحة وكسر بين 1 و 0 نتحصل على المعادلة الجديدة التالية:

$$\left(-01+\frac{07}{09}\right)X_3+\left(-01+\frac{08}{09}\right)S_1+\left(-01+\frac{04}{09}\right)S_2+(01+0)S_3=08+\frac{08}{09}$$

ومن المعادلة السابقة نتحصل على:

$$\frac{07}{09}X_3+\frac{08}{09}S_1+\frac{04}{09}S_2\geq\frac{08}{09}\Rightarrow-\frac{07}{09}X_3-\frac{08}{09}S_1-\frac{04}{09}S_2\leq-\frac{08}{09}$$

وتصبح الصيغة النهائية لقيد القطع (قيد جومري) الذي يتم إضافته إلى جدول الحل الأمثل هو

$$-\frac{07}{09}X_3-\frac{08}{09}S_1-\frac{04}{09}S_2+S_4=-\frac{08}{09}$$

ويصبح جدول الحل الأمثل السابق بالصيغة التالية:

C_B	C_j / BASIC	04	05	07	0	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
04	X_1	01	0	1/9	5/9	-2/9	0	0	**50/9**
05	X_2	0	01	4/3	-1/3	1/3	0	0	**5/3**
0	S_3	0	0	-2/9	-1/9	-5/9	01	0	**80/9**
0	S_4	0	0	-7/9	-8/9	-4/9	0	01	**-8/9**
Z_j-C_j		**0**	**0**	**1/9**	**5/9**	**7/9**	**0**	**0**	**Z=275/9**

بما ان قيمة S_4 في عمود الكميات سالبة إذن نستخدم طريقة السمبلكس المقابلة ونكمل الحل

S_4 هو المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) وX_3 هو المتغير الداخل(عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي $-7/9$

C_B	C_j / BASIC	04	05	07	0	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
04	X_1	01	0	0	3/7	-2/7	0	1/7	**38/7**
05	X_2	0	01	0	-13/7	-3/7	0	12/7	**1/7**
0	S_3	0	0	0	1/7	-3/7	01	-2/7	**64/7**
07	X_3	0	0	01	8/7	4/7	0	-9/7	**8/7**
Z_j-C_j		**0**	**0**	**0**	**-3/7**	**-5/7**	**0**	**-1/7**	**Z=213/7**

بما أن قيم المتغيرات الأساسية لازالت غير صحيحة لذلك يتم إعادة الخطوة الثانية بإختيار معادلة المتغير ذو أعلى كسر كالتالي:

$f(r)=r-[r]$	$[r]$	r	المتغيرات
3/7	05	**38/7**	X_1
1/7	0	**1/7**	X_2
1/7	09	**64/7**	S_3
1/7	01	**8/7**	X_3

من الجدول السابق يتضح أن الإختيار يقع على المتغير X_1

ومن جدول الحل الأمثل نكتب المعادلة التالية:

$$X_1+\frac{03}{07}S_1-\frac{02}{07}S_2+\frac{01}{07}S_4=\frac{38}{7}$$

بكتابة كل كسر كمجموع أعداد صحيحة وكسر بين 1 و 0 نتحصل على المعادلة الجديدة التالية:

$$(01+0)X_1+\left(0+\frac{03}{07}\right)S_1+\left(-01+\frac{05}{07}\right)S_2+\left(0+\frac{01}{07}\right)S_4=05+\frac{03}{07}$$

ومن المعادلة السابقة نتحصل على:

$$\frac{03}{07}S_1+\frac{05}{07}S_2+\frac{01}{07}S_4\geq\frac{03}{07}\Rightarrow-\frac{03}{07}S_1-\frac{05}{07}S_2-\frac{01}{07}S_4\leq-\frac{03}{07}$$

وتصبح الصيغة النهائية لقيد القطع (قيد جومري) الذي يتم إضافته إلى جدول الحل الأمثل هو

$$-\frac{03}{07}S_1-\frac{05}{07}S_2-\frac{01}{07}S_4+S_5=-\frac{03}{07}$$

وعلى هذا الأساس فإن الجدول يصبح بالصيغة التالية:

C_B	C_j / BASIC	04	05	07	0	0	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
04	X_1	01	0	0	3/7	-2/7	0	1/7	0	**38/7**
05	X_2	0	01	0	-13/7	-3/7	0	12/7	0	**1/7**
0	S_3	0	0	0	1/7	-3/7	01	-2/7	0	**64/7**
07	X_3	0	0	01	8/7	4/7	0	-9/7	0	**8/7**
0	S_5	0	0	0	-3/7	-5/7	0	-1/7	01	**-3/7**
Z_j-C_j		**0**	**0**	**0**	**-3/7**	**-5/7**	**0**	**-1/7**	**0**	**Z=213/7**

S_5 هو المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) و S_1 هو المتغير الداخل (عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي $-3/7$

ويصبح جدول الحل بالصيغة التالية

C_B	C_j / BASIC	04	05	07	0	0	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
04	X_1	01	0	0	0	-01	0	0	01	**05**
05	X_2	0	01	0	0	8/3	0	7/3	-13/3	**02**
0	S_3	0	0	0	0	-2/3	01	-1/3	1/3	**09**
07	X_3	0	0	01	0	-4/3	0	-5/3	8/3	**0**
0	S_1	0	0	0	01	5/3	0	1/3	-7/3	**01**
Z_j-C_j		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**01**	**Z=30**

الجدول التالي يمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة مع ملاحظة ان قيمة دالة الهدف أقل من قيمة دالة الهدف لمسألة البرمجة الخطية.

مثال02: ليكن لديك نموذج البرمجة الخطية التالي

$$MIN(Z)=02X_1+03X_2$$

$$S/C=\begin{cases}05X_1+06X_2\le 170\\ \frac{02}{03}X_1+\frac{04}{03}X_2\ge 25\\ X_1+X_2\ge 25\\ X_1,X_2\ge 0 \text{ Non negative integer}\end{cases}$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة السمبلكس؟

الحل:

الخطوة الأولى: هي التوصل إلى حل المسألة مع إهمال قيد العدد الصحيح، بعد إضافة المتغيرات الوهمية إلى النموذج نحصل على الحل الأمثل والموضح في الجدول التالي

C_B	C_j / BASIC	02	03	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0	S_1	0	0	01	3/2	04	**65/2**
03	X_2	0	01	0	-3/2	01	**25/2**
02	X_1	01	0	0	3/2	-02	**25/2**
Z_j-C_j		**0**	**0**	**0**	**-3/2**	**-01**	**Z=125/2**

الجدول أعلاه يمثل الحل الأمثل بدون الأخذ بنظر الإعتبار شرط الأعداد الصحيحة وللتوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة نستخدم قيد جومري أي تحديد معادلة المتغير الأساسي ذو القيمة غير الصحيحة وبما أن كل المتغيرات الأساسية ذات قيم غير صحيحة لذلك يتم إختيار المتغير ذو أعلى كسر كما هو مبين في الجدول التالي:

المتغيرات	r	$[r]$	$f(r)=r-[r]$
S_1	65/2	32	1/2
X_2	25/2	12	1/2
X_1	25/2	12	1/2

بما ان كل المتغيرات الأساسية متساوية من حيث قيمة الكسر لذلك يتم إختيار أحدهما بطريقة عشوائية وليكن المتغير X_1

ومن جدول الحل الأمثل نكتب المعادلة التالية:

$$X_1+\frac{03}{02}S_1-02S_3=\frac{02}{02}$$

بكتابة كل كسر كمجموع أعداد صحيحة وكسر بين 1 و 0 نتحصل على المعادلة الجديدة التالية:

$$(01+0)X_1+\left(01+\frac{01}{02}\right)S_1+(-02+0)S_3=12+\frac{01}{02}$$

ومن المعادلة السابقة نتحصل على:

$$\frac{01}{02}S_1\geq\frac{01}{02}\Rightarrow-\frac{01}{02}S_1\leq-\frac{01}{02}$$

وتصبح الصيغة النهائية لقيد القطع (قيد جومري) الذي يتم إضافته إلى جدول الحل الأمثل هو

$$-\frac{01}{02}S_1+S_4=-\frac{01}{02}$$

وعلى هذا الأساس فإن الجدول يصبح بالصيغة التالية:

C_B	C_j / BASIC	02	03	0	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	0	0	01	3/2	04	0	65/2
03	X_2	0	01	0	-3/2	01	0	25/2
02	X_1	01	0	0	3/2	-02	0	25/2
0	S_4	0	0	0	-1/2	0	01	-1/2
Z_j-C_j		0	0	0	-3/2	-01	0	Z=125/2

بما أن قيمة احد المتغيرات الأساسية سالبة لذلك نستخدم طريقة السمبلكس الثانئية للتوصل إلى الحل ولذلك فإن S_4 هو المتغير الخارج (سطر الإرتكاز) وS_2 هو المتغير الداخل (عمود الإرتكاز) ونقطة الإرتكاز هي 1/2-

ويصبح جدول الحل بالصيغة التالية

C_B	C_j / BASIC	02	03	0	0	0	0	b_i R.H.S
		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	0	0	01	0	04	03	31
03	X_2	0	01	0	0	01	-03	14
02	X_1	01	0	0	0	-02	03	11
0	S_2	0	0	0	01	0	-02	01
Z_j-C_j		0	0	0	0	-01	-03	Z=64

الجدول أعلاه يمثل حلا أمثلا

ملاحظة01:

01–قيمة دالة الهدف في حالة التعظيم في مسائل البرمجة الخطية تكون أقل من قيمتها في مسائل البرمجة الخطية الصحيحة.

02– قيمة دالة الهدف في حالة التقليل في مسائل البرمجة الخطية الصحيحة تكون أكبر من قيمتها في مسائل البرمجة الخطية .

ملاحظة01:إن قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي أقل مما هو وارد في حالة البرمجة الخطية والسبب في ذلك يعود إلى أن البرمجة الخطية الصحيحة تعتمد على معيار مهم للحصول على الأمثلية، وكلما تم الإبتعاد عن نقطة الأصل(في حالة التعظيم) كلما كان ذلك يزيد ويعظم من قيمة دالة الهدف وصولا لحل مايعرف بالنقطة المتطرفة التي ربما تكون إحداثياتها ذات قيم كسرية بينما في حالة البرمجة بأعداد صحيحة تتحدد قيمة دالة الهدف في ضوء تقسيمات المحاور الأفقية والعمودية وبالتالي قد لاتبعد كثيرا عن نقطة الأصل وبعبارة أخرى يتم التنتازل عن القيمة العليا لدالة الهدف مقابل الحصول على قيم متغيرات بأعداد صحيحة.

المحور السابع: برمجة الأعداد الصحيحة مشاكل النقل

(Transportation Problem)

المحور السابع: برمجة الأعداد الصحيحة مشاكل النقل

01-مقدمة: بدأت المعالجة العلمية لنماذج النقل منذ فترة طويلة وذلك لطبيعتها الخاصة-من مسائل البرمجة الخطية العامة-،وبدأت أول دراسة لها بواسطة ف-هينشكوك(Hitchcok) عام 1941 حيث قدم دراسة بعنوان "توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية" ثم تلتها أخرى بواسطة ت-كوبمانس(Koopmans) عام 1947 والذي قدم دراسته بعنوان" الإستخدام الأمثل لمنظومة النقل"، والتي طورت من قبل دانزيغ عام 1963،وفي عام 1951 درس كل من دانزيغ وآخرون طريقة التوزيع المعدل (MODI)(Modify Distribution method)للحصول على الحل الأمثل،أما طريقة المسار المتعرج(SteppingStone) فقد أقترحت من قبل كل منcharnes و cooper في عام 1953، وفي عام 1955 توصل كوهن إلى حل مشكلة تخصيص المهام (Assignment problem) وهي حالة خاصة من مشكلة النقل التي طورها كل من فورد وفولكرسن في عام 1957،أما طريقة تقريب فوجل (V.A.M) فقد إقترحت من قبل فوجل عام 1958،وطريقة (R.A.M) فقد إقترحت من قبل روسيل في عام 1968.

والدراسات السابقة هي من بين أهم الدراسات في مجال مسائل النقل، ولدينا العديد من الطرق التي نستخدمها لحل مسائل النقل وقد يطبق على مسائل النقل جميع الإفتراضات الخاصة بالبرمجة الخطية من حيث توافر الخطية في كل دالة الهدف والقيود.

02-تعريف مسائل النقل: تعتبر مسائل النقل أو كما تسمى غالبا بمشكلة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية إتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع أو المواد من مصادر متعددة(مراكز الإنتاج أو المخزون)(Sources) إلى مراكز متعددة(المراكز التسويقية أو البيعية)(Destinations) بهدف سد إحتاجات المراكز ذات العلاقة بأقل تكلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل فمشكلة النقل تأخذ أهميتها من خلال ماتحتله تكاليف النقل من أهمية نسبية مقارنة بمجموع تكاليف الصنع والتوزيع وغيرها.

تعتبر مسائل النقل من المشاكل الخاصة في البرمجة الخطية ،حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من إستخدامها هو إيجاد أسلوب أمثل لتوزيع (نقل أو شحن) سلعة أو مادة ما من مناطق إنتاجها(عرضها) إلى مناطق إستهلاكها(طلبها) بحيث تكون تكلفة النقل الكلية للسلعة أقل ما يمكن، ومشاكل النقل يمكن حلها بإستخدام طريقة السمبلكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات(متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات هي:

01-عدد مراكز التوزيع أو المراكز الإنتاجية أو المخازن.

02-جانب العرض:ويتمثل في عدد m من مصادر عرض السلعة والتي يتوافر لدى كل منها S_i ،$(i=1,2,3,.......,m)$ من الكميات المتاحة من السلعة.

03-جانب الطلب:ويتمثل في عدد n من جهات إستخدام السلعة والتي يبلغ إحتياج كل منها D_j ،$(j=1,2,3,.......,n)$ من السلعة.

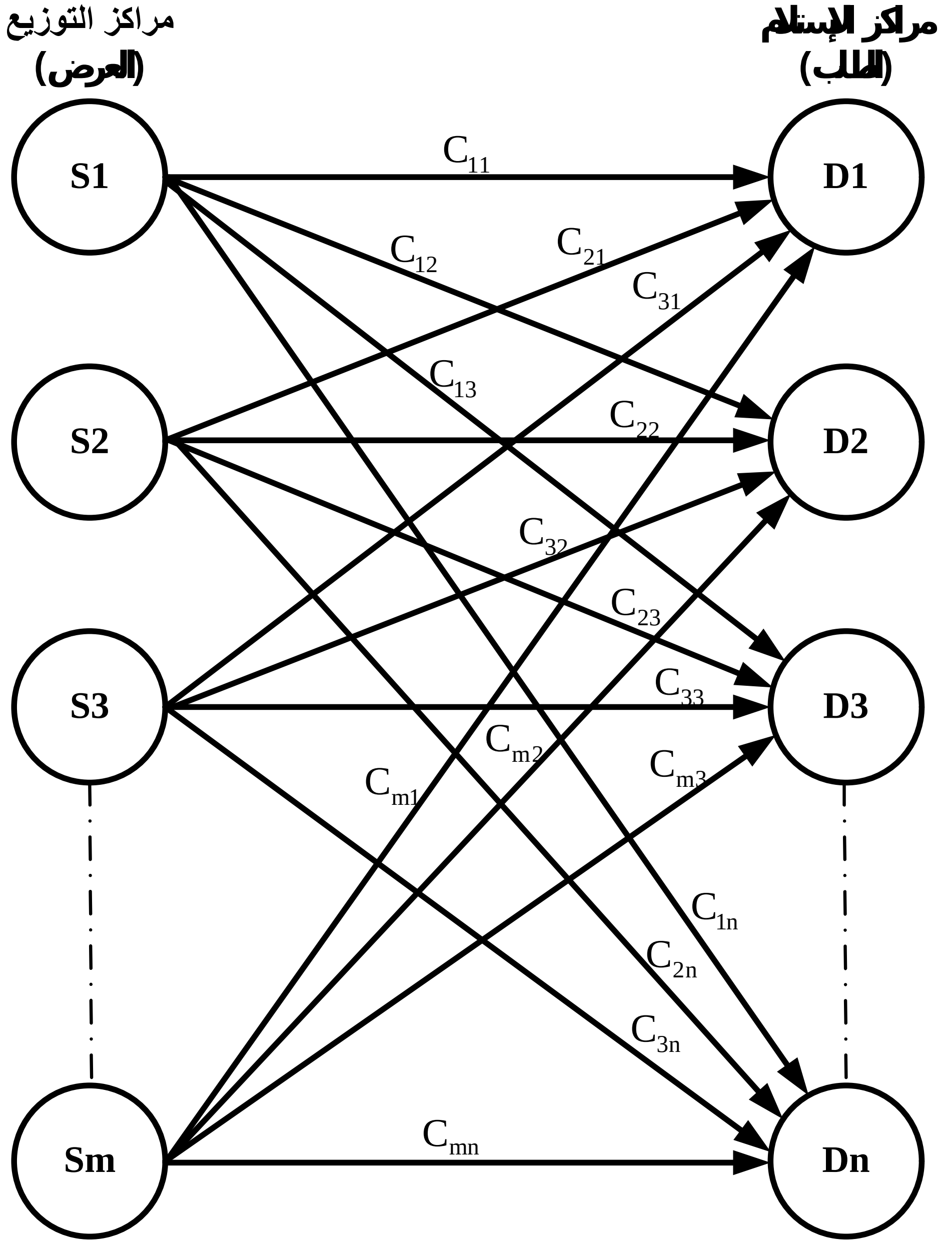
04-عدد مراكز الإستلام أو المراكز التسويقية أو البيعية.

05-جانب التكلفة: ويتمثل في المتغير C_{ij} حيث:

$\left(i=1,2,3,........,m;\ j=1,2,3,........,n\right)$ والذي يشير إلى تكلفة نقل الوحدة من المصدر i إلى جهة الإستخدام j ويمكن أن يمثل هذا المتغير التكاليف المتغيرة للإنتاج أو للشراء أو للنقل أو بعضها أو كلها.

06-حجم عرض السلع في المصادر الإنتاجية مجتمعة وحجم الطلب على السلع من قبل جميع المراكز التسويقية مجتمعة، فإذا كان حجم العرض يساوي حجم الطلب فإن مشكلة النقل هي مشكلة متوازنة وغير ذلك فإنها مشكلة غير متوازنة يجب أن توازن.

ويمكن تمثيل عناصر نموذج النقل بيانيا بالشكل التالي:



03-الصيغة الجدولية لمسائل النقل:تمثل الصيغة الجدولية لمسائل النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل المثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل تكلفة ممكمة من مجموع تكاليف النقل،أو تحقيق أكبر العوائد من مجموع الإيرادات، والصيغة الجدولة لمسائل النقل هي عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها(**M**) وتمثل المصادر(مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها (**n**) وتمثل مراكز الإستلام والجدول التالي يوضح فكرة مسائل النقل.

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	………..	D_n	
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	………..	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	………..	C_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	………..	⋮	⋮
S_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	………..	C_{mn} X_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	………..	b_n	$\sum_{i}^{m} a_i$ / $\sum_{j}^{n} b_j$

يتضمن نموذج النقل الممثل في الجدول السابق (**M**) من مصادر التجهيز، و(**n**) من محطات الإستهلاك إضافة إلى ذلك نفترض أن:

a_i:يمثل عدد الوحدات المعروضة عند المصدر من حيث$(i=1,2,3,........,m)$

b_j:يمثل عدد الوحدات المطلوبة للموقع **j** حيث $(j=1,2,3,........,n)$

C_{ij}:كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المصدر إلى الموقع **j**

X_{ij}:عدد الوحدات التي ستنقل من المصدر **i** إلى الموقع **j**.

04-الصيغة الرياضية لمسألة النقل:تأخذ مسالة النقل إحدى الحالتين وهذا حسب طبيعة دالة الهدف، إما أن نكون أمام حالة البحث عن التقليل في دالة الهدف، أي البحث عن أدنى قيمة لها (MIN) أو أننا نكون أمام حالة أخرى هي حالة التعظيم لدالة الهدف،أي البحث عن أقصى قيمة ممكنة لدالة الهدف (MAX).

04-01 الصيغة الرياضية لمسائل النقل في حالة التقليل

01-تحديد المتغيرات: لنفرض أن X_{ij} هي كمية ما ينقل من المركز **i** إلى المركز **j** من المادة المراد نقلها حيث $(i=1,2,3,........,m)$ و $(j=1,2,3,........,n)$

02-تحديد دالة الهدف:إن الهدف من هذه المسألة هو نقل الكميات الموجودة في مراكز التوزيع حسب حاجاتها بأقل تكلفة ممكنة أي أن:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

03-تحديد الشروط الخطية: وتتالف من قسمين:

03-01 مراكز التوزيع(العرض): إن الكميات المنقولة من مراكز التوزيع إلى مراكز الإستلام يجب أن لا تزيد على الكمية المعروضة وتأخذ الصيغة الرياضية التالية

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+.......+X_{1n} \le a_1 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+.......+X_{2n} \le a_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ X_{m1}+X_{m2}+X_{m3}+.......+X_{mn} \le a_m \end{cases}$$

03-02 مراكز الإستلام (الطلب):إضافة إلى ذلك فإن مجموع الكمية المنقولة يجب أن لا تقل عن إحتياجات مراكز الإستلام بعبارة أخرى يجب أن تكون

$$\begin{cases} X_{11}+X_{21}+X_{31}+.......+X_{m1} \ge b_1 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+.......+X_{m2} \ge b_2 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ X_{1n}+X_{2n}+X_{3n}+.......+X_{mn} \ge b_n \end{cases}$$

04-تحديد الشروط الإضافية: وهي أن الكميات المنقولة يجب أن تكون قيم صحيحة وغير سالبة ومجموع مايتوفر في مراكز التوزيع (العرض) يساوي إلى مجموع ما يطلب في مراكز الإستلام (الطلب) (شرط التوازن) أي

-**شرط عدم السلبية** $X_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j$

-**شرط التوازن:** $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$

وتأخذ مسألة النقل في حالة التقليل صيغتها النهائية بالشكل التالي:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$S/C=\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}X_{ij}\le a_i \quad (i=1,2,3.....,m) \\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}\ge b_j \quad (j=1,2,3.....,n) \\ X_{ij}\ge 0 \qquad (i=1,2,3.....,m),(j=1,2,3.....,n) \end{cases}$$

02-04 الصيغة الرياضية لمسائل النقل في حالة التعظيم:في هذه الحالة يتم البحث عن أعظم ربح أو عائد في وجود نفس الشروط المعروضة في حالة التقليل مع بعض الإختلاف،حيث أن دالة الهدف تكون في حالة التعظيم كما يتم إستبدال تكاليف نقل الوحدة الواحدة بالربح المحصل عليه من نقل الوحدة الواحدة أو العائد والذي سوف نرمز له بالرمز P_{ij}

فإذا إفترضنا ان الربح أو العائد المحصل عليه من جراء نقل وحدة واحدة من مركز التوزيع i إلى مركز الإستلام j هو P_{ij} ، وأن الكميات المنقولة من كل مركز توزيع إلى كل مركز تسليم هي X_{ij} و a_m هي كميات العرض و b_n هي كميات الطلب فإن البرنامج الخطي الرياضي لمسألة النقل تعطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$MAX(Z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}X_{ij}$$

$$S/C=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\le a_i & (i=1,2,3.....,m)\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}\ge b_j & (j=1,2,3.....,n)\\ X_{ij}\ge 0 & (i=1,2,3.....,m),(j=1,2,3.....,n)\end{cases}$$

05-الهدف من مسائل النقل:إن الهدف من حل مسائل النقل يتمثل في نقل المواد أو السلع إلى الجهات المذكورة بأقل تكلفة ممكنة او أكبر ربح ممكن،مع مراعاة عدم الإخلال بشروط العرض والطلب (الكميات المتوفرة والكميات المطلوبة) حيث انه لدينا نوعان من هذه المسائل:

05-01 النوع الأول (مسائل النقل المغلقة):إذا كانت خطة النقل ممكنة ،وكان فيها مجموع الطلب يساوي مجموع العرض أي أن $\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}a_i$ فإن خطة النقل هذه تسمى بخطة النقل المغلقة.

وفي هذه الحالة يأخذ النموذج الرياضي للمسألة المغلقة الصيغة الرياضية المختصرة التالية:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$S/C=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\le a_i & (i=1,2,3.....,m)\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}\ge b_j & (j=1,2,3.....,n)\\ X_{ij}\ge 0 & (i=1,2,3.....,m),(j=1,2,3.....,n)\end{cases}$$

05-02 النوع الثاني (مسائل النقل المفتوحة):إذا كانت الكميات المتوفرة لا تساوي الكميات المطلوبة، وهذا بدوره يؤدي إلى خلق حالة من عدم التوازن،وتتمثل بفائض الإنتاج أو عجز في الإنتاج ومسائل النقل التي تتميز بعدم التساوي بين الكميات المتوفرة والكميات المطلوبة، تسمى بالمسائل المفتوحة (غير المتوازنة) وهنا نميز حالتين:

-الحالة الأولى: يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة أكبر من إجمالي الكميات المطلوبة والتي يعبر عنها بالعلاقة التالية:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وتسمى هذه الحالة بالمفهوم التجاري فائض في الإنتاج، ونضيف إلى المراكز الإستهلاكية(مراكز التسليم) المحددة في المسألة مركزا وهميا $(n+01)$ أي نضيف عمود جديد إلى مصفوفة النقل ونجعل مقدار إستهلاكه (طلبه) يساوي الفرق بين مجموع الكميات المتوفرة ومجموع الكميات المطلوبة أي $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

ونجعل تكلفة النقل من جميع مراكز الإنتاج إلى مراكز الإستهلاك الوهمي مساوية للصفر أي نضع:

$C_{i,n+1} = 0$ حيث $(i = 1, 2, 3....., m)$

وبذلك نكون قد حولنا هذا النموذج إلى نموذج متوازن يتضمن (m) و $(n+1)$ مركزا إستهلاكيا ونطبق عليه ما طبقناه في حالة التوازن، ويصبح النموذج الرياضي معطى بالصيغة التالية:

$$MIN(W) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} C_{ij} X_{ij}$$

$$S/C = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} \le a_i & (i = 1, 2, 3....., m) \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} \ge b_j & (j = 1, 2, 3....., n, n+1) \\ X_{ij} \ge 0 & (i = 1, 2, 3....., m), (j = 1, 2, 3....., n+1) \end{cases}$$

الحالة الثانية: وهي الحالة المعاكسة للحالة الأولى والتي يكون فيها إجمالي الكميات المتوفرة أقل من إجمالي الكميات المطلوبة –عجز في الإنتاج– أي عندما يكون:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وفي مثل هذه الحالة نضيف إلى المراكز الإنتاجية المحددة بالمسألة مركزا إنتاجيا وهميا $(m+01)$ ونجعل مقدار ما ينتجه مساويا للفرق بين مجموع الكميات المطلوبة ومجموع الكميات المتوفرة أي نجعل كمية العرض له مساوية إلى $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

ونجعل تكلفة النقل من هذا المركز إلى جميع المراكز الإستهلاكية مساوية للصفر أي نضع:

$C_{m+1,j} = 0$ حيث $(j = 1, 2, 3....., n)$

وبذلك نكون قد حولنا هذا النموذج إلى نموذج متوازن يتضمن (n) و $(m+1)$ مركزا إنتاجيا ونطبق عليه ما طبقناه في حالة التوازن، ويصبح النموذج الرياضي معطى بالصيغة التالية:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$S/C=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\le a_i & (i=1,2,3.....,m,m+1)\\ \sum_{i=1}^{m+1}X_{ij}\ge b_j & (j=1,2,3.....,n)\\ X_{ij}\ge 0 & (i=1,2,3.....,m+1),(j=1,2,3.....,n+1)\end{cases}$$

ملاحظة: لو قارنا الصيغة العامة للبرمجة الخطية نلاحظ ان دالة الهدف والقيود تمثل صيغة من صيغ البرمجة الخطية لذلك نجد من الممكن إستخدام الطريقة العامة المطبقة عند تحليل البرامج الخطية (طريقة السمبلكس) وأن إيجاد الحلول المطلوبة لمشكلات النقل يتم بتحويل قيود المتباينات المشار إليها سابقا إلى قيود مساوة كالتالي:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$$

$$S/C=\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=a_i & (i=1,2,3.....,m)\\ \sum_{i=1}^{m}X_{ij}=b_j & (j=1,2,3.....,n)\\ X_{ij}\ge 0 & (i=1,2,3.....,m),(j=1,2,3.....,n)\end{cases}$$

مثال01:(حالة تساوي الطلب والعرض)

منظمة أعمال تجارية ترغب في تسويق منتجاتها من مخازنها الثلاث إلى أربعة وكلاء هم على التوالي الوكيل01،الوكيل02، الوكيل03، الوكيل04، المعلومات المتعلقة بتكاليف النقل وكمية الإنتاج المطلوب وكمية الإنتاج المعروض موضحة من خلال الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	الوكيل D_1 رقم01	الوكيل D_2 رقم02	الوكيل D_3 رقم03	الوكيل D_4 رقم04	
S_1 المخزن رقم01	$C_{11}=04$	$C_{12}=08$	$C_{13}=05$	$C_{14}=10$	$a_1=100$
S_2 المخزن رقم02	$C_{21}=08$	$C_{22}=12$	$C_{23}=06$	$C_{24}=18$	$a_2=80$
S_3 المخزن رقم03	$C_{31}=07$	$C_{32}=09$	$C_{33}=11$	$C_{34}=20$	$a_3=60$
b_j	$b_1=60$	$b_2=40$	$b_3=80$	$b_4=60$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=240$

المطلوب:

طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل وضع خطة لتسويق الإنتاج بحيث تكون تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن؟

الحل:

بما أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب فإن هذا النوع من المشكلة يطلق عليه مشاكل النقل المغلقة

-شروط مراكز التوزيع

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}\le 100 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}\le 80 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}\le 60 \end{cases}$$

أما بالنسبة لمجموع الكميات المستلمة من قبل أي وكيل فهي بالتأكيد تساوي الحاجة الكلية للوكيل من البضاعة المذكورة اعلاه أي أن:

-شروط مراكز الإستلام

$$\begin{cases} X_{11}+X_{21}+X_{31}\ge 60 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}\ge 40 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}\ge 80 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34}\ge 60 \end{cases}$$

إن دالة الهدف المطلوبة عند حل المشكلة هذه،تقوم على أساس جعل تكاليف نقل البضاعة المنتجة من المخازن إلى الوكلاء أقل مايمكن أي أن:

$$\begin{aligned} MIN(W)=\sum_{i=1}^{03}\sum_{j=1}^{04}C_{ij}X_{ij} &= 04X_{11}+08X_{12}+05X_{13}+10X_{14}+08X_{21}+12X_{22}+06X_{23}+18X_{24} \\ &+07X_{31}+09X_{32}+11X_{33}+20X_{34} \end{aligned}$$

ويمكن كتابة البرنامج النهائي بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} MIN(W)=\sum_{i=1}^{03}\sum_{j=1}^{04}C_{ij}X_{ij} &= 04X_{11}+08X_{12}+05X_{13}+10X_{14}+08X_{21}+12X_{22}+06X_{23}+18X_{24} \\ &+07X_{31}+09X_{32}+11X_{33}+20X_{34} \end{aligned}$$

$$S/C=\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}\le 100 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}\le 80 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}\le 60 \\ X_{11}+X_{21}+X_{31}\ge 60 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}\ge 40 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}\ge 80 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34}\ge 60 \\ X_{ij}\ge 0 \qquad (i=1,2,3);(j=1,2,3) \end{cases}$$

مثال02:(حالة عجز في الإنتاج):تدير الهيئة العامة لصناعة الإسمنت أربعة مصانع $\left(S_1,S_2,S_3,S_4\right)$ تبلغ طاقتها الإنتاجية السنوية القصوى (بآلاف الأطنان) 800،400،600،500 على الترتيب.

وترغب الهيئة في تسليم الإسمنت إلى مناطق التسليم $\left(D_1,D_2,D_3,D_4\right)$ وتبلغ الإحتياجات الفعلية السنوية لهذه المناطق (بآلاف الأطنان) 800،700،300،900 على الترتيب.

وقد كانت تكلفة نقل الوحدة (بآلا الأطنان) من جهات الإنتاج إلى مراكز التوزيع الرئيسية (وحدات نقدية) كماهو مبين في الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=30$	$C_{12}=40$	$C_{13}=35$	$C_{14}=65$	$a_1=500$
S_2	$C_{21}=15$	$C_{22}=32$	$C_{23}=27$	$C_{24}=62$	$a_2=600$
S_3	$C_{31}=13$	$C_{32}=35$	$C_{33}=30$	$C_{34}=60$	$a_3=400$
S_4	$C_{41}=50$	$C_{42}=58$	$C_{43}=53$	$C_{44}=20$	$a_4=800$
b_j	$b_1=900$	$b_2=300$	$b_3=700$	$b_4=800$	$\sum_{i=1}^{4}a_i \neq \sum_{j=1}^{4}b_j$

المطلوب: صياغة النموذج في صورة برنامج خطي؟

الحل:

نفرض أن X_{ij} هي الكمية المنقولة من المعامل (مراكز التوزيع) حيث $(i=1,2,3,4)$ إلى مراكز التسليم $(j=1,2,3,4)$ ونلاحظ أن $\sum_{i=1}^{m}a_i < \sum_{j=1}^{n}b_j$ أي

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{04}a_i = 500+600+400+800=2300\\ \sum_{j=1}^{04}b_j = 900+300+700+800=2700\end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{04}a_i \neq \sum_{j=1}^{04}b_j$$

نكون أمام نموذج غير متوازن (حالة عجز في الإنتاج) لذلك نضيف مركز إنتاجي وهمي حاجته

$$a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i \Rightarrow a_{4+1}=\sum_{j=1}^{4}b_j-\sum_{i=1}^{4}a_i = 2700-2300=400$$

وتكلفة نقل إلى جميع مراكز التسليم تساوي أصفارا ويصبح جدول النقل للمعاملات الفنية الجديد كمايلي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=30$	$C_{12}=40$	$C_{13}=35$	$C_{14}=65$	$a_1=500$
S_2	$C_{21}=15$	$C_{22}=32$	$C_{23}=27$	$C_{24}=62$	$a_2=600$
S_3	$C_{31}=13$	$C_{32}=35$	$C_{33}=30$	$C_{34}=60$	$a_3=400$
S_4	$C_{41}=50$	$C_{42}=58$	$C_{43}=53$	$C_{44}=20$	$a_4=800$
S_5	$C_{51}=0$	$C_{52}=0$	$C_{53}=0$	$C_{54}=0$	$a_5=400$
b_j	$b_1=900$	$b_2=300$	$b_3=700$	$b_4=800$	$\sum_{i=1}^{5} a_i=\sum_{j=1}^{4} b_j=2700$

بما أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب فإن النموذج يكتب كالتالي

-شروط مراكز التوزيع

$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}\le 500 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}\le 600 \\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}\le 400 \\ X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\le 800 \\ X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}\le 400 \end{cases}$$

-شروط مراكز الإستلام

$$\begin{cases} X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+X_{51}\ge 900 \\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+X_{52}\ge 300 \\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+X_{53}\ge 700 \\ X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}+X_{54}\ge 800 \end{cases}$$

-قيد عدم السلبية: $X_{ij}\ge 0$ حيث $(i=1,2,3,4,5)$ و $(j=1,2,3,4)$

-دالة الهدف: إن دالة الهدف المطلوبة عند حل المشكلة هذه،تقوم على أساس جعل تكاليف نقل البضاعة المنتجة من المخازن إلى الوكلاء أقل مايمكن أي أن:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{05}\sum_{j=1}^{04} C_{ij}X_{ij}=30X_{11}+40X_{12}+35X_{13}+65X_{14}+15X_{21}+32X_{22}+27X_{23}+62X_{24}$$
$$+13X_{31}+35X_{32}+30X_{33}+60X_{34}+50X_{41}+58X_{42}+53X_{43}+20X_{44}$$
$$+0X_{51}+0X_{52}+0X_{53}+0X_{54}$$

ويمكن كتابة البرنامج النهائي بالشكل التالي:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{05}\sum_{j=1}^{04}C_{ij}X_{ij}=30X_{11}+40X_{12}+35X_{13}+65X_{14}+15X_{21}+32X_{22}+27X_{23}+62X_{24}$$
$$+13X_{31}+35X_{32}+30X_{33}+60X_{34}+50X_{41}+58X_{42}+53X_{43}+20X_{44}$$
$$+0X_{51}+0X_{52}+0X_{53}+0X_{54}$$

$$S/C=\begin{cases}X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}\le 500\\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}\le 600\\ X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34}\le 400\\ X_{41}+X_{42}+X_{43}+X_{44}\le 800\\ X_{51}+X_{52}+X_{53}+X_{54}\le 400\\ X_{11}+X_{21}+X_{31}+X_{41}+X_{51}\ge 900\\ X_{12}+X_{22}+X_{32}+X_{42}+X_{52}\ge 300\\ X_{13}+X_{23}+X_{33}+X_{43}+X_{53}\ge 700\\ X_{14}+X_{24}+X_{34}+X_{44}+X_{54}\ge 800\\ X_{ij}\ge 0 \qquad (i=1,2,3,4,5);(j=1,2,3,4)\end{cases}$$

مثال03:(حالة فائض في الإنتاج): نريد نقل 06 أطنان من مادة ما من المعمل S_1 و03 أطنان من المعمل S_2 إلى ثلاث مدن (D_1,D_2,D_3) حاجاتها على الترتيب 01،02،03أطنان.

وقد كانت تكلفة نقل الطن الواحد من المعمل i حيث $(i=1,2)$ إلى المدينة j حيث $(j=1,2,3)$ موضحة في الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$	$C_{12}=03$	$C_{13}=04$	$a_1=06$
S_2	$C_{21}=01$	$C_{22}=03$	$C_{23}=05$	$a_2=03$
b_j	$b_1=01$	$b_2=02$	$b_3=03$	$\sum_{i=1}^{2}a_i\neq\sum_{j=1}^{3}b_j$

المطلوب:أوجد النموذج الرياضي بحيث تكون تكلفة النقل أقل مايمكن، علما بأن تكلفة نقل الطن الواحد من المعمل iحيث $(i=1,2)$ إلى المدينة j حيث $(j=1,2,3)$

الحل:نفرض أن X_{ij} هي الكمية المنقولة من المعمل i حيث $(i=1,2)$ إلى المدينة j حيث $(j=1,2,3)$

ونلاحظ أن $\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$

أي
$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{02} a_i = 03+06=09 \\ \sum_{j=1}^{03} b_j = 01+02+03=06\end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{02} a_i \neq \sum_{j=1}^{03} b_j$$

نكون أمام نموذج غير متوازن (حالة فائض في الإنتاج) لذلك نضيف مركز توزيع وهمي حاجته

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow b_{3+1} = \sum_{i=1}^{02} a_i - \sum_{j=1}^{03} b_j = 09-06=03$$

وتكلفة نقل إلى جميع مراكز التسليم تساوي أصفارا ويصبح جدول النقل للمعاملات الفنية الجديد كمايلي:

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=02$	$C_{12}=03$	$C_{13}=04$	$C_{14}=0$	$a_1=06$
S_2	$C_{21}=01$	$C_{22}=03$	$C_{23}=05$	$C_{24}=0$	$a_2=03$
b_j	$b_1=01$	$b_2=02$	$b_3=03$	$b_4=03$	$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 09$

بما أن مجموع العرض يساوي مجموع الطلب فإن النموذج يكتب كالتالي

-شروط مراكز التوزيع
$$\begin{cases} X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} \le 06 \\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} \le 03 \end{cases}$$

-شروط مراكز الإستلام
$$\begin{cases} X_{11}+X_{21} \ge 01 \\ X_{12}+X_{22} \ge 02 \\ X_{13}+X_{23} \ge 03 \\ X_{14}+X_{24} \ge 03 \end{cases}$$

-قيد عدم السلبية: $X_{ij} \ge 0$ حيث $(i=1,2)$ و $(j=1,2,3,4)$

-دالة الهدف: إن دالة الهدف المطلوبة عند حل المشكلة هذه،تقوم على أساس جعل تكاليف نقل البضاعة المنتجة من المخازن إلى الوكلاء أقل مايمكن أي أن:

$$MIN(W) = \sum_{i=1}^{02}\sum_{j=1}^{04} C_{ij}X_{ij} = 02X_{11}+03X_{12}+04X_{13}+0X_{14}+01X_{21}+03X_{22}+05X_{23}+0X_{24}$$

ويمكن كتابة البرنامج النهائي بالشكل التالي:

$$MIN(W)=\sum_{i=1}^{02}\sum_{j=1}^{04}C_{ij}X_{ij}=02X_{11}+03X_{12}+04X_{13}+0X_{14}+01X_{21}+03X_{22}+05X_{23}+0X_{24}$$

$$S/C=\begin{cases}X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14}\le 06\\ X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24}\le 03\\ X_{11}+X_{21}\ge 01\\ X_{12}+X_{22}\ge 02\\ X_{13}+X_{23}\ge 03\\ X_{14}+X_{24}\ge 03\\ X_{ij}\ge 0 \qquad (i=1,2);(j=1,2,3,4)\end{cases}$$

06-أنواع مسائل النقل: يمكن تقسيم مشالكل النقل إلى الحالتين التاليتين

06-01 من حيث التوازن

-مشاكل النقل المغلقة (مجموع العرض يساوي مجموع الطلب)

-مشاكل النقل المفتوحة (مجموع العرض لايساوي مجموع الطلب)

وهنا توجد حالتين:

-وجود حالة عجز(الطلب يزيد عن العرض)

-وجود حالة فائض (العرض يزيد عن الطلب)

06-02 من حيث العلاقة بين مراكز العرض ومراكز الطلب

-مشاكل النقل المباشر (ذو مرحلة واحدة)

-مشاكل النقل غير المباشر(متعدد المراحل)

07-خطوات الحل بإستخدام أسلوب النقل:إن أسلوب النقل هو أسوب حل في شكل خطوات محددة تعتمد على البحث عن الحلول وتقييمها بقصد الوصول إلى الحل الأمثل، وهو في ذلك يتشابه كثيرا مع أسلوب السمبلكس في مشاكل البرمجة الخطية بصفة عامة، وتتكون هذه العملية من خمسة خطوات أساسية يمكن توضيحها في النقاط التالية:

-**الخطوة الأولى:** ضع مشكلة النقل في شكل جدول النقل التقليدي والذي يحتوي على بيانات العرض والطلب وتكلفة نقل الوحدة الواحدة.

-**الخطوة الثانية:** قم بعمل التوازن (إذا لزم الأمر)،وذلك لضمان تعادل إجمالي العرض مع إجمالي الطلب ويكون ذلك عن طريق إضافة إما صفا وهميا في حالة العجز أو عمودا وهميا في حالة الفائض، أما إذا كانت المشكلة متوازنة فلا داعي للقيام بهذه الخطوة.

-**الخطوة الثالثة:** أوجد الحل المبدئي الممكن وهو عبارة عن الحل الذي يأخذ في الحسبان كل من قيود العرض وقيود الطلب ويفي بشرط عدد المتغيرات الأساسية التي تساوي عدد الصفوف+عدد الأعمدة-01 $(m+n-1)$

من المتغيرات غير الأساسية والتي عددها $m \times n-(m+n-1)$ ويمكن الوصول إلى الحل الإبتدائي عن طريق أي من الطرق التالية:

-طريقة الركن الشمالي الشرقي والتي يطلق عليها طريقة الركن الشمالي الغربي في الإنجليزية (North West Corner Rule)

-طريقة الصف الأدنى(RMI)(Row Minimum)

-طريقة الصف الأدنى المعدل(MRMI)(Modified Row Minimum)

-طريقة العمود الأدنى(CMI)(Column Minimum)

-طريقة العمود الأدنى المعدل(MCMI) (Modified Column Minimum)

-طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة(MMI)(Matrix Minimum)

-طريقة فوجل التقريبية(VAM)(**V**ogal"s Approximation Méthod)

- طريقة روسيل التقريبة (RAM)(Russels Approximation Méthod)

-**الخطوة الرابعة:** إختيار أمثلية الحل وفيها يتم إختبار ما إذا كان الحل هو حلا إمثل أم لا، ويمكن أن يتم ذلك بإستخدام أي من الطرق التالية:

-طريقة المسار المتعرج (Stepping Stone Method)

-طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method)

-الطريقة التوزيعية أو طريقة لوريا (Distributive Method or Luria Method)

-طريقة فورد–فلكورسن (Ford–Foulkerson)

-**الخطوة الخامسة:** تحسين الحل الأولي ويكون ذلك في حالة التأكد من أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل في الخطوة السابقة، ويتم في هذه الخطوة تغيير المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) الموجودة في في الحل عن طريق إدخال متغيرات غير أساسية (الخلايا الفارغة) ويتضمن ذلك أيضا تحديد أقصى قيمة يمكن ان يأخذها المتغير الأساسي الجديد.

-**الخطوة السادسة:** كرر الخطوتين الرابعة والخامسة حتى تصل إلى الحل الأمثل.

08- إيجاد الحل الأولي(القاعدي) لمسائل النقل في حالة التقليل: يمكن إيجاد الحل الأولي لمسائل النقل في حالة التقليل بعدة طرق نذكر منها:

-طريقة الركن الشمالي الشرقي والتي يطلق عليها طريقة الركن الشمالي الغربي في الإنجليزية (NWC)(North West Corner Method)

-طريقة الصف الأدنى(RM)(Row Minimum)

-طريقة الصف الأدنى المعدل(MRM)(Modified Row Minimum)

-طريقة العمود الأدنى(CM)(Column Minimum)

-طريقة العمود الأدنى المعدل(MCM) (Modified Column Minimum)

-طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة(MM)(Matrix Minimum)

–طريقة فوجل التقريبية(Vogal"s Approximation Méthod)(VAM)

– طريقة روسيل التقريبة (Russels Approximation Méthod)(RAM)

وسوف نتطرق إلى كل حالة من هاته الحالات بالتفصيل كمايلي:

01-08طريقة الركن الشمالي الغربي (North West Corner Method)(NWC):وهي من أكثر الطرق الرياضية شيوعا التي لا تحتاج إلى تكنيك رياضي عالي في الحل، وفكرة هذه الطريقة تقوم على أساس البدء بحل المشكلة من الربع الأول في جدول النقل (والذي يسمى أيضا بخلية النقل) الذي يقع في الجزء الشمالي الغربي من الجدول، ويتم إعتماد القيم (a_i, b_j) كمؤشر في عملية التوزيع للبضائع والمنتجات بين مراكز التوزيع والإستلام.

ويمكن تلخيص خطولت إستخدام هذه الطريقة كمايلي:

أولا: نبدأ بالخلية التي تقع في شمال غرب مصفوفة النقل وهي الخلية $(1,1)$ ولتحديد الكمية التي توضع في هذه الخلية تتم المقارنة بين الكمية المعروضة من المصدر الأول أي الكمية (a_1) والكمية المطلوبة في جهة الإستخدام الأول أي الكمية (b_1).

- فإذا كانت $b_1 < a_1$ والذي يعني أن الكمية المطلوبة في جهة الإستخدام الأول تقل عن الكمية المتاحة للمصدر الأول فيتم شغل الخلية $(1,1)$ بمقدار (b_1) ويرمز لهذه الكمية بالرمز (X_{11}) ويعني ذلك إستيفاء قيد العمود الأول وبالتالي يجب حذفه من مصفوفة النقل،أما الكمية المعروضة من المصدر الأول في الصف الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها بالكمية (X_{11})، ثم نتحرك أفقيا إلى الخلية $(1,2)$ في الخطوة الموالية.
- وإذا كانت $b_1 > a_1$ والذي يعني أن الكمية العروضة في المصدر الأول تقل عن الكمية المطلوبة في جهة الإستخدام الأولي فيتم شغل الخلية $(1,1)$بمقدار (a_1) والتي يرمز لها بالرمز (X_{11}) ويعني ذلك إستيفاء قيد الصف الأول وبالتالي يجب حذفه من مصفوفة النقل،أما الكمية المطلوبة في جهة الإستخدام الأول الواقعة في العمود الأول من المصفوفة فيتم تخفيضها بالكمية (X_{11})، ثم نتحرك رأسيا إلى الخلية $(2,1)$في الخطوة الموالية.
- أما إذا كانت $b_1 = a_1$ والذي يعني أن الكمية المعروضة من المصدر الأول تساوي الكمية المطلوبة في جهة الإستخدام الأول فيتم شغل الخلية $(1,1)$بأي من المقدارين المتساويين والذي يرمز له بالرمز (X_{11}) ويعني ذلك إستيفاء قيد الصف الأول وقيد العمود الأول من مصفوفة النقل، ومن ثم يتم حذف كلا من الصف الأول والعمود الأول ثم نتحرك قطريا إلى الخلية $(2,2)$في الخطو الموالية ومن ثم فإننا نلاحظ دائما أن

$$X_{11} = \min(a_1, b_1)$$

ثانيا:يتم الإستمرار في هذه الخطوات بلإنتقال التدريجي من خلال الخلايا الواقعة في الشمال الغربي نحو الخلايا الواقعة في الجنوب الشرقي من مصفوفة المعاملات الفنية لنموذج النقل حتى يتم الإنتهاء من توزيع (او نقل) كل الكميات المعروضة من المصادر المختلفة وفقا لإحتياجات الطلب في جهات الإستخدام المختلفة، حتى تتحقق العلاقة التالية $(m+n-1)$

ثالثا:نحسب التكلفة الإجمالية لمسالة النقل حسب العلاقة التالية:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+.........+C_{mn}X_{mn}$$

مثال04: لتكن لديك مسألة النقل والموضحة من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=04$	$C_{12}=08$	$C_{13}=08$	$a_1=76$
S_2	$C_{21}=16$	$C_{22}=24$	$C_{23}=16$	$a_2=82$
S_3	$C_{31}=08$	$C_{32}=16$	$C_{33}=24$	$a_3=77$
b_j	$b_1=72$	$b_2=102$	$b_3=41$	$\sum_{i=1}^{3}a_i\neq\sum_{j=1}^{3}b_j$

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل:نفرض أن X_{ij} هي الكمية المنقولة من المعامل (مراكز التوزيع) حيث $(i=1,2,3)$ إلى مراكز التسليم $(j=1,2,3)$ ونلاحظ أن $\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$ أي

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{03}a_i=76+82+77=235\\ \sum_{j=1}^{03}b_j=72+102+41=215\end{cases}\Rightarrow\sum_{i=1}^{03}a_i\neq\sum_{j=1}^{03}b_j$$

نكون أمام نموذج غير متوازن (حالة فائض في الإنتاج) لذلك نضيف مركز تسليم وهمي حاجته

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j\Rightarrow b_{3+1}=\sum_{i=1}^{03}a_i-\sum_{j=1}^{03}b_j=235-215=20$$

وتكلفة نقل إلى جميع مراكز التسليم تساوي أصفارا ويصبح جدول النقل للمعاملات الفنية الجديد كمايلي:

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=04$	$C_{12}=08$	$C_{13}=08$	$C_{14}=0$	$a_1=76$
S_2	$C_{21}=16$	$C_{22}=24$	$C_{23}=16$	$C_{24}=0$	$a_2=82$
S_3	$C_{31}=08$	$C_{32}=16$	$C_{33}=24$	$C_{34}=0$	$a_3=77$
b_j	$b_1=72$	$b_2=102$	$b_3=41$	$b_4=20$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=235$

نقوم بعملية التوزيع بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

بتطبيق العلاقة الأساسية $X_{ij}=\min(a_i,b_j)$ وبالتالي نبدأ بالخلية (X_{11})

$X_{11}=\min(a_1,b_1)\Rightarrow X_{11}=\min(72,76)=72$

يتم توزيع 72 وحدة فيتشبع مركز الإستلام D_1 ويتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=72-72=0\\ b_1=76-72=04\end{cases}$

ننتقل إلى الخلية X_{12} حيث: $X_{12}=\min(a_1,b_2)\Rightarrow X_{12}=\min(04,102)=04$

بعد توزيع الكمية 04 وحدات على الخلية X_{12} يتم تشبع مركز التوزيع S_1 فيتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=04-04=0\\ b_2=102-04=98\end{cases}$

ننتقل إلى الخلية X_{22} حيث: $X_{22}=\min(a_2,b_2)\Rightarrow X_{22}=\min(82,98)=82$

بعد توزيع الكمية 82 وحدة على الخلية X_{22} يتم تشبع مركز التوزيع S_2 فيتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=82-82=0\\ b_3=98-82=16\end{cases}$

ننتقل إلى الخلية X_{32} حيث: $X_{32}=\min(a_3,b_2)\Rightarrow X_{32}=\min(77,16)=16$

بعد توزيع الكمية 16 وحدة على الخلية X_{32} يتم التشبع مركز الإستيلام D_2 فيتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=77-16=61\\ b_2=16-16=0\end{cases}$

ننتقل إلى الخلية X_{33} حيث: $X_{33}=\min(a_3,b_3)\Rightarrow X_{33}=\min(61,41)=20$

بعد توزيع الكمية41 وحدة على الخلية X_{33} يتم تشبع مركز الإستيلام D_3 فيتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=61-41=20\\ b_3=41-41=0\end{cases}$

ننتقل إلى الخلية X_{34} حيث: $X_{34}=\min(a_3,b_4)\Rightarrow X_{34}=\min(20,20)=20$

بعد توزيع الكمية20 وحدة على الخلية X_{34} يتم تشبع مركز الإستيلام D_4 و مركز التوزيع S_4 فيتم حذف العمود والصف من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=20-20=0\\ b_4=20-20=0\end{cases}$

ويمكن عرض النتائج المتحصل عليها من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=04$ $X_{11}=72$	$C_{12}=08$ $X_{12}=04$	$C_{13}=08$ $X_{13}=0$	$C_{14}=0$ $X_{14}=0$	$a_1=\cancel{76}=\cancel{04}=0$
S_2	$C_{21}=16$ $X_{21}=0$	$C_{22}=24$ $X_{22}=82$	$C_{23}=16$ $X_{23}=0$	$C_{24}=0$ $X_{24}=0$	$a_2=\cancel{82}=0$
S_3	$C_{31}=08$ $X_{31}=0$	$C_{32}=16$ $X_{32}=16$	$C_{33}=24$ $X_{33}=41$	$C_{34}=0$ $X_{34}=20$	$a_3=\cancel{77}=\cancel{61}=\cancel{20}=0$
b_j	$b_1=\cancel{72}=0$	$b_2=\cancel{102}=\cancel{98}=\cancel{16}=0$	$b_3=\cancel{41}=0$	$b_4=\cancel{20}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=235$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر−01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+04-01=06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=72, X_{12}=04, X_{22}=98, X_{32}=16, X_{33}=41, X_{34}=20$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{14}=X_{21}=X_{23}=X_{24}=X_{31}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{22}X_{22}+C_{32}X_{32}+C_{33}X_{33}+C_{34}X_{34}\Rightarrow$$

$$\min(Z)=72\times04+04\times08+82\times24+16\times16+41\times24+20\times0=3528um$$

مثال05: لتكن لديك مسألة النقل والموضحة من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=04$	$C_{12}=01$	$C_{13}=02$	$C_{14}=03$	$a_1=100$
S_2	$C_{21}=06$	$C_{22}=01$	$C_{23}=03$	$C_{24}=05$	$a_2=50$
S_3	$C_{31}=07$	$C_{32}=05$	$C_{33}=08$	$C_{34}=07$	$a_3=30$
b_j	$b_1=20$	$b_2=80$	$b_3=50$	$b_4=50$	$\sum_{i=1}^{3}a_i\neq\sum_{j=1}^{4}b_j$

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل:نفرض أن X_{ij} هي الكمية المنقولة من المعامل (مراكز التوزيع) $(i=1,2,3)$ حيث إلى مراكز التسليم $(j=1,2,3,4)$ ونلاحظ أن $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ أي

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{03} a_i = 100+50+30=180 \\ \sum_{j=1}^{04} b_j = 20+80+50+50=200 \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{03} a_i \neq \sum_{j=1}^{04} b_j$$

نكون أمام نموذج غير متوازن (حالة عجز في الإنتاج) لذلك نضيف مركز توزيع وهمي حاجته

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \Rightarrow a_{3+1} = \sum_{j=1}^{04} b_j - \sum_{i=1}^{03} a_i = 200-180=20$$

وتكلفة نقل إلى جميع مراكز التوزيع تساوي أصفارا ويصبح جدول النقل للمعاملات الفنية الجديد كمايلي:

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=04$	$C_{12}=01$	$C_{13}=02$	$C_{14}=03$	$a_1=100$
S_2	$C_{21}=06$	$C_{22}=01$	$C_{23}=03$	$C_{24}=05$	$a_2=50$
S_3	$C_{31}=07$	$C_{32}=05$	$C_{33}=08$	$C_{34}=07$	$a_3=30$
S_4	$C_{41}=0$	$C_{42}=0$	$C_{43}=0$	$C_{44}=0$	$a_4=20$
b_j	$b_1=20$	$b_2=80$	$b_3=50$	$b_4=50$	$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 200$

نقوم بعملية التوزيع بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

بتطبيق العلاقة الأساسية $X_{ij} = \min(a_i, b_j)$ وبالتالي نبدأ بالخلية (X_{11})

$$X_{11} = \min(a_1, b_1) \Rightarrow X_{11} = \min(20,100) = 20$$

يتم توزيع 20 وحدة فيتشبع مركز الإستلام D_1 ويتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي:

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 20-20=0 \\ b_1 = 100-80=80 \end{cases}$$

ننتقل إلى الخلية X_{12}حيث:

$$X_{12} = \min(a_1, b_2) \Rightarrow X_{12} = \min(80,80) = 80$$

بعد توزيع الكمية 80 وحدة على الخلية X_{12} يتم تشبع مركز الإستلام D_2 ومركز التوزيع S_1 فيتم حذف العمود والصف من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي:

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 80-80=0 \\ b_2 = 80-80=0 \end{cases}$$

ننتقل إلى الخلية X_{23} حيث: $X_{23}=\min(a_2,b_3)\Rightarrow X_{23}=\min(50,50)=50$

بعد توزيع الكمية 50 وحدة على الخلية X_{23} يتم تشبع مركز الإستلام D_3 فيتم حذف العمود والصف من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=50-50=0\\ b_3=50-50=0\end{cases}$

ننتقل إلى الخلية X_{34} حيث: $X_{34}=\min(a_3,b_4)\Rightarrow X_{34}=\min(30,50)=30$

بعد توزيع الكمية 30 وحدة على الخلية X_{34} لا يتشبع مركز الإستيلام D_3 وتبقى 20 وحدة إضافية، ويتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=30-30=0\\ b_4=50-30=20\end{cases}$

ننتقل إلى الخلية X_{44} حيث $X_{34}=\min(a_3,b_4)\Rightarrow X_{34}=\min(30,50)=30$

بعد توزيع الكمية 20 وحدة على الخلية X_{44} يتم تشبع مركز الإستيلام D_4 فيتم حذف العمود والصف من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي: $\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=20-20=0\\ b_4=20-20=0\end{cases}$

ويمكن عرض النتائج المتحصل عليها من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=04$ $X_{11}=20$	$C_{12}=01$ $X_{12}=80$	$C_{13}=02$ $X_{13}=0$	$C_{14}=03$ $X_{14}=0$	$a_1=\cancel{100}=\cancel{80}=0$
S_2	$C_{21}=06$ $X_{21}=0$	$C_{22}=01$ $X_{22}=0$	$C_{23}=03$ $X_{23}=50$	$C_{24}=05$ $X_{24}=0$	$a_2=\cancel{50}=0$
S_3	$C_{31}=07$ $X_{31}=0$	$C_{32}=05$ $X_{32}=\varepsilon$	$C_{33}=08$ $X_{33}=0$	$C_{34}=07$ $X_{34}=30$	$a_3=\cancel{30}=0$
S_4	$C_{41}=0$ $X_{41}=0$	$C_{42}=0$ $X_{42}=0$	$C_{43}=0$ $X_{43}=\varepsilon$	$C_{44}=0$ $X_{44}=20$	$a_4=\cancel{20}=0$
b_j	$b_1=\cancel{20}=0$	$b_2=\cancel{80}=0$	$b_3=\cancel{50}=0$	$b_4=\cancel{50}=\cancel{20}=0$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=200$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=04+04-01=07$$

وبالتالي فالحل الأولي غير مقبول لأن عدد الخانات الشاغرة هو 05 ولكي يصبح هذا الحل مقبولا أي 07 خانات نقوم بإضافة قيمة صغيرة تسمى (ابسلن)(ε) وهذه القيمة تضاف إلى خلية شاغرة بحيث يجب أن لا تشكل مسارا مغلقا مع بقية الخلايا الشاغرة (سوف يتم توضيح هذه الفكرة في تحسين أمثلية الحل)

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=20, X_{12}=80, X_{23}=50, X_{32}=\varepsilon, X_{34}=30, X_{43}=\varepsilon, X_{44}=20$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{14}=X_{21}=X_{22}=X_{24}=X_{31}=X_{33}=X_{41}=X_{42}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{23}X_{23}+C_{32}X_{32}+C_{34}X_{34}+C_{43}X_{43}+C_{44}X_{44}\Rightarrow$$
$$\min(Z)=20\times 04+80\times 01+50\times 03+\varepsilon\times 05+30\times 07+\varepsilon\times 0+20\times 0=520um$$

مثال06: تمتلك الشركة العربية لصناعة الملابس ثلاثة مخازن في المواقع التالية(S_1,S_2,S_3) على التوالي، يتم الحصول على مخرجات الشركة من أربع مراكز تسويقية وكانت طاقات المخازن التجهيزية على التوالي (300،500،600) وحدة، فيما كانت طلبات المناطق الإستهلاكية (250،400،350،400) وحدة.

أما تكاليف النقل للوحدة الواحدة فهي ممثلة في الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=07$	$C_{12}=05$	$C_{13}=10$	$C_{14}=08$	$a_1=600$
S_2	$C_{21}=03$	$C_{22}=06$	$C_{23}=12$	$C_{24}=04$	$a_2=500$
S_3	$C_{31}=04$	$C_{32}=07$	$C_{33}=09$	$C_{34}=15$	$a_3=300$
b_j	$b_1=400$	$b_2=350$	$b_3=400$	$b_4=250$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=1400$

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل:نلاحظ أن مسالة النقل متوازنة أي مجموع العرض يساوي مجموع الطلب $\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=1400$

بتطبيق العلاقة الأساسية $X_{ij}=\min(a_i,b_j)$ وبالتالي نبدأ بالخلية (X_{11})

$$X_{11}=\min(a_1,b_1)\Rightarrow X_{11}=\min(600,400)=400$$

يتم توزيع 400 وحدة فيتشبع مركز الإستلام D_1 ويتم حذف العمود من مصفوفة النقل

بعد ذلك نقوم بحساب القيم الجديدة بعد الخصم كالتالي:

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=600-400=200\\ b_1=400-400=0\end{cases}$$

ننتقل إلى الخلية X_{12} حيث $X_{12}=\min(a_1,b_2)\Rightarrow X_{12}=\min(200,350)=200$

بعد توزيع الكمية 350 وحدة على الخلية X_{12} يتم تشبع مركز التوزيع S_1 فيتم حذف الصف اما العمود فينقص الطلب الإجمالي ب200 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=200-200=0\\ b_2=350-200=150\end{cases}$$

ننتقل إلى الخلية X_{23}حيث: $X_{23}=\min(a_2,b_3)\Rightarrow X_{23}=\min(500,150)=150$

بعد توزيع الكمية 150وحدة على الخلية X_{23} يتم تشبع مركز الإستلام D_2 فيتم حذف العمود أما الصف فينقص العرض الإجمالي ب150 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=500-150=350\\ b_3=150-150=0\end{cases}$$

ننتقل إلى الخلية X_{23}حيث: $X_{23}=\min(a_2,b_3)\Rightarrow X_{23}=\min(350,400)=350$

بعد توزيع الكمية 350 وحدة على الخلية X_{23} يتشبع مركز التوزيع S_2 ويتم حذف الصف الثاني من مصفوفة النقل،أما الطلب الإجمالي فينقص ب350 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=350-350=0\\ b_3=400-350=50\end{cases}$$

ننتقل إلى الخلية X_{33} حيث $X_{33}=\min(a_3,b_3)\Rightarrow X_{33}=\min(300,50)=50$

بعد توزيع الكمية 50 وحدة على الخلية X_{33} يتم تشبع مركز الإستيلام D_3 فيتم حذف العمود الثالث من مصفوفة النقل أما العرض الإجمالي فينقص ب50 وحدة كالتالي:

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=300-50=250\\ b_3=50-50=0\end{cases}$$

في الأخير لم يتبقى في مصفوفة النقل سوى الخلية X_{34} فيتم شغلها بالكمية 250 وحدة فيتشبع مركز التوزيع الثالث S_3 وكذلك مركز الإستلام الرابع D_4 فيتم حذف الصف الرابع والعمود الرابع من مصفوفة النقل.

ويمكن عرض النتائج المتحصل عليها من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=07$ $X_{11}=400$	$C_{12}=05$ $X_{12}=200$	$C_{13}=10$ $X_{13}=0$	$C_{14}=08$ $X_{14}=0$	$a_1=\cancel{600}=\cancel{200}=0$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=06$ $X_{22}=150$	$C_{23}=12$ $X_{23}=350$	$C_{24}=04$ $X_{24}=0$	$a_2=\cancel{500}=\cancel{350}=0$
S_3	$C_{31}=04$ $X_{31}=0$	$C_{32}=07$ $X_{32}=0$	$C_{33}=09$ $X_{33}=50$	$C_{34}=15$ $X_{34}=250$	$a_3=\cancel{300}=\cancel{250}=0$
b_j	$b_1=\cancel{400}=0$	$b_2=\cancel{350}=\cancel{150}=0$	$b_3=\cancel{400}=\cancel{50}=0$	$b_4=\cancel{250}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=1400$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر−01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+04-01=06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=400, X_{12}=200, X_{22}=150, X_{23}=350, X_{33}=50, X_{34}=250$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{14}=X_{21}=X_{24}=X_{31}=X_{32}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{33}X_{33}++C_{34}X_{34}\Rightarrow$$
$$\min(Z)=400\times 07+200\times 05+150\times 06+350\times 12+50\times 09+250\times 15=1185um$$

08−02 طريقة الصف الأدنى(Row Minimum)::تبدأ هذه الطريقة بإختيار الخلية التي لها أدنى تكلفة نقل في الصف الأول ويتم شغل هذه الخلية بنفس الأسلوب السابق، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الأول من مصفوفة النقل، ثم ننتقل إلى الصف الثاني ونختار الخلية التي لها أدنى تكلفة نقل ويتم شغلها، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الثاني من مصفوفة النقل، وهكذاحتى يتم الإنتهاء من جميع صفوف مصفوفة النقل.

مثال07: نفس معطيات المثال رقم 06

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة الصف الأدنى(Row Minimum)مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل:مسألة النقل متوازنة $\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=1400$

نبدأ عملية التوزيع بالصف الأول ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة وهي الخلية X_{12} ويتم شغلها بالكمية X_{12} حيث $X_{12}=\min(a_1,b_2)\Rightarrow X_{12}=\min(600,350)=350$

يتم حذف العمود الثاني الذي تم إستيفاؤه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الأول بمقدار 350 وحدة كالتالي:

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=600-350=250\\ b_2=350-350=0\end{cases}$$

بعد ذلك ننتقل إلى الخلية التي لها أدنى تكلفة في الصف وهي الخلية X_{11} ويتم شغلها بالكمية X_{11}حيث

$$X_{11}=\min(a_1,b_1)\Rightarrow X_{11}=\min(250,400)=250$$

ويتم حذف الصف الأول نظرا لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبة في العمود الأول بمقدار 250 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=250-250=0\\ b_1=400-250=150\end{cases}$$

بعد حذف الصف الأول و يتم الإنتقال إلى الصف الثاني ونختار الخلية التي لها ادنى تكلفة وهي الخلية X_{21}

ويتم شغلها بالكمية X_{21} حيث: $X_{21}=\min(a_2,b_1)\Rightarrow X_{21}=\min(500,150)=150$

ويتم حذف العمود الأول الذي تم إستيفاؤه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الثاني ب150 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 500 - 150 = 350 \\ b_1 = 150 - 150 = 0 \end{cases}$$

يتم الإنتقال بعد ذلك إلى الخلية التي لها أدنى تكلفة في الصف الثاني وهي الخلية X_{24} ويتم شغلها بالكمية X_{24} حيث $X_{24} = \min(a_2, b_4) \Rightarrow X_{24} = \min(350, 250) = 250$

يتم حذف العمود الرابع نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض من الصف الثاني ب250 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 350 - 250 = 100 \\ b_4 = 250 - 250 = 0 \end{cases}$$

يتم الإنتقال بعد ذلك إلى الخلية التي لها أدنى تكلفة في الصف الثاني وهي الخلية X_{23} ويتم شغلها بالكمية X_{23} حيث $X_{23} = \min(a_2, b_3) \Rightarrow X_{23} = \min(100, 400) = 100$

يتم حذف الصف الثاني نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي الطلب من العمود الثالث ب100 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 100 - 100 = 0 \\ b_3 = 400 - 100 = 300 \end{cases}$$

لم يتبقى في الجدول غير الخلية X_{33} فيتم شغلها بالكمية المتبقية وهي 300 وحدة وبالتالي يتم إستيفاء الصف الثالث والعمود الثالث كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 300 - 300 = 0 \\ b_3 = 300 - 300 = 0 \end{cases}$$

ويمكن تلخيص نتائج ماتم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11} = 07$ $X_{11} = 250$	$C_{12} = 05$ $X_{12} = 350$	$C_{13} = 10$ $X_{13} = 0$	$C_{14} = 08$ $X_{14} = 0$	$a_1 = \cancel{600} = \cancel{250} = 0$
S_2	$C_{21} = 03$ $X_{21} = 150$	$C_{22} = 06$ $X_{22} = 0$	$C_{23} = 12$ $X_{23} = 100$	$C_{24} = 04$ $X_{24} = 250$	$a_2 = \cancel{500} = \cancel{350} = \cancel{100} = 0$
S_3	$C_{31} = 04$ $X_{31} = 0$	$C_{32} = 07$ $X_{32} = 0$	$C_{33} = 09$ $X_{33} = 300$	$C_{34} = 15$ $X_{34} = 0$	$a_3 = \cancel{300} = 0$
b_j	$b_1 = \cancel{400} = \cancel{150} = \mathbf{0}$	$b_2 = \cancel{350} = 0$	$b_3 = \cancel{400} = \cancel{300} = 0$	$b_4 = \cancel{250} = 0$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K = (m + n - 1) \Rightarrow K = 03 + 04 - 01 = 06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11} = 250, X_{12} = 350, X_{21} = 150, X_{23} = 100, X_{24} = 250, X_{33} = 100$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{14}=X_{22}=X_{31}=X_{32}=X_{34}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{23}X_{23}+C_{24}X_{24}+C_{33}X_{33}\Rightarrow$$

$$\min(Z)=250\times07+350\times05+150\times03+100\times12+250\times04+300\times09=8850um$$

08-03 طريقة الصف الأدنى المعدل(Modified Row Minimum): تقوم هذه الطريقة على إختيار أقل تكلفة نقل في كل صف وذلك تبعا إلى عمود الطلب حيث يتم توزيع عمود الطلب على أدنى تكلفة في السطر فإذا تم إستيفاء السطر ننتقل إلى السطر الثاني، وإذا لم يتم إستيفاء السطر وتم إستيفاء العمود ننتقل إلى عمود آخر وهكذا حتى يتم شطب جميع الصفوف والأعمدة.

مثال08: نفس معطيات المثال رقم06

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة الصف الأدنى المعدل(Modified Row Minimum) مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل: مسألة النقل متوازنة $\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=1400$

نبدأ عملية التوزيع بالصف الأول ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة وهي الخلية X_{12} ويتم شغلها بالكمية X_{12} حيث $X_{12}=\min(a_1,b_2)\Rightarrow X_{12}=\min(350,600)=350$

يتم حذف العمود الثاني الذي تم إستيفاؤه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الأول بمقدار 350 وحدة كالتالي:

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=600-350=250\\ b_2=350-350=0\end{cases}$$

ننتقل بعذ ذلك إلى الخلية X_{14} في الصف الأول دائما ويتم شغلها بالكمية X_{14} حيث

$$X_{14}=\min(a_1,b_4)\Rightarrow X_{14}=\min(250,250)=0$$

ويتم حذف الصف الأول نظرا لإستيفائه بالكامل وكذلك العمود الرابع لإستيفاؤه بالكامل هو الأخر وتخفض الكمية المعروضة والمطلوبة في الصف الأول والعمود الرابع بمقدار 250 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=250-250=0\\ b_4=250-250=0\end{cases}$$

بعد ذلك ننتقل إلى الخلية التي لها أدنى تكلفة في الصف الثاني وهي الخلية X_{21} ويتم شغلها بالكمية X_{21} حيث $X_{21}=\min(a_2,b_1)\Rightarrow X_{21}=\min(400,500)=400$

ويتم حذف العمود الأول نظرا لإستيفائه بالكامل وتخفض الكمية المعروضة في الصف الأول بمقدار 400 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=500-400=100\\ b_1=400-400=0\end{cases}$$

نبقى دائما في الصف الثاني لأنه لم يتم إستيفاؤه بالكامل ونختار الخلية التي لها ادنى تكلفة وهي الخلية X_{23} ويتم شغلها بالكمية X_{23} حيث: $X_{23}=\min(a_2,b_3)\Rightarrow X_{23}=\min(100,400)=100$

ويتم حذف الصف الثاني الذي تم إستيفاؤه بالكامل ويخفض إجمالي الطلب في العمود الثالث ب100 وحدة

كالتالي $\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 100 - 100 = 0 \\ b_1 = 400 - 100 = 300 \end{cases}$

يتم الإنتقال بعد ذلك إلى الصف الثالث ونختار الخلية التي لها أدنى تكلفة وهي الخلية الوحيدة المتبقاة X_{33}

ويتم شغلها بالكمية X_{33} حيث $X_{33} = \min(a_3, b_3) \Rightarrow X_{33} = \min(300, 300) = 300$

ويتم حذف الصف الثالث والعمود الثالث لإستيفائهما بالكامل ويخفض إجمالي الطلب والعرض ب300 وحدة

كالتالي $\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 300 - 300 = 0 \\ b_3 = 300 - 300 = 0 \end{cases}$

ويمكن تلخيص نتائج ماتم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11} = 07$ $X_{11} = 0$	$C_{12} = 05$ $X_{12} = 350$	$C_{13} = 10$ $X_{13} = 0$	$C_{14} = 08$ $X_{14} = 250$	$a_1 = \cancel{600}$ $= \cancel{250} = 0$
S_2	$C_{21} = 03$ $X_{21} = 400$	$C_{22} = 06$ $X_{22} = 0$	$C_{23} = 12$ $X_{23} = 100$	$C_{24} = 04$ $X_{24} = \varepsilon$	$a_2 = \cancel{500}$ $= \cancel{100} = 0$
S_3	$C_{31} = 04$ $X_{31} = 0$	$C_{32} = 07$ $X_{32} = 0$	$C_{33} = 09$ $X_{33} = 300$	$C_{34} = 15$ $X_{34} = 0$	$a_3 = \cancel{300} = 0$
b_j	$b_1 = \cancel{400} = 0$	$b_2 = \cancel{350} = 0$	$b_3 = \cancel{400}$ $= \cancel{300} = 0$	$b_4 = \cancel{250} = 0$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر−01

$$K = (m + n - 1) \Rightarrow K = 03 + 04 - 01 = 05$$

وبالتالي فالحل الأولي غير مقبول ولكي يصبح مقبول نضيف قيمة صغيرة جدا(ε) إما في الصف الثاني أو الصف الثالث ذي أقل تكلفة أي إما في الخلية X_{24} أو في الخلية X_{31}

فيصبح الحل مقبول أي

$$K = (m + n - 1) \Rightarrow K = 03 + 04 - 01 = 06$$

المتغيرات الأساسية هي $X_{12} = 350, X_{14} = 250, X_{21} = 400, X_{23} = 100, X_{24} = \varepsilon, X_{33} = 100$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11} = X_{13} = X_{22} = X_{31} = X_{32} = X_{34} = 0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z) = C_{12}X_{12} + C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{33}X_{33} \Rightarrow$$

$$\min(Z) = 350 \times 05 + 250 \times 08 + 400 \times 03 + 100 \times 12 + \varepsilon \times 04 + 300 \times 09 = 8850um$$

08-04 طريقة العمود الأدنى (Column Minimum): تختلف هذه الطريقة عن الطريقة السابقة حيث تبدأ بإختيار الخلية التي بها أدنى تكلفة في العمود الأول ويتم شغل هذه الخلية بنفس الأسلوب السابق وبعد الإنتهاء من العمود الأول وحذفه ننتقل إلى العمود الثاني فالثالث وهكذا حتى يتم الإنتهاء من المصفوفة كلها.

مثال09: نفس المثال السابق رقم06

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة العمود الأدنى (Column Minimum) مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

نبدأ بالعمود الأول ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{21} ويتم شغلها بالكمية X_{21} حيث

$$X_{21} = \min(a_2, b_1) \Rightarrow X_{21} = \min(500, 400) = 400$$

يتم حذف العمود الأول نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض من الصف الثاني ب400 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 500 - 400 = 100 \\ b_1 = 400 - 400 = 0 \end{cases}$$

يتم الإنتقال بعد ذلك إلى العمود الثاني ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{12} ويتم شغلها بالكمية X_{12} حيث

$$X_{12} = \min(a_1, b_2) \Rightarrow X_{12} = \min(600, 350) = 350$$

يتم حذف العمود الثاني نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الأول ب350 وحدة كالتالي:

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 600 - 350 = 250 \\ b_2 = 350 - 350 = 0 \end{cases}$$

ننتقل بعد ذلك إلى العمود الثالث ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{33} ويتم شغلها بالكمية X_{33} حيث

$$X_{33} = \min(a_3, b_3) \Rightarrow X_{33} = \min(300, 400) = 300$$

يتم حذف الصف الثالث نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي الطلب في العمود الثالث ب300 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 300 - 300 = 0 \\ b_3 = 400 - 300 = 100 \end{cases}$$

نبقى في نفس العمود ونبحث عن الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{13} ويتم شغلها بالكمية X_{13} حيث

$$X_{13} = \min(a_1, b_3) \Rightarrow X_{13} = \min(250, 100) = 100$$

يتم حذف العمود الثالث نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض في الصف الأول ب100 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 250 - 100 = 150 \\ b_3 = 100 - 100 = 0 \end{cases}$$

ننتقل بعد ذلك إلى آخر عمود وهو العمود الرابع ونبحث عن أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{24} ويتم شغلها بالكمية X_{24} حيث

$$X_{24} = \min(a_2, b_4) \Rightarrow X_{24} = \min(100, 250) = 100$$

يتم حذف الصف الثاني لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي الطلب في العمود الرابع ب100 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 100 - 100 = 0 \\ b_4 = 250 - 100 = 150 \end{cases}$$

ننتقل إلى آخر خلية في العمود الرابع وهي الخلية X_{14} ويتم شغلها بالكمية المتبقية وهي 150 وحدة

يتم حذف السطر الأول والعمود الرابع لإستيفائهما الكمية المطلوبة وهي 150 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 150 - 150 = 0 \\ b_4 = 150 - 150 = 0 \end{cases}$$

ويمكن تلخيص نتائج ماتم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11} = 07$ $X_{11} = 0$	$C_{12} = 05$ $X_{12} = 350$	$C_{13} = 10$ $X_{13} = 100$	$C_{14} = 08$ $X_{14} = 150$	$a_1 = \cancel{600} = \cancel{250}$ $= \cancel{150} = 0$
S_2	$C_{21} = 03$ $X_{21} = 400$	$C_{22} = 06$ $X_{22} = 0$	$C_{23} = 12$ $X_{23} = 0$	$C_{24} = 04$ $X_{24} = 100$	$a_2 = \cancel{500}$ $= \cancel{100} = 0$
S_3	$C_{31} = 04$ $X_{31} = 0$	$C_{32} = 07$ $X_{32} = 0$	$C_{33} = 09$ $X_{33} = 300$	$C_{34} = 15$ $X_{34} = 0$	$a_3 = \cancel{300} = 0$
b_j	$b_1 = \cancel{400} = 0$	$b_2 = \cancel{350} = 0$	$b_3 = \cancel{400}$ $= \cancel{100} = 0$	$b_4 = \cancel{250}$ $= \cancel{150} = 0$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر−01

$$K = (m + n - 1) \Rightarrow K = 03 + 04 - 01 = 06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12} = 350, X_{13} = 100, X_{14} = 150, X_{21} = 400, X_{24} = 100, X_{33} = 300$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11} = X_{22} = X_{23} = X_{31} = X_{32} = X_{34} = 0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z) = C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} + C_{24}X_{24} + C_{33}X_{33} \Rightarrow$$

$$\min(Z) = 350 \times 05 + 100 \times 10 + 150 \times 08 + 400 \times 03 + 100 \times 04 + 300 \times 09 = 8250um$$

05-08 طريقة العمود الأدنى المعدل(Modified Column Minimum): تقوم هذه الطريقة على إختيار أقل تكلفة نقل في كل عمود وذلك تبعا إلى صف العرض حيث يتم توزيع صف العرض على أدنى تكلفة في العمود فإذا تم إستيفاء العمود ننتقل إلى العمود الثاني، وإذا لم يتم إستيفاء العمود وتم إستيفاء الصف ننتقل إلى صف آخر وهكذا حتى يتم شطب جميع الأعمدة و الصفوف.

مثال10: نفس معطيات المثال رقم06

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة الصف الأدنى المعدل(Modified Row Minimum) مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

نبدأ بالعمود الأول ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{21} ويتم شغلها بالكمية X_{21} حيث

$$X_{21} = \min(a_2, b_1) \Rightarrow X_{21} = \min(500, 400) = 400$$

يتم حذف العمود الأول نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض من الصف الثاني ب400 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 500 - 400 = 100 \\ b_1 = 400 - 400 = 0 \end{cases}$$

يتم الإنتقال بعد ذلك إلى العمود الثاني ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{12} ويتم شغلها بالكمية X_{12} حيث

$$X_{12} = \min(a_1, b_2) \Rightarrow X_{12} = \min(600, 350) = 350$$

يتم حذف العمود الثاني نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض بالصف الأول ب350 وحدة كالتالي:

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 600 - 350 = 250 \\ b_2 = 350 - 350 = 0 \end{cases}$$

ننتقل بعد ذلك إلى العمود الثالث ونختار الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{33} ويتم شغلها بالكمية X_{33} حيث

$$X_{33} = \min(a_3, b_3) \Rightarrow X_{33} = \min(300, 400) = 300$$

يتم حذف الصف الثالث نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي الطلب في العمود الثالث ب300 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 300 - 300 = 0 \\ b_3 = 400 - 300 = 100 \end{cases}$$

نبقى في نفس العمود ونبحث عن الخلية التي بها أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{13} ويتم شغلها بالكمية X_{13} حيث

$$X_{13} = \min(a_1, b_3) \Rightarrow X_{13} = \min(250, 100) = 100$$

يتم حذف العمود الثالث نظرا لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض في الصف الأول ب100 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 250 - 100 = 150 \\ b_3 = 100 - 100 = 0 \end{cases}$$

ننتقل بعد ذلك إلى آخر عمود وهو العمود الرابع ونبحث عن أدنى تكلفة نقل وهي الخلية X_{24} ويتم شغلها بالكمية X_{24} حيث

$$X_{24} = \min(a_2, b_4) \Rightarrow X_{24} = \min(100, 250) = 100$$

يتم حذف الصف الثاني لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي الطلب في العمود الرابع ب100 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 100 - 100 = 0 \\ b_4 = 250 - 100 = 150 \end{cases}$$

ننتقل إلى آخر خلية في العمود الرابع وهي الخلية X_{14} ويتم شغلها بالكمية المتبقية وهي 150 وحدة يتم حذف السطر الأول والعمود الرابع لإستيفائهما الكمية المطلوبة وهي 150 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 150 - 150 = 0 \\ b_4 = 150 - 150 = 0 \end{cases}$$

ويمكن تلخيص نتائج ماتم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=07$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=350$	$C_{13}=10$ $X_{13}=100$	$C_{14}=08$ $X_{14}=150$	$a_1 = \cancel{600} = \cancel{250} = \cancel{150} = 0$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=400$	$C_{22}=06$ $X_{22}=0$	$C_{23}=12$ $X_{23}=0$	$C_{24}=04$ $X_{24}=100$	$a_2 = \cancel{500} = \cancel{100} = 0$
S_3	$C_{31}=04$ $X_{31}=0$	$C_{32}=07$ $X_{32}=0$	$C_{33}=09$ $X_{33}=300$	$C_{34}=15$ $X_{34}=0$	$a_3 = \cancel{300} = 0$
b_j	$b_1 = \cancel{400} = 0$	$b_2 = \cancel{350} = 0$	$b_3 = \cancel{400} = \cancel{100} = 0$	$b_4 = \cancel{250} = \cancel{150} = 0$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K = (m + n - 1) \Rightarrow K = 03 + 04 - 01 = 06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12} = 350, X_{13} = 100, X_{14} = 150, X_{21} = 400, X_{24} = 100, X_{33} = 300$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11} = X_{22} = X_{23} = X_{31} = X_{32} = X_{34} = 0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z) = C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} + C_{24}X_{24} + C_{33}X_{33} \Rightarrow$$

$$\min(Z) = 350 \times 05 + 100 \times 10 + 150 \times 08 + 400 \times 03 + 100 \times 04 + 300 \times 09 = 8250um$$

06-08 طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة(Matrix Minimum): ويطلق عليها طريقة أقل كلفة بالمصفوفة ومنها نبحث عن أدنى كلفة في مصفوفة النقل ثم تخصص كمية من التجهيزات (المصادر) إلى الطلبات بالكلفة الدنيا للمصفوفة حتى يتم التخصيص للكل مع الأخذ بنظر الإعتبار التعديل والحذف وذلك بإنقاص الكمية التي حددت للخلية من مصدر الطلب والتجهيز، الطريقة تعتمد إستثمار التباين في الأسعار لا إشباع المتطلبات بأقل التكاليف، بل إن الهدف تأمين الإحتياجات من أي مصدر تجهيز وبأية كلفة نقل، لذا وضعت طريقة أقل كلفة لكي يتم البحث والتركيز بموجبها على أقل كلفة متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض المقابلة لتلك الكلفة الدنيا.

مثال11: نفس المثال السابق رقم 06

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة(Matrix Minimum) مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

نبدأ عملية التوزيع بإختيار الخلية التي بها أدنى تكلفة في الجدول ككل وهي الخلية X_{21} ويتم شغلها بالكمية X_{21} حيث:

$$X_{21} = \min(a_2, b_1) \Rightarrow X_{21} = \min(500, 400) = 400$$

يتم حذف العمود الأول نظرا لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض بالصف الثاني ب400 وحدة كالتالي:

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 500 - 400 = 100 \\ b_1 = 400 - 400 = 0 \end{cases}$$

بعد ذلك نبحث عن أدنى تكلفة في الجدول التالية والتي تمثلها الخلية X_{24} ويتم شغلها بالكمية X_{21} حيث:

$$X_{24} = \min(a_2, b_4) \Rightarrow X_{24} = \min(100, 250) = 100$$

يتم حذف الصف الثاني لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي الطلب في العمود الرابع ب100 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 100 - 100 = 0 \\ b_4 = 250 - 100 = 150 \end{cases}$$

ننتقل بعدها إلى الخلية التي بها أدنى تكلفة بالجدول وهي الخلية X_{12} ويتم شغلها بالكمية X_{12} حيث:

$$X_{12} = \min(a_1, b_2) \Rightarrow X_{12} = \min(600, 350) = 350$$

يتم حذف العمود الثاني لإستيفائه بالكامل ويخفض إجمالي العرض في الصف الأول ب350 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 600 - 350 = 250 \\ b_2 = 350 - 350 = 0 \end{cases}$$

ننتقل بعدها إلى الخلية التي بها أدنى تكلفة في الجدول ككل وهي الخلية X_{14} ويتم شغلها بالكمية X_{14} حيث:

$$X_{14} = \min(a_1, b_4) \Rightarrow X_{14} = \min(250, 150) = 150$$

يتم حذف العمود الرابع لإستفائه بالكامل، ويخفض إجمالي العرض في الصف الأول ب150 وحدة كالتالي:

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 250 - 150 = 100 \\ b_4 = 150 - 150 = 0 \end{cases}$$

ننتقل بعد ذلك إلى الخلية التي بها أدنى تكلف نقل كلية ككل بالجدول وهي الخلية X_{33} ويتم شغلها بالكمية X_{33} حيث

$$X_{33} = \min(a_3, b_3) \Rightarrow X_{33} = \min(300, 400) = 300$$

يتم حذف الصف الثالث لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي الطلب في العمود الثالث ب300 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 300 - 300 = 0 \\ b_3 = 400 - 300 = 100 \end{cases}$$

لم يتبقى في الجدول ككل غير الخلية X_{13} فيتم شغلها بالكمية X_{13} حيث:

$$X_{13} = \min(a_1, b_3) \Rightarrow X_{13} = \min(100,100) = 100$$

يتم حذف العمود الثالث والصف الأول لإستيفائهما بالكامل حيث:

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 100 - 100 = 0 \\ b_3 = 100 - 100 = 0 \end{cases}$$

ويمكن تلخيص نتائج ماتم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11} = 07$ $X_{11} = 0$	$C_{12} = 05$ $X_{12} = 350$	$C_{13} = 10$ $X_{13} = 100$	$C_{14} = 08$ $X_{14} = 150$	$a_1 = \cancel{600} = \cancel{250} = \cancel{100} = 0$
S_2	$C_{21} = 03$ $X_{21} = 400$	$C_{22} = 06$ $X_{22} = 0$	$C_{23} = 12$ $X_{23} = 0$	$C_{24} = 04$ $X_{24} = 100$	$a_2 = \cancel{500} = \cancel{100} = 0$
S_3	$C_{31} = 04$ $X_{31} = 0$	$C_{32} = 07$ $X_{32} = 0$	$C_{33} = 09$ $X_{33} = 300$	$C_{34} = 15$ $X_{34} = 0$	$a_3 = \cancel{300} = 0$
b_j	$b_1 = \cancel{400} = 0$	$b_2 = \cancel{350} = 0$	$b_3 = \cancel{400} = \cancel{100} = 0$	$b_4 = \cancel{250} = \cancel{150} = 0$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K = (m + n - 1) \Rightarrow K = 03 + 04 - 01 = 06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12} = 350, X_{13} = 100, X_{14} = 150, X_{21} = 400, X_{24} = 100, X_{33} = 300$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11} = X_{22} = X_{23} = X_{31} = X_{32} = X_{34} = 0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z) = C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} + C_{24}X_{24} + C_{33}X_{33} \Rightarrow$$

$$\min(Z) = 350 \times 05 + 100 \times 10 + 150 \times 08 + 400 \times 03 + 100 \times 04 + 300 \times 09 = 8250um$$

07-08 طريقة فوجل التقريبية(Vogal"s Approximation Méthod)(V.A.M): تؤدي هذه الطريقة بشكل دائم إلى حل مبدئي أفضل من الحل الذي تقدمه طريقة الركن الشمالي الشرقي،وتؤدي أيضا في أحيان كثيرة إلى الوصول إلى حل أفضل من الحل المبدئي الذي يتم التوصل إليه بإستخدام طريقة أقل التكاليف،فواقع الأمر أنه في كثير من الأحيان يكون الحل المبدئي الذي نتوصل إليه بإستخدام طريقة فوجل التقريبية (V.A.M) هو الحل الأمثل مباشرة،وتقوم هذه الطريقة على فكرة توزيع الوحدات على الخلايا بشكل يقلل من تكلفة التوزيع

الخطأ للوحدات، وتكلفة التوزيع الخطأ (regret cost) هي عبارة عن التكلفة الزائدة المترتبة على وضع وحدة خطأ في خلية يجب أن لا تكون فيها،أما خطوات إستخدام هذه الطريقة فهي كالتالي:

01–يحسب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة وذلك لكل صف و أيضا لكل عمود ويكتب هذا الفرق في نهاية كل صف وكل عمود ويرمز لهذا الفرق بالرمز (Δ_1)، هذا الفرق في التكلفة يمثل تكلفة الجزاء أو العقاب على عدم إختيار الخلية ذات التكلفة الأقل.

02–يتم أخذ أكبر فرق مطلق للتكلفة ويحدد الصف او العمود الذي ينتمي إليه أكبر فرق مطلق في التكلفة ثم نختار الخلية ذات التكلفة الأقل بهذا الصف أو ذلك العمود ويتم شغلها، وفي حالة تعادل أكثر من صف أو عمود في قيمة أكبر فرق مطلق للتكلفة نختار أيها عشوائيا ثم نختار الخلية ذات الأدنى تكلفة بهذا الصف أو العمود ويتم شغلها.

03–يتم شغل الخلية التي تم إختيارها بنفس الطريقة السابقة على أساس الأصغر من الكميات المتاحة في مصدر العرض والكميات المطلوبة في جهة غلإستخدام، ثم نحذف الصف أو العمود الذي تم إستيفاؤه بالكامل وتخفض الكمية المطلوبة في جهة الإستخدام او الكمية المعروضة في مصدر العرض بتلك الكمية الأصغر لنحصل على الجزء المتبقي.

04–نعيد حساب الفرق المطلق بين أصغر تكلفة والتكلفة التالية لها مباشرة لكل صف ولكل عمود ويرمز لهذا الفرق بالرمز (Δ_2)، للبدء في عملية الحساب من جديد بنفس الخطوات السابقة،وفي هذه الخطوة يمكن الإقتصار فقط على كتابة للفرق التي تظل بدون تعديل في الخطو السابقة.

05–تستمر عمليات الحل حتى يتم الإنتهاء من توزيع كل الكميات المعروضة من المصادر المختلفة وفقا لإحتياجات الطلب في جهات الإستخدام المختلفة.

06– عند تساوي الفروق في الصفوف والأعمدة نأخذ الفرق الثاني وذلك بشطب أقل قيمة من الصف والعمود ونأخذ الفرق الذي بعده،أما إذا كانت من البداية كل الفروق في الصفوف والأعمدة متساوية في كل المراحل تفشل طريقة فوجل ونأخذ طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة.

مثال12: نفس المثال السابق رقم 06

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة فوجل التقريبية مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 1400$

المرحلة الأولى: نحسب الفروق المطلقة أو الغرامات أو تكلفة الفرصة البديلة لكل صف وعمود والتي نرمز لها بالرمز Δ_1 و نلاحظ أن أكبر فرق مطلق أو أكبر غرامة هو04 والتي تنتمي إلى العمود الرابع، لذلك يتم إختيار الخلية ذات الأقل تكلفة في هذا العمود وهي الخليةX_{24} ويتم شغلها بالكمية X_{24} بحيث

$$X_{24} = \min(a_2, b_4) \Rightarrow X_{24} = \min(500, 250) = 250$$

يتم حذف العمود الرابع لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض في الصف الثاني ب250 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 500 - 250 = 250 \\ b_4 = 250 - 250 = 0 \end{cases}$$

المرحلة الثانية: نعيد حساب الغرامات لكل صف أما الأعمدة فتحسب للأول والثاني والثالث فقط لأن الرابع تم حذفه ونرمز لها بالرمز Δ_2 ،ونلاحظ أن أكبر غرامة تقع في الصف الثاني والثالث ، لذا نبحث عن أقل تكلفة نقل بينهما فنجدها في الصف الثاني وهي الخلية X_{21} ، فيتم شغلها بالكمية X_{21} بحيث:

$$X_{21} = \min(a_2, b_1) \Rightarrow X_{21} = \min(250, 400) = 250$$

يتم حذف الصف الثاني لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي الطلب في العمود الأول ب250 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 250 - 250 = 0 \\ b_1 = 400 - 250 = 150 \end{cases}$$

المرحلة الثالثة: نعيد حساب الغرامات للصف الأول والثالث والعمود الأول والثاني والثالث والتي نرمز لها بالرمز Δ_3 ،ونلاحظ أن أكبر غرامة تقع في الصف الثالث و العمود الثالث ، فيتم الإختيار عشوائيا بينهما وعلى سبيل المثال نختار الصف الثالث فتكون الخلية ذات أقل تكلفة نقل هي الخلية X_{31} ويتم شغلها بالكمية X_{31} بحيث:

$$X_{31} = \min(a_3, b_1) \Rightarrow X_{31} = \min(300, 150) = 150$$

يتم حذف العمود الأول لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض في الصف الثالث ب150 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_3 = 300 - 150 = 150 \\ b_1 = 150 - 150 = 0 \end{cases}$$

المرحلة الرابعة: نقوم بعملية حساب الغرامات لكل من الصف الأول والثالث والعمود الثاني والثالث والتي نرمز لها بالرمز Δ_4 ،ونلاحظ أن أكبر غرامة تقع في الصف الأول فتكون الخلية ذات أقل تكلفة نقل هي الخلية X_{12} ويتم شغلها بالكمية X_{31} بحيث:

$$X_{12} = \min(a_1, b_2) \Rightarrow X_{12} = \min(600, 350) = 350$$

يتم حذف العمود الثاني لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض في الصف الأول ب350 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i = a_i - X_{ij} \\ b_j = b_j - X_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 600 - 350 = 250 \\ b_2 = 350 - 350 = 0 \end{cases}$$

المرحلة الخامسة: في هذه المرحلة نلاحظ انه تم حذف كافة الأعمدة بمصفوفة النقل ماعدا العمود الثالث،أما الصفوف فقد تم حذف الصف الثاني، لذلك يتمملئ الخلايا الشاغرة بطريقة المتمم الحسابي بحيث نجد:

$$X_{13} = \min(a_1, b_3) \Rightarrow X_{13} = \min(250, 400) = 250$$

$$X_{33} = \min(a_3, b_3) \Rightarrow X_{33} = \min(150, 150) = 150$$

ويمكن تلخيص الخطوات السابق شرحها من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**				a_i	**V.A.M**			
	D_1	D_2	D_3	D_4		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
S_1	$C_{11}=07$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=350$	$C_{13}=10$ $X_{13}=250$	$C_{14}=08$ $X_{14}=0$	$a_1=\cancel{600}=\cancel{250}=0$	02	02	02	05
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=250$	$C_{22}=06$ $X_{22}=0$	$C_{23}=12$ $X_{23}=0$	$C_{24}=04$ $X_{24}=250$	$a_2=\cancel{500}=\cancel{250}=0$	01	03	--	--
S_3	$C_{31}=04$ $X_{31}=150$	$C_{32}=07$ $X_{32}=0$	$C_{33}=09$ $X_{33}=150$	$C_{34}=15$ $X_{34}=0$	$a_3=\cancel{300}=\cancel{150}=0$	03	03	03	02
b_j	$b_1=\cancel{400}=\cancel{150}=0$	$b_2=\cancel{350}=0$	$b_3=\cancel{400}=\cancel{150}=0$	$b_4=\cancel{250}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j$				
Δ_1	01	01	01	04					
Δ_2	01	01	01	--------					
Δ_3	03	02	01	--------					
Δ_4	-------	02	01	--------					

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+04-01=06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=350, X_{13}=250, X_{21}=250, X_{24}=250, X_{31}=150, X_{33}=150$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{14}=X_{22}=X_{23}=X_{32}=X_{34}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+C_{21}X_{21}+C_{24}X_{24}+C_{31}X_{31}+C_{33}X_{33}\Rightarrow$$

$$\min(Z)=350\times05+250\times10+250\times03+250\times04+150\times04+150\times09=7950um$$

نلاحظ ان قيمة دالة الهدف وفقا لطريقة فوجل التقريبية (طريقة الغرامات) أقل من قيمتها في حالة إستخدام طريقة أدنى تكلفة في الجدول ككل او في العمود أو في السطر وهي أقل بدورها من قيمة دالة الهدف في حالة إستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي، مما يؤكد أنها أفضل من كل الطرق السابقة حيث انها تعطي حلا مبدئيا لنموذج النقل الكثر قربا من الحل الأمثل ،إن لم يكن هو نفسه الحل الأمثل.

08-08 طريقة روسيل التقريبية (Russels Approximation Méthod)(R.A.M):تعتبر هذه الطريقة أفضل من سابقاتها لأنها تعطينا حل أولي(قاعدي) أقرب للحل الأمثل(خصوصا للمصفوفات الكبيرة) ،أما خطوات الحل بهذه الطريقة فهي كالتالي:

01-تحديد أعلى تكلفة نقل لكل صف ونرمز لها ب $\bar{a}_i$ ولكل عمود نرمز لها ب $\bar{b}_j$

02-نشكل مصفوفة جديدة تكلفتها هي $\Delta_{ij}=C_{ij}-\bar{a}_i-\bar{b}_j$

03-نحدد الخلية التي لها أصغر تكلفة نقل Δ_{ij}،ونعطي لمتغيرها أكبر كمية ممكنة والتي تساوي

$$X_{ij}=\min\left(a_i,b_j\right)$$

04-بحذف الصف او العمود المتحقق وتغيير كمية إجمالي الطلب أوالعرض الذي تقع فيه الخلية إلى مقدار الفرق بين كميتي العرض والطلب المقابلة لها.

05-إذا بقي صف أو عمود واحد نعطي للصف او العمود المتبقي كميات العرض أو الطلب المتبقية

06-إذا بقي أكثر من صف أو عمود واحد نعود للخطوة الأولى.

مثال13: نفس المثال السابق رقم06

المطلوب: حل مشكلة النقل بإستخدام طريقة روسيل التقريبية مع حساب تكلفة النقل الكلية؟

الحل: $\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=1400$

المرحلة الأولى:نستخرج مصفوفة التكاليف الجديدة بإستخدام العلاقة التالية $\Delta_{ij}=C_{ij}-\bar{a}_i-\bar{b}_j$

	D_1	D_2	D_3	D_4
S_1	-10	-12	-12	-17
S_2	-16	-13	-12	-23
S_3	-18	-15	-18	-15

بعد تشكيل المصفوفة نلاحظ أن أصغر تكلفة نقل هي في الخلية X_{24} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{24} بحيث

$$X_{24}=\min\left(a_2,b_4\right)\Rightarrow X_{24}=\min\left(500,250\right)=250$$

يتم حذف العمود الرابع لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض في الصف الثاني ب250 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=500-250=250\\ b_4=250-250=0\end{cases}$$

المرحلة الثانية: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	D_1	D_2	D_3
S_1	-10	-12	-12
S_2	-16	-13	-12
S_3	-12	-09	-12

نلاحظ أن أصغر تكلفة نقل هي في الخلية X_{21} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{21} بحيث

$$X_{21}=\min\left(a_2,b_1\right)\Rightarrow X_{21}=\min\left(250,400\right)=250$$

يتم حذف الصف الثاني لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي الطلب في العمود الأول ب250 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=250-250=0\\ b_1=400-250=150\end{cases}$$

المرحلة الثالثة: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	D_1	D_2	D_3
S_1	-10	-12	-12
S_3	-12	-09	-12

نلاحظ ان أصغر تكلفة نقل هي في الخلايا التالية X_{12} و X_{13} و X_{31}و X_{33} وبالرجوع إلى جدول النقل نجد أن أقل تكلفة نقل هي في الخلية X_{31} فيتم شغلها بالكمية X_{31} بحيث

$$X_{31}=\min\left(a_3,b_1\right)\Rightarrow X_{31}=\min\left(300,150\right)=150$$

يتم حذف العمود الأول لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض في الصف الثالث ب150 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_3=300-150=150\\ b_1=150-150=0\end{cases}$$

المرحلة الرابعة: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	D_2	D_3
S_1	-12	-12
S_3	-09	-12

نلاحظ ان أصغر تكلفة نقل هي في الخلايا التالية X_{12} و X_{13} و X_{33} وبالرجوع إلى جدول النقل نجد أن أقل تكلفة نقل هي في الخلية X_{12} فيتم شغلها بالكمية X_{12} بحيث

$$X_{12}=\min\left(a_1,b_2\right)\Rightarrow X_{12}=\min\left(600,350\right)=350$$

يتم حذف العمود الثاني لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض في الصف الأول ب350 وحدة كالتالي

$$\begin{cases}a_i=a_i-X_{ij}\\ b_j=b_j-X_{ij}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=600-350=250\\ b_2=350-350=0\end{cases}$$

المرحلة الخامسة: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	D_3
S_1	-12
S_3	-12

نلاحظ ان أصغر تكلفة نقل هي في الخليتين التالية X_{13} و X_{33} وبالرجوع إلى جدول النقل نجد أن أقل تكلفة نقل هي في الخلية X_{33} فيتم شغلها بالكمية X_{33} بحيث

$$X_{33}=\min\left(a_3,b_3\right)\Rightarrow X_{33}=\min\left(150,400\right)=150$$

يتم حذف الصف الثالث لإستيفائه بالكامل ويتم تخفيض إجمالي العرض في العمود الثالث ب150 وحدة كالتالي

$$\begin{cases} a_i=a_i-X_{ij} \\ b_j=b_j-X_{ij} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1=150-150=0 \\ b_2=400-150=250 \end{cases}$$

ويمكن توضيح ماتم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)				a_i
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	$C_{11}=07$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=350$	$C_{13}=10$ $X_{13}=250$	$C_{14}=08$ $X_{14}=0$	$a_1=\cancel{600}$ $=\cancel{250}=0$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=250$	$C_{22}=06$ $X_{22}=0$	$C_{23}=12$ $X_{23}=0$	$C_{24}=04$ $X_{24}=250$	$a_2=\cancel{500}$ $=\cancel{250}=0$
S_3	$C_{31}=04$ $X_{31}=150$	$C_{32}=07$ $X_{32}=0$	$C_{33}=09$ $X_{33}=150$	$C_{34}=15$ $X_{34}=0$	$a_3=\cancel{300}$ $=\cancel{150}=0$
b_j	$b_1=\cancel{400}$ $=\cancel{150}=0$	$b_2=\cancel{350}=0$	$b_3=\cancel{400}$ $=\cancel{250}=0$	$b_4=\cancel{250}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=1400$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=\left(m+n-1\right)\Rightarrow K=03+04-01=06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=350, X_{13}=250, X_{21}=250, X_{24}=250, X_{31}=150, X_{33}=150$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{14}=X_{22}=X_{23}=X_{32}=X_{34}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min\left(Z\right)=C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+C_{21}X_{21}+C_{24}X_{24}+C_{31}X_{31}+C_{33}X_{33}\Rightarrow$$

$$\min\left(Z\right)=350\times05+250\times10+250\times03+250\times04+150\times04+150\times09=7950um$$

ملاحظة: بعد إتمام عملية التوزيع لمسألة النقل بالطرق السابق ذكرها تم التوصل إلى النتائج التالية:

الرقم	طريقة النقل	تكلفة النقل الكلية
01	طريقة الركن الشمالي الغربي (North West Corner Method)(NWC)	13100 ون
02	طريقة الصف الأدنى(Row Minimum)(RM)	8850 ون
03	طريقة الصف الأدنى المعدل(Modified Row Minimum)(MRM)	8850 ون
04	طريقة العمود الأدنى(Column Minimum)(CM)	8250 ون
05	طريقة العمود الأدنى المعدل(Modified Column Minimum) (MCM)	8250 ون
06	طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة(Matrix Minimum)(MM)	8250 ون
07	طريقة فوجل التقريبية(Vogal"s Approximation Méthod)(VAM)	7950 ون
08	طريقة روسيل التقريبة (Russels Approximation Méthod)(RAM)	7950 ون

09-طرق تحسين الحل الأولي (القاعدي) وصولا إلى الحل الأمثل في مسائل التقليل:يتم إختيار أمثلية الحل الأولي (القاعدي) في مسائل النقل بنفس الفكرة المتبعة في طريقة السمبلكس والتي تعتمد على فكرة أثر تحويل المتغيرات غير الأساسية في الحل إلى متغيرات أساسية وإن كان ذلك سيتم في نموذج النقل بطريقة تتناسب مع خصائص هذا النموذج.

ويوجد عدة طرق يمكن من خلالها إختبار أمثلية الحل ومن بين هذه الطرق نذكر التالي

-طريقة المسار المتعرج (Stepping Stone Method)

-طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method)

-الطريقة التوزيعية أو طريقة لوريا (Distributive Method or Luria Method)

-طريقة فورد-فلكورسن (Ford-Foulkerson)

09- 01 طريقة المسار المتعرج (المغلق)(Stepping Stone Method): وتسمى أيضا طريقة الحلقات المغلقة أو محور الإرتكاز ومبدأ هذه الطريقة يكمن في أن الخلايا المشغولة في مصفوفة النقل هي خلايا أساسية وهي تناظر المتغيرات الأساسية في الحل بطريقة السمبلكس، بينما نعتبر باقي الخلايا غير المشغولة في مصفوفة النقل خلايا غير أساسية وهي تناظر المتغيرات غير الأساسية في الحل بطريقة السمبلكس، وينبغي ملاحظة العلاقات التالية في مصفوفة النقل:

-مجموع خلايا المصفوفة تساوي $m\times n$

-مجموع الخلايا الأساسية (أي المشغولة) ينبغي أن تساوي $m+n-1$

-مجموع الخلايا غير الأساسية (أي غير المشغولة) تساوي $(m\times n)-(m+n-1)$

حيث:

m:تشير إلى عدد صفوف مصفوفة النقل أي عدد مصادر العرض.

n: تشير إلى عدد أعمدة مصفوفة النقل أي عدد جهات الإستخدام.

ومبدأ هذه الطريقة هو تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأولي لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا نقلت وحدة واحدة إلة أحد الخلايا غير المشغولة،فإذا وجدنا أن ملئ خلية معينة غير مشغولة ستؤدي إلى تقليل التكاليف يتم تعديل الحل الأولي وتستمر عملية التقييم لكل الجدول إلى أن نتوصل إلة أن ملئ أي خلية غير مشغولة لا يؤدي إلى تقليل تكليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.

ولتطبيق هذه الطريقة يجب إتباع الخطوات التالية:

01–تحديد المتغيرات الأساسية وغير الأساسية من جدول الحل الأولي.

02– يتم رسم مسار مغلق (Closed Path) لكل خلية غير مشغولة ويتكون المسار من مجموعة من قطع من المستقيمات المتعاقبة الأفقية والعمودية يبدأ من الخلية الغير مشغولة المراد إختيارها إلى خلية مشغولة حتى يتم الوصول إلى الخلية الغير مشغولة التي إنطلقنا منها.

03–يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها تعقبها علامة سالبة(–) للخلية التي تليها في المسار ثم علامة موجبة للخلية التي تليها وهكذا لجميع الخلايا التي يتشكل منها المسار.

04–نحسب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) وذلك بجمع التكلفة للخلايا الواقعة على المسار، فإذا كانت هذه القيمة سالبة معنى ذلك أن أشغال هذه الخلية يساهم في تخفيض التكاليف.

05–نفترض أن $\overline{C}_{ij}$ تمثل مقدار الزيادة الصافية أو النقصان في قيمة دالة الهدف نتيجة تحويل المتغير الغير أساسي X_{ij} إلى متغير أساسي .

06–نكرر الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة،فإذا كانت التكلفة غير المباشرة موجبة أو صفر فإن الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل،أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر من خلية مشغولة تكون التكلفة غير المباشرة لها سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية لتطوير الحل وتخفيض التكاليف وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للتكلفة غير المباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل.

07–عند وجود خلايا نتيجة إختبارها سالب فإننا نتبع مسار هذه الخلايا ونختار الخلية التي توفر أكبر قيمة، فننتقل إليها أو نستخدمها في النقل بأقل عدد ممكن من الوحدات الموجودة في الخلايا السالبة ضمن المسار بحيث يبقى التوزيع في حدود الإحتياجات والمتاح من الموارد.

08–نكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا و إختبار الخلايا غير المشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

09–عند عدم تحقق شرط عدد الخلايا المشغولة بأنها تساوي $(m+n-1)$،عندئذ نتبع مايلي:

–نحدد الخلية التي تتساوى عندا العرض والطلب.

–نختار خلية بجانب الخلية السابقة إما في السطر أو العمود ونعتبرها مليئة (وهمية) بالكمية صفر بشرط أن تساعد على إختيار أكبر عدد ممكن من الخلايا الفارغة و أن تكون واقعة على أحد الرؤوس الموجبة في الإختبار.

10–يجب أن يتوفر المسار المغلق على مجموعة من الشروط وهي:

-عدد المسارات المغلقة يساوي إلى عدد المتغيرات غير الأساسية.

-مجموع عدد الخلايا عدد زوجي منها الخلية الأولى فقط غير مستخدمة.

-عدد الإشارات الموجبة يساوي عدد الإشارات السالبة ولا يزيد عن كل صف وعمود.

-الخلية الأولى غير المستخدمة تكون إشارتها موجبة.

-عدد الأضلاع لايقل عن أربعة .

مثال14:الجدول التالي يمثل تكلفة نقل بضائع من مراكز التوزيع S_i حيث $(i=1,2,3,4)$ إلى مراكز الإستيلام D_j حيث $(j=1,2,3)$

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$	$C_{12}=03$	$C_{13}=05$	$a_1=280$
S_2	$C_{21}=03$	$C_{22}=02$	$C_{23}=04$	$a_2=300$
S_3	$C_{31}=05$	$C_{32}=04$	$C_{33}=03$	$a_3=230$
S_4	$C_{41}=04$	$C_{42}=06$	$C_{43}=08$	$a_4=190$
b_j	$b_1=200$	$b_2=250$	$b_3=550$	$\sum_{i=1}^{4} a_i=\sum_{j=1}^{3} b_j=1000$

المطلوب:

01-أوجد الحل الأولي (القاعدي) بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي؟

02-أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة المسار المتعرج (المسار المغلق)

الحل:

01-إيجاد الحل الأولي بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

مجموع الطلب يساوي مجموع العرض

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$ $X_{11}=200$	$C_{12}=03$ $X_{12}=80$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{280}$ $=\cancel{80}=0$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=02$ $X_{22}=170$	$C_{23}=04$ $X_{23}=130$	$a_2=\cancel{300}$ $=\cancel{130}=0$
S_3	$C_{31}=05$ $X_{31}=0$	$C_{32}=04$ $X_{32}=0$	$C_{33}=03$ $X_{33}=230$	$a_3=\cancel{230}=0$
S_4	$C_{41}=04$ $X_{41}=0$	$C_{42}=06$ $X_{42}=0$	$C_{43}=08$ $X_{43}=190$	$a_4=\cancel{190}=0$

b_j	$b_1 = \cancel{200} = 0$	$b_2 = \cancel{250} = \cancel{170} = 0$	$b_3 = \cancel{550} = \cancel{420} = \cancel{190} = 0$	$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 1000$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر−01

$$K = (m+n-1) \Rightarrow K = 04+03-01 = 06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11} = 200, X_{12} = 80, X_{22} = 170, X_{23} = 130, X_{33} = 230, X_{43} = 190$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13} = X_{21} = X_{31} = X_{32} = X_{41} = X_{42} = 0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z) = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + C_{43}X_{43} \Rightarrow$$

$$\min(Z) = 200\times02+80\times03+170\times02+130\times04+230\times03+190\times08 = 3710um$$

02−إيجاد الحل الأمثل بإستخدام طريقة المسار المتعرج (المسار المغلق)

بما انه يوجد لدينا ستة متغيرات غير أساسية إذن فعدد المسارات هو ستة ويمكن توضيحها من خلال الجدول التالي

المتغيرات غير الأسسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	التكلفة غير المباشرة
X_{13}	$X_{13} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{13}$	$05-04+02-03=0$
X_{21}	$X_{21} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{21}$	$03-02+03-02=02$
X_{31}	$X_{31} \to X_{33} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{31}$	$05-03+04-02+03-02=05$
X_{32}	$X_{32} \to X_{33} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{32}$	$04-03+04-02=03$
X_{41}	$X_{41} \to X_{43} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{41}$	$04-08+04-02+03-02=-01$
X_{42}	$X_{42} \to X_{43} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{42}$	$06-08+04-02=0$

نلاحظ أن التكلفة غير مباشرة السلبية الوحيدة في الجدول هي في المسار التالي

$$X_{41} \to X_{43} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{41}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{41} \to \underset{(-)}{X_{43}} \to X_{23} \to \underset{(-)}{X_{22}} \to X_{12} \to \underset{(-)}{X_{11}} \to X_{41}$$

$$\text{MIN}(X_{43}, X_{22}, X_{11}) \Rightarrow \text{MIN}(190,170,200) = 170$$

الوفر الإجمالي للتكلفة هو 170×(1−)=170 ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$ $X_{11}=30$	$C_{12}=03$ $X_{12}=250$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=280$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=02$ $X_{22}=0$	$C_{23}=04$ $X_{23}=300$	$a_2=300$
S_3	$C_{31}=05$ $X_{31}=0$	$C_{32}=04$ $X_{32}=0$	$C_{33}=03$ $X_{33}=230$	$a_3=230$
S_4	$C_{41}=04$ $X_{41}=170$	$C_{42}=06$ $X_{42}=0$	$C_{43}=08$ $X_{43}=20$	$a_4=190$
b_j	$b_1=200$	$b_2=250$	$b_3=550$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=1000$

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=30, X_{12}=250, X_{23}=300, X_{33}=230, X_{41}=170, X_{43}=20$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{21}=X_{22}=X_{31}=X_{32}=X_{42}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{23}X_{23}+C_{33}X_{33}+C_{41}X_{41}+C_{43}X_{43}\Rightarrow$$
$$\min(Z)=30\times02+250\times03+300\times04+230\times03+170\times04+20\times08=3540um$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	التكلفة غير المباشرة
X_{13}	$X_{13}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{12}\to X_{13}$	$05-04+02-03=0$
X_{21}	$X_{21}\to X_{22}\to X_{12}\to X_{11}\to X_{21}$	$03-02+03-02=02$
X_{22}	$X_{22}\to X_{23}\to X_{43}\to X_{41}\to X_{11}\to X_{12}\to X_{22}$	$02-04+08-04+02-03=01$
X_{31}	$X_{31}\to X_{33}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{12}\to X_{11}\to X_{31}$	$05-03+04-02+03-02=05$
X_{32}	$X_{32}\to X_{33}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{32}$	$04-03+04-02=03$
X_{42}	$X_{42}\to X_{43}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{42}$	$06-08+04-02=0$

نلاحظ أن التكلفة غير المباشرة لجميع المسارات المغلقة موجبة أو معدومة إذن فالحل المتوصل إليه هو حل أمثل.

09-02 طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method): وتسمى أيضا بطريقة المضاريب أو طريقة المضاعفات وتعتمد هذه الطريقة على الحسابات التكرارية ولكنها تختلف عن طريقة المسار المتعرج في طريقة تقييم كل متغير من المتغيرات الأساسية من ناحية تأثيره على دالة الهدف إن تطور هذه الطريقة يستند في الأساس على نظرية النموذج المقابل (Dual theory) المستخدمة في البرمجة الخطية ،وفيما يلي الخطوات الأساسية لطريقة التوزيع المعدل:

01- نستخرج أولا الحل الأولي (القاعدي) بإحدى الطرق التي سبق شرحها.

02-نستخرج المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

03-نسبق كل تكلفة بإشارة سالبة $(-)$

04- نضيف عمود (I_i) وسطر (J_j)

05-نحسب (I_i)و (J_j)إنطلاقا من وضع إما $(I_1=0)$ أو (I_i) و (J_j) الموجودة في السطر او العمود ذو أكبر عدد من الخانات المملوءة مساويا للصفر(0).

06-العلاقة التالية : $C_{ij}=I_i+J_j$ تخص الخلايا المملوءة فقط، ولحساب (I_i) و (J_j) نضع $(I_1=0)$.

07- يتم حساب القيمة E_{ij} والتي تسمى الإقتصاد في التكلفة وهذا حسب العلاقة التالية: $E_{ij}=I_i+J_j-C_{ij}$

08-إذا كانت قيم كل E_{ij} موجبة أو معدومة فالحل أمثل،أما إذا وجدت قيمة سالبة على الأقل يجب القيم بعملية التحسين.

09-للقيام بعملية التحسين نختار أقل قيمة سالبة (أكبر قيمة بالقيمة المطلقة) ونكون إنطلاقا منها مايسمى **بالمسار المغلق** وهو عبارة عن شكل ذو مستقيمات ليست مائلة وله زوايا قائمة حيث ينطلق من الخانات ذات أقل قيمة سالبة والتي نضع بها $(+\Delta)$ ويعود إليها،أي نكون مسار مغلق تكون زواياه خانات مملوءة (متغيرات أساسية) ونضع بالتناوب $(-\Delta)$ و $(+\Delta)$

10-يتم تحديد قيمة(Δ)من خلال الخانات التي يوجد بها $(-\Delta)$ حيث نأخذ أقل قيمة أي $\Delta=\dfrac{\text{Min } X_{ij}}{(X_{ij}-\Delta_{ij})}$ ، ونعوضها إما بالزيادة أو النقصان.

11-القيم المحصل عليها بعد إدخال قيمة(Δ)توضع في جدول جديد ونقوم بحساب كل من(I_i)و (J_j) الخاصة به ونعيد العمليات السابقة للتأكد من أمثلية الحل إلى غاية الحصول على قيمة E_{ij} موجبة أو معدومة ثم نحسب التكاليف.

12-التكاليف الجديدة الناتجة عن عملية التحسين هي نفسها التكاليف السابقة+ مجموع ΔE_{ij} أي

$$\overline{C_{ij}}=C_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\Delta E_{ij}$$

بحيث: $\overline{C_{ij}}$: التكايف الجديدة.

C_{ij}:التكاليف السابقة.

مثال15:نفس المثال السابق (المثال14)

المطلوب:

01-أوجد الحل الأولي (القاعدي) بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي؟

02-أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة التوزيع المعدل.

الحل:

01-إيجاد الحل الأولي بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

مجموع الطلب يساوي مجموع العرض

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$ $X_{11}=200$	$C_{12}=03$ $X_{12}=80$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{280}=\cancel{80}=0$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=02$ $X_{22}=170$	$C_{23}=04$ $X_{23}=130$	$a_2=\cancel{300}=\cancel{130}=0$
S_3	$C_{31}=05$ $X_{31}=0$	$C_{32}=04$ $X_{32}=0$	$C_{33}=03$ $X_{33}=230$	$a_3=\cancel{230}=0$
S_4	$C_{41}=04$ $X_{41}=0$	$C_{42}=06$ $X_{42}=0$	$C_{43}=08$ $X_{43}=190$	$a_4=\cancel{190}=0$
b_j	$b_1=\cancel{200}=0$	$b_2=\cancel{250}=\cancel{170}=0$	$b_3=\cancel{550}=\cancel{420}=\cancel{190}=0$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=1000$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=04+03-01=06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=200, X_{12}=80, X_{22}=170, X_{23}=130, X_{33}=230, X_{43}=190$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{21}=X_{31}=X_{32}=X_{41}=X_{42}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{33}X_{33}+C_{43}X_{43}\Rightarrow$$

$$\min(Z)=200\times02+80\times03+170\times02+130\times04+230\times03+190\times08=3710um$$

02-إيجاد الحل الأمثل بإستخدام طريقة التوزيع المعدل.

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب) D_1	D_2	D_3	a_i
		$J_1=03$	$J_2=02$	$J_3=0$	
S_1	$I_1=-05$	$C_{11}=-02$ $X_{11}=200$ $E_{11}=0$	$C_{12}=-03$ $X_{12}=80$ $E_{12}=0$	$C_{13}=-05$ $X_{13}=0$ $E_{13}=0$	$a_1=280$
S_2	$I_2=-04$	$C_{21}=-03$ $X_{21}=0$ $E_{21}=02$	$C_{22}=-02$ $X_{22}=170$ $E_{22}=0$	$C_{23}=-04$ $X_{23}=130$ $E_{23}=0$	$a_2=300$
S_3	$I_3=-03$	$C_{31}=-05$ $X_{31}=0$ $E_{31}=05$	$C_{32}=-04$ $X_{32}=0$ $E_{32}=03$	$C_{33}=-03$ $X_{33}=230$ $E_{33}=0$	$a_3=230$
S_4	$I_4=-08$	$C_{41}=-04$ $X_{41}=0$ $E_{41}=-01$	$C_{42}=-06$ $X_{42}=0$ $E_{42}=0$	$C_{43}=-08$ $X_{43}=190$ $E_{43}=0$	$a_4=190$
b_j		$b_1=200$	$b_2=250$	$b_3=550$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=1000$

بعد تحديد قيم كل من (I_i)و(J_j) نقم بحساب قيمة E_{ij} الإقتصاد في التكلفة

بعد حساب قيمة E_{ij} نبلاحظ أنه توجد قيمة واحدة سالبة إذن فالحل غير أمثل ولابد من القيام بعملية التحسين

نحدد المسار المغلق وذلك بإضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{41}\to X_{43}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{12}\to X_{11}\to X_{41}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{41}\to \underset{(-)}{X_{43}}\to X_{23}\to \underset{(-)}{X_{22}}\to X_{12}\to \underset{(-)}{X_{11}}\to X_{41}$$

$$\text{MIN}(X_{43},X_{22},X_{11})\Rightarrow \text{MIN}(190,170,200)=170$$

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
		D_1	D_2	D_3	
		$J_1=12$	$J_2=07$	$J_3=0$	
S_1	$I_1=-10$	$C_{11}=-02$ $X_{11}=30$ $E_{11}=0$	$C_{12}=-03$ $X_{12}=250$ $E_{12}=0$	$C_{13}=-05$ $X_{13}=0$ $E_{13}=15$	$a_1=280$
S_2	$I_2=-04$	$C_{21}=-03$ $X_{21}=0$ $E_{21}=11$	$C_{22}=-02$ $X_{22}=0$ $E_{22}=05$	$C_{23}=-04$ $X_{23}=300$ $E_{23}=0$	$a_2=300$
S_3	$I_3=-03$	$C_{31}=-05$ $X_{31}=0$ $E_{31}=14$	$C_{32}=-04$ $X_{32}=0$ $E_{32}=08$	$C_{33}=-03$ $X_{33}=230$ $E_{33}=0$	$a_3=230$
S_4	$I_4=-08$	$C_{41}=-04$ $X_{41}=170$ $E_{41}=0$	$C_{42}=-06$ $X_{42}=0$ $E_{42}=05$	$C_{43}=-08$ $X_{43}=20$ $E_{43}=0$	$a_4=190$
b_j		$b_1=200$	$b_2=250$	$b_3=550$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=1000$

نلاحظ أن جميع قيم E_{ij} موجبة أو معدومة فالحل حل أمثل،أما تكلفة الحل فهي:

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{23}X_{23}+C_{33}X_{33}+C_{41}X_{41}+C_{43}X_{43}\Rightarrow$$
$$\min(Z)=30\times02+250\times03+300\times04+230\times03+170\times04+20\times08=3540um$$

أو بالطريقة المباشرة

$$\overline{C_{ij}}=C_{ij}+\Delta E_{ij}\Rightarrow\overline{C_{ij}}=3710+(170)(-01)=3540$$

09-03الطريقة التوزيعية أو طريقة لوريا (Distributive Method or Luria Method): وتعرف بطريقة الدورة ويقصد بها مجموع الخلايا التي يضمها خط منكسر مقفل يعمل في كل خلية زاوية قائمة والمفروض أن يكون عدد زوجي، والدورة المعدلة هي الدورة التي يتم فيها وضع إشارة (+) وإشارة(−) في خلاياها.

أما ثمن الدورة فهو عبارة عن المجموع الجبري لتكلفة النقل للوحدة الواحدة في جميع الخلايا التي تضمها الدورة.

ولتحسين الخطة سوف نبدل من وضع الشحنات بواسطة الدورات ذات الأثمان السالبة، وسوف نستخدم تلك الدورات التي تقع قممها السالبة في خلايا أساسية.

وإذا لم يكن هناك دورات ذات أثمان سالبة في الجدول فإن هذا يدل على أنه لايمكن تخفيض تكلفة النقل أكثر من ذلك، ونكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

وتتلخص الطريقة التوزيعية في البحث عن الدورات سالبة الأثمان، ثم نبدل وضع الشحنات في خلايا هذه الدورات(مع بقاء الشحنات على حالها) حتى لايبقى في الجدول دورات سالبة الأثمان،وعند تحسين الخطة بواسطة التبديل الدوري، فإنه كما في طريقة السمبلكس نستبدل متغير غير أساسي بمتغير أساسي، نملأ خلية غير أساسية في مقابل ذلك نفرغ خلية أساسية، ولذلك يبقى عدد الخلايا الأساسية دائما مساويا $(m+n-1)$، ومن الممكن إثبات أن لكل خلية غير أساسية من خلايا جدول النقل توجد دورة وحيدة أحد قممها تقع في هذه الخلية غير الأساسية، وتوضع إشارة (+) وإذا كان ثمن هذه الدورة سالبا (−) فإنه يمكن تحسين الخطة بواسطة التبديل الدوري، وعدد الوحدات التي سوف تتحدد من العدد الأقل شحنات التي تقع في القمم السالبة للدورة، فنضيف هذا العدد الأقل شحنات التي تقع في القمم السالبة (−) للدورة، ونطرحه من الخلايا الموجبة (+)

مثال16: نفس المثال السابق (المثال14)

المطلوب:

01−أوجد الحل الأولي (القاعدي) بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي؟

02−أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة لوريا.

الحل:

01−إيجاد الحل الأولي بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

مجموع الطلب يساوي مجموع العرض

مراكز التوزيع(العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$ $X_{11}=200$	$C_{12}=03$ $X_{12}=80$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{280}$ $=\cancel{80}=0$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=02$ $X_{22}=170$	$C_{23}=04$ $X_{23}=130$	$a_2=\cancel{300}$ $=\cancel{130}=0$
S_3	$C_{31}=05$ $X_{31}=0$	$C_{32}=04$ $X_{32}=0$	$C_{33}=03$ $X_{33}=230$	$a_3=\cancel{230}=0$
S_4	$C_{41}=04$ $X_{41}=0$	$C_{42}=06$ $X_{42}=0$	$C_{43}=08$ $X_{43}=190$	$a_4=\cancel{190}=0$
b_j	$b_1=\cancel{200}=0$	$b_2=\cancel{250}$ $=\cancel{170}=0$	$b_3=\cancel{550}=\cancel{420}$ $=\cancel{190}=0$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=1000$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر−01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=04+03-01=06$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=200, X_{12}=80, X_{22}=170, X_{23}=130, X_{33}=230, X_{44}=190$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{21}=X_{31}=X_{32}=X_{41}=X_{42}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{33}X_{33}+C_{43}X_{43}\Rightarrow$$

$$\min(Z)=200\times 02+80\times 03+170\times 02+130\times 04+230\times 03+190\times 08=3710um$$

02–إيجاد الحل الأمثل بإستخدام طريقة لوريا.

المتغيرات غير الأساسية	الدورات ذات الأثمان	ثمن الدورة السالب
X_{13}	$X_{13}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{12}\to X_{13}$	$05-04+02-03=0$
X_{21}	$X_{21}\to X_{22}\to X_{12}\to X_{11}\to X_{21}$	$03-02+03-02=02$
X_{31}	$X_{31}\to X_{11}\to X_{12}\to X_{22}\to X_{23}\to X_{33}\to X_{31}$	$05-02+03-02+04-03=05$
X_{32}	$X_{32}\to X_{33}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{32}$	$04-03+04-02=03$
X_{41}	$X_{41}\to X_{11}\to X_{12}\to X_{22}\to X_{23}\to X_{43}\to X_{41}$	$04-02+03-02+04-08=-01$
X_{42}	$X_{42}\to X_{43}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{42}$	$06-08+04-02=0$

نلاحظ من خلال الجدول أنه توجد دورة واحدة ذات أثمان سالبة في الخلية X_{41}

بطرح وجمع الخلية السالبة الصغرى من وإلى كل خلية حسب الإشارة الموجودة فيها يصبح الجدول كالتالي:

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$ $X_{11}=30$	$C_{12}=03$ $X_{12}=250$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=280$
S_2	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=02$ $X_{22}=0$	$C_{23}=04$ $X_{23}=300$	$a_2=300$
S_3	$C_{31}=05$ $X_{31}=0$	$C_{32}=04$ $X_{32}=0$	$C_{33}=03$ $X_{33}=230$	$a_3=230$
S_4	$C_{41}=04$ $X_{41}=170$	$C_{42}=06$ $X_{42}=0$	$C_{43}=08$ $X_{43}=20$	$a_4=190$
b_j	$b_1=200$	$b_2=250$	$b_3=550$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=1000$

نعيد حساب الدورات السالبة

المتغيرات غير الأساسية	الدورات ذات الأثمان	ثمن الدورة السالب
X_{13}	$X_{13} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{13}$	$05-04+02-03=0$
X_{21}	$X_{21} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{21}$	$03-02+03-02=02$
X_{22}	$X_{22} \to X_{23} \to X_{43} \to X_{41} \to X_{11} \to X_{12} \to X_{22}$	$02-04+08-04+02-03=01$
X_{31}	$X_{31} \to X_{33} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{31}$	$05-03+04-02+03-02=05$
X_{32}	$X_{32} \to X_{33} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{32}$	$04-03+04-02=03$
X_{42}	$X_{42} \to X_{43} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{42}$	$06-08+04-02=0$

نلاحظ لم يبقى دورات سالبة الأثمان وبهذا يكون هذا هو الحل الأمثل

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=30, X_{12}=250, X_{23}=300, X_{33}=230, X_{41}=170, X_{43}=20$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{21}=X_{22}=X_{31}=X_{32}=X_{42}=0$

أما التكلفة الكلية للنقل فهي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{23}X_{23}+C_{33}X_{33}+C_{41}X_{41}+C_{43}X_{43} \Rightarrow$$
$$\min(Z)=30\times02+250\times03+300\times04+230\times03+170\times04+20\times08=3540um$$

09-04 طريقة فورد-فلكورسن(Ford-Foulkerson):وهي من الطرق التي تستخدم في تحسين الحل الإبتدائي (القاعدي) الممكن، حيث بعد أن يتم الحصول على الحل الإبتدائي بإستخدام الطرق الواردة ذكرها سابقا، يستلزم الأمر تحسين الحل الإبتدائي للحصول على الحل الأمثل وخطوات هذه الطريقة هي كالتالي:

01-نضع نجمة مقابل الصف الذي فيه $a_i > 0$ ونجمة أمام العمود الذي يوجد فيه صفر المشترك من الصف أعلاه وذلك في مصفوفة التكاليف.

02-في الأعمدة التي تم تحديدها بإختيار المربع الذي فيه $X_{ij} > 0$ ومن ثم نحدد الصف فيما لو لم يتم تحديده.

03-يجري التحقق، هل أن على الأقل واحدة من الأعمدة المحدودة يكون فيها $b_j > 0$

04-إذا كانت الإجابة بنعم فهناك إمكانية لزيادة النقل في المربعات التي تحمل القيمة صفر في مصفوفة التكاليف.

05-إذا كانت الإجابة ب لا يحذف الصف الذي لم يتم تحديده والعمود الذي تم تحديده، ومن ثم من بين عناصر المصفوفة الغير محذوفة يتم إختيار العنصر الأقل قيمة.

06-يحذف العنصر الأقل قيمة الذي تم إختياره من العناصر التي لم تحذف ويضاف ذلك إلى العناصر التي حذفت مرتين.

07–إذا كانت جميع الصفوف والأعمدة بها أصفار فقد توصلنا إلى الحل الأمثل.

08–نحسب تكلفة النقل المثلى بالرجوع إلى التكاليف الحقيقية.

مثال17:نفس المثال السابق (المثال14)

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=02$	$C_{12}=03$	$C_{13}=05$	$a_1=280$
S_2	$C_{21}=03$	$C_{22}=02$	$C_{23}=04$	$a_2=300$
S_3	$C_{31}=05$	$C_{32}=04$	$C_{33}=03$	$a_3=230$
S_4	$C_{41}=04$	$C_{42}=06$	$C_{43}=08$	$a_4=190$
b_j	$b_1=200$	$b_2=250$	$b_3=550$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=1000$

المطلوب:

01–أوجد الحل الأمثل بإستخدام طريقة فورد–فلكورسن.

الحل:

يتم أولا إيجاد القيم الصفرية لكل صف ولكل عمود كمايلي:

$$C_0=\begin{bmatrix}235\\324\\543\\468\end{bmatrix}\Rightarrow C_1=\begin{bmatrix}013\\102\\210\\024\end{bmatrix}$$

إن مجموع التكاليف الكلية للنقل تكون أقل مايمكن إذا تم النقل طبقا للعناصر الصفرية الموجودة في المصفوفة C_1 كالتالي:

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=0$ $X_{11}=200$	$C_{12}=01$ $X_{12}=0$	$C_{13}=03$	$a_1=\cancel{280}=80$
S_2	$C_{21}=01$ $X_{21}=0$	$C_{22}=0$ $X_{22}=250$	$C_{23}=02$	$a_2=\cancel{300}=50$
S_3	$C_{31}=02$ $X_{31}=0$	$C_{32}=01$ $X_{32}=0$	$C_{33}=0$ $X_{33}=230$	$a_3=\cancel{230}=0$
S_4	$C_{41}=0$ $X_{41}=0$	$C_{42}=02$ $X_{42}=0$	$C_{43}=04$	$a_4=190$
b_j	$b_1=\cancel{200}=0$	$b_2=\cancel{250}=0$	$b_3=\cancel{550}=320$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=320$

نلاحظ أن هناك مربع فيه صفر لم تتم فيه عملية نقل، لذلك فإن الحل الذي تم الحصول عليه هو ليس بالحل الأمثل.

نختار أقل قيمة في تكلفة المصفوفة ونطرحها من باقي العناصر مع إضافتها إلى العناصر الأخرى كمايلي:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 011 \\ 100 \\ 430 \\ 022 \end{bmatrix}$$

وننتقل إلى الجدول الموالي

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=0$ $X_{11}=200$	$C_{12}=01$ $X_{12}=0$	$C_{13}=01$	$a_1=\cancel{280}=80$
S_2	$C_{21}=01$ $X_{21}=0$	$C_{22}=0$ $X_{22}=250$	$C_{23}=0$ $X_{23}=50$	$a_2=\cancel{300}=\cancel{50}=0$
S_3	$C_{31}=04$ $X_{31}=0$	$C_{32}=03$ $X_{32}=0$	$C_{33}=0$ $X_{33}=230$	$a_3=\cancel{230}=0$
S_4	$C_{41}=0$ $X_{41}=0$	$C_{42}=02$ $X_{42}=0$	$C_{43}=02$	$a_4=190$
b_j	$b_1=\cancel{200}=0$	$b_2=\cancel{250}=0$	$b_3=\cancel{550}=\cancel{320}=270$	$\sum_{i=1}^{4} a_i=\sum_{j=1}^{3} b_j=270$

تبدأ عملية التحسين بوضع إشارة (+) و(−) في المربعات في الجدول الذي يحوي قيم موجبة ل a_i مع المربعات التي تحتوي قيم موجبة b_j وفق الخطوات التالية:

−نضع إشارة (−) في المربع الموجود في الصف الذي تم تحديده والذي فيه قيمة موجبة ل a_i.

−نضع إشارة (+) في الخانات ذات القيم الصفرية تتبعها الإشارة (−) في الخانات المملوءة.

−نهاية الإشارة تكون ب(−) في المربع الموجود في العمود المحدد الذي يحوي قيمة موجبة للمتغير b_j.

والجدول التالي يوضح وضع الإشارة (−) والموجبة (+)

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=0$ $X_{11}=200$	$C_{12}=01$ $X_{12}=0$ $(+)$	$C_{13}=01$	$a_1=\cancel{280}=80$ $(-)$
S_2	$C_{21}=01$ $X_{21}=0$	$C_{22}=0$ $X_{22}=250$ $(-)$	$C_{23}=0$ $X_{23}=50$ $(+)$	$a_2=\cancel{300}=\cancel{50}=0$
S_3	$C_{31}=04$ $X_{31}=0$	$C_{32}=03$ $X_{32}=0$	$C_{33}=0$ $X_{33}=230$	$a_3=\cancel{230}=0$
S_4	$C_{41}=0$ $X_{41}=0$	$C_{42}=02$ $X_{42}=0$	$C_{43}=02$	$a_4=190$
b_j	$b_1=\cancel{200}=0$	$b_2=\cancel{250}=0$	$b_3=\cancel{550}=\cancel{320}=270$ $(-)$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=270$

وتكون القيم الجديدة المحصلة كالتالي:

مراكز التوزيع(العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	D_1	D_2	D_3	
S_1	$C_{11}=0$ $X_{11}=200$	$C_{12}=01$ $X_{12}=80$	$C_{13}=01$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{280}=\cancel{80}=0$
S_2	$C_{21}=01$ $X_{21}=0$	$C_{22}=0$ $X_{22}=170$	$C_{23}=0$ $X_{23}=130$	$a_2=\cancel{300}=\cancel{50}=0$
S_3	$C_{31}=04$ $X_{31}=0$	$C_{32}=03$ $X_{32}=0$	$C_{33}=0$ $X_{33}=230$	$a_3=\cancel{230}=0$
S_4	$C_{41}=0$ $X_{41}=0$	$C_{42}=02$ $X_{42}=0$	$C_{43}=02$ $X_{43}=190$	$a_4=\cancel{190}=0$
b_j	$b_1=\cancel{200}=0$	$b_2=\cancel{250}=0$	$b_3=\cancel{550}=\cancel{320}=\cancel{270}=\cancel{190}=0$	$\sum_{i=1}^{4}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=0$

جميع قيم a_i بها أصفار وكذلك الشيئ نفسه بالنسبة للأعمدة b_j وبالتالي فالحل المتوصل إليه هو حل أمثل.

وأن التكلفة الكلية للنقل هي:

$$\min(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{33}X_{33}+C_{43}X_{43}\Rightarrow$$

$$\min(Z)=200\times02+80\times03+170\times02+130\times04+230\times03+190\times08=3710um$$

10-إيجاد الحل الأولي(القاعدي) لمسائل النقل في حالة التعظيم:يحدث هذا الوضع عندما تكون الإمكانيات القصوى للإنتاج في الفترة (i) تساوي S_i والكمية المتاحة في الفترة (j) يجب ألا تقل عن D_j مع ملاحظة أن C_{ij} تمثل ربح الوحدة الواحدة للسلعة المنتجة في الفترة (i) والمباعة في الفترة (j)،وأيضا عندما تتولى إحدى شركات النقل نقل السلعة من مصادر العرض S_i إلى جهات الإستخدام D_j، حيث $(i=1,2,3,....,m);(j=1,2,3,.....n)$، ففي هذه الحالة فإن C_{ij} والتي تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلعة المنتجة من المصدر S_i إلى جهة الإستخدام D_j سوف تعتبر من وجهة نظر شركة النقل إيرادا يجب تعظيمه إلى أقصى حد ممكن وليس تكلفة يجب تدنيتها إلى أدنى حد ممكن،وفي مثل هذه الحالات يمكن حل نموذج النقل في حالة التعظيم بإحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى: تحويل دالة الهدف MAX إلى دالة الهدف MIN

لتحويل دالة الهدف من نوع MAX غلى دالة الهدف من نوع MIN نتبع الخطوات التالية:

-يتم تحديد أكبر عائد ل C_{ij}(أكبر ربح للوحدة) في مصفوفة النقل ونرمز لهذا العائد بالرمز $\overline{C}$

-نستبدل جميع عناصر مصفوفة النقل وهي C_{ij} (أرباح النقل) بعناصر جديدة هي التكاليف النسبية والتي نرمز لها بالرمز $\overline{C}_{ij}$ حيث: $\overline{C}_{ij}=\overline{C}-C_{ij}$ و $(i=1,2,3,....,m);(j=1,2,3,.....n)$

-تقيس $\overline{C}_{ij}$ التكاليف النسبية،وبذلك فإن هدف إيجاد الحد الأقصى للعائد أي $MAX(Z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$،

سوف يتحول إلى هدف إيجاد الحد الأدنى للإنحرافات (التكاليف النسبية) أي $MIN(W)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}_{ij}X_{ij}$

-يتم تحديد الحل الأولي لنموذج النقل عن طريق الطرق التي سبق عرضها في حالة التدنية وصولا إلى الحل الأمثل بإستخدام أي من طرق الحل السابقة.

-بعد الوصول إلى الحل الأمثل يمكن تحديد قيمة دالة الهدف بإحدى الطريقتين التاليتين:

أ-بالرجوع إلى إستخدام قيم C_{ij} الأصلية للعائد مضروبة في الكميات X_{ij} المتحصل عليها من الحل الأمثل لمصفوفة التكاليف النسبية $\overline{C}_{ij}$أي أن قيمة دالة الهدف تحسب كمايلي: $MAX(Z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}X_{ij}$

ب-قيمة دالة الهدف=أقصى عائد ممكن تحقيقه-إجمالي قيمة التكاليف النسبية

حيث:

أقصى عائد ممكن تحقيقه=أكبر عنصر C_{ij}للعائد في مصفوفة النقل الأصلية$(\overline{C})$×إجمالي الكميات المعروضة (أو المطلوبة) في المصفوفة ككل.

ووفق هذه الطريقة فإن دالة الهدف تحسب كالتالي: $MAX(Z)=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}_{ij}X_{ij}$

الطريقة الثانية: الإبقاء على دالة الهدف MAX: في هذه الطريقة نبقي على دالة الهدف من نوع MAX ونحل بنفس الطرق السابقة للحصول على الحل الأولي مع فرق هو إختيار أكبر عائد في العمود أو السطر أو المصفوفة ككل، كما سوف نرى لاحقا.

مثال18: لنفرض أن منظمة ما تتكون من ثلاث وحدات إنتاجية (A,B,C) يمكنها إنتاج أي من المنتجات الثلاثة التالية (P_1,P_2,P_3) ضمن أي من هذه الوحدات وفقا للكميات المطلوبة التالية:

(170 من P_1)،(220 من P_2)،(110 من P_3)،أما طاقة مختلف الوحدات فهي (150 من A)،(230 منB) و(120 من C).

وان الربح في كل منتج حسب مكان إنتاجه يظهر في الجدول التالي

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$	$C_{12}=05$	$C_{13}=06$	$a_1=150$
B	$C_{21}=03$	$C_{22}=04$	$C_{23}=08$	$a_2=230$
C	$C_{31}=11$	$C_{32}=09$	$C_{33}=07$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i=\sum_{j=1}^{3} b_j=500$

المطلوب:

01–أوجد الحل الأولي بإستخدام الطرقتين التاليتين:

أ- **الطريقة الأولى**: تحويل دالة الهدف MAX إلى دالة الهدف MIN وبالطرق التالية

–طريقة الركن الشمالي الغربي(North West Corner Method)(NWC)

–طريقة الصف الأدنى(Row Minimum)(RMI)

–طريقة الصف الأدنى المعدل(Modified Row Minimum)(MRMI)

–طريقة العمود الأدنى(Column Minimum)(CMI)

–طريقة العمود الأدنى المعدل(Modified Column Minimum) (MCMI)

–طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة(Matrix Minimum)(MMI)

–طريقة فوجل التقريبية(**V**ogal"s Approximation Méthod)(VAM)

– طريقة روسيل التقريبية (Russels Approximation Méthod)(RAM)

ب- **الطريقة الثانية**: الإبقاء على دالة الهدف MAX وبالطرق التالية:

–طريقة الركن الشمالي الغربي(North West Corner Method)(NWC)

–طريقة الصف الأعلى(Row Maximum)(RMA)

–طريقة الصف الأعلى المعدل(Modified Row Maximum)(MRMA)

–طريقة العمود الأعلى(Column Maximum)(CMA)

-طريقة العمود الأعلى المعدل(MCMA) (Modified Column Maximum)

-طريقة أعلى عائد في المصفوفة(MMA)(Matrix Maximum)

-طريقة فوجل التقريبية(VAM)(**V**ogal"s Approximation Méthod)

- طريقة روسيل التقريبة (RAM)(Russels Approximation Méthod)

02-أحسب قيمة دالة الربح الأعظمي بطريقتين مختلفتين في الطريقة الأولى فقط؟

الحل :

إيجاد الحل الأولي بإستخدام طريقتيم مختلفتين

أ-الطريقة الأولى: تحويل الدالة من نوع (MAX)إلى الداة من نوع (MIN)

أي تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة التكاليف النسبية كالتالي

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 02 & 05 & 06 \\ 03 & 04 & 08 \\ 11 & 09 & 07 \end{bmatrix} \rightarrow \overline{C}_{ij} = \begin{bmatrix} 09 & 06 & 05 \\ 08 & 07 & 03 \\ 0 & 02 & 04 \end{bmatrix}$$

يصبح جدول النقل كالتالي

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11} = 09$	$C_{12} = 06$	$C_{13} = 05$	$a_1 = 150$
B	$C_{21} = 08$	$C_{22} = 07$	$C_{23} = 03$	$a_2 = 230$
C	$C_{31} = 0$	$C_{32} = 02$	$C_{33} = 04$	$a_3 = 120$
b_j	$b_1 = 170$	$b_2 = 220$	$b_3 = 110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

سوف نجد الحل الأولي الممكن بإستخدام إحدى الطرق السابقة كمايلي:

01-طريقة الركن الشمالي الغربي(North West Corner Method)(NWC)

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11} = 09$ $X_{11} = 150$	$C_{12} = 06$ $X_{12} = 0$	$C_{13} = 05$ $X_{13} = 0$	$a_1 = \cancel{150} = 0$
B	$C_{21} = 08$ $X_{21} = 20$	$C_{22} = 07$ $X_{22} = 210$	$C_{23} = 03$ $X_{23} = 0$	$a_2 = \cancel{230}$ $= \cancel{210} = 0$
C	$C_{31} = 0$ $X_{31} = 0$	$C_{32} = 02$ $X_{32} = 10$	$C_{33} = 04$ $X_{33} = 110$	$a_3 = \cancel{120}$ $= \cancel{110} = 0$
b_j	$b_1 = \cancel{170}$ $= \cancel{20} = 0$	$b_2 = \cancel{220}$ $= \cancel{10} = 0$	$b_3 = \cancel{110} = 0$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{21}=20, X_{22}=210, X_{32}=10, X_{33}=110$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{23}=X_{31}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{32}X_{32}+C_{33}X_{33}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times 02+20\times 03+210\times 04+10\times 09+110\times 07=2060um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$

$$=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\bar{C}_{11}X_{11}+\bar{C}_{21}X_{21}+\bar{C}_{22}X_{22}+\bar{C}_{32}X_{32}+\bar{C}_{33}X_{33}\right)\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=11\times(500)-(150\times 09+20\times 08+210\times 07+10\times 02+110\times 04)=2060um$$

02-طريقة الصف الأدنى(RMI)(Row Minimum):

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=0$	$C_{12}=06$ $X_{12}=40$	$C_{13}=05$ $X_{13}=110$	$a_1=\cancel{150}$ $=\cancel{40}=0$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=50$	$C_{22}=07$ $X_{22}=180$	$C_{23}=03$ $X_{23}=0$	$a_2=\cancel{230}$ $=\cancel{50}=0$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}$ $=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}$ $=\cancel{180}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=40, X_{13}=110, X_{21}=50, X_{22}=180, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{23}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=40\times05+110\times06+50\times03+180\times04+120\times11=3050um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$
$$=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\overline{C}_{12}X_{12}+\overline{C}_{13}X_{13}+\overline{C}_{21}X_{21}+\overline{C}_{22}X_{22}+\overline{C}_{31}X_{31}\right)\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=11\times(500)-(40\times06+110\times05+50\times08+180\times07+120\times0)=3050um$$

03-طريقة الصف الأدنى المعدل(MRMI)(Modified Row Minimum):

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=40$	$C_{12}=06$ $X_{12}=0$	$C_{13}=05$ $X_{13}=110$	$a_1=\cancel{150}=\cancel{40}=0$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=10$	$C_{22}=07$ $X_{22}=220$	$C_{23}=03$ $X_{23}=0$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{10}=0$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{130}=\cancel{10}=0$	$b_2=\cancel{220}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=40, X_{13}=110, X_{21}=10, X_{22}=220, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{23}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{13}X_{13}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=40\times 02+110\times 06+10\times 03+220\times 04+120\times 11=2970um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$
$$=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\bar{C}_{11}X_{11}+\bar{C}_{13}X_{13}+\bar{C}_{21}X_{21}+\bar{C}_{22}X_{22}+\bar{C}_{31}X_{31}\right)\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=11\times(500)-(40\times 09+110\times 05+10\times 08+220\times 07+120\times 0)=2970um$$

04-طريقة العمود الأدنى(Column Minimum)(CMI):

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=0$	$C_{12}=06$ $X_{12}=150$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=50$	$C_{22}=07$ $X_{22}=70$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{180}=\cancel{110}=0$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=150\times 05+50\times 03+70\times 04+110\times 08+120\times 11=3380um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$

$$=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\bar{C}_{12}X_{12}+\bar{C}_{21}X_{21}+\bar{C}_{22}X_{22}+\bar{C}_{23}X_{23}+\bar{C}_{31}X_{31}\right)\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=11\times(500)-(150\times06+50\times08+70\times07+110\times03+120\times0)=3380um$$

05-طريقة العمود الأدنى المعدل(Modified Column Minimum) (MCMI):

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=0$	$C_{12}=06$ $X_{12}=150$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=50$	$C_{22}=07$ $X_{22}=70$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{180}=\cancel{70}$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

01-عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$

$$=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\bar{C}_{12}X_{12}+\bar{C}_{21}X_{21}+\bar{C}_{22}X_{22}+\bar{C}_{23}X_{23}+\bar{C}_{31}X_{31}\right)\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=11\times(500)-(150\times06+50\times08+70\times07+110\times03+120\times0)=3380um$$

06-طريقة أدنى تكلفة في المصفوفة(MMI)(Matrix Minimum):

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=0$	$C_{12}=06$ $X_{12}=150$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=50$	$C_{22}=07$ $X_{22}=70$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{120}=\cancel{50}=0$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=50$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$

$$=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\overline{C}_{12}X_{12}+\overline{C}_{21}X_{21}+\overline{C}_{22}X_{22}+\overline{C}_{23}X_{23}+\overline{C}_{31}X_{31}\right)\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=11\times(500)-(150\times 06+50\times 08+70\times 07+110\times 03+120\times 0)=3380um$$

07-طريقة فوجل التقريبية(Vogal"s Approximation Méthod)(VAM):

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب) P_1	P_2	P_3	a_i	V.A.M Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=0$	$C_{12}=06$ $X_{12}=150$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$	01	01	03	--
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=50$	$C_{22}=07$ $X_{22}=70$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{120}=\cancel{50}=0$	04	04	01	01
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$	02	--	--	--
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$				
Δ_1	08	04	01					
Δ_2	01	01	02					
Δ_3	01	01	-----					
Δ_4	08	07	------					

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times 05+50\times 03+70\times 04+110\times 08+120\times 11=3380um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$

$$=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\overline{C}_{12}X_{12}+\overline{C}_{21}X_{21}+\overline{C}_{22}X_{22}+\overline{C}_{23}X_{23}+\overline{C}_{31}X_{31}\right)\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=11\times(500)-(150\times06+50\times08+70\times07+110\times03+120\times0)=3380um$$

08- طريقة روسيل التقريبة (Russels Approximation Méthod)(RAM):

المرحلة الأولى: نستخرج مصفوفة التكاليف الجديدة بإستخدام العلاقة التالية $\Delta_{ij}=C_{ij}-\overline{a}_i-\overline{b}_j$

	P_1	P_2	P_3
A	-09	-10	-09
B	-09	-08	-10
C	-13	-09	-05

بعد تشكيل المصفوفة نلاحظ أن أصغر تكلفة نقل هي في الخلية X_{31} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{31}

المرحلة الثانية: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_1	P_2	P_3
A	-09	-10	-09
B	-09	-08	-10

نلاحظ أن أصغر تكلفة نقل هي في الخلية X_{12} و الخلية X_{23} وبالرجوع إلى جدول النقل نجد أن أقل تكلفة نقل هي في الخلية X_{23} فيتم شغلها بالكمية X_{23}

المرحلة الثالثة: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_1	P_2
A	-09	-10
B	-09	-08

نلاحظ ان أصغر تكلفة نقل هي في الخلية X_{12} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{12}

المرحلة الرابعة: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_1	P_2
B	-09	-12

نلاحظ ان أصغر تكلفة نقل هي في الخلية X_{22} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{22}

المرحلة الخامسة: نعيد إستخراج مصفوفة التكاليف باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_1
B	-09

نلاحظ أن الخلية المتبقية هي الخلية X_{21} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{21}

ويمكن توضيح ما تم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=0$	$C_{12}=06$ $X_{12}=150$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=50$	$C_{22}=07$ $X_{22}=70$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{120}=\cancel{50}=0$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي بطريقتيم مختلفتين

الطريقة الأولى:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

الطريقة الثانية:

$$MAX(Z)=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$

$$=\overline{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\left(\overline{C}_{12}X_{12}+\overline{C}_{21}X_{21}+\overline{C}_{22}X_{22}+\overline{C}_{23}X_{23}+\overline{C}_{31}X_{31}\right)\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=11\times(500)-(150\times06+50\times08+70\times07+110\times03+120\times0)=3380um$$

ب-الطريقة الثانية: الإبقاء على دالة الهدف MAX: نجد الحل الأولي (الإبتدائي) بالطرق التالية

01-طريقة الركن الشمالي الغربي(North West Corner Method)(NWC):في هذه الطريقة نقوم بتوزيع الكميات من مراكز التوزيع إلى مراكز الإستلام بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=150$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=20$	$C_{22}=04$ $X_{22}=210$	$C_{23}=08$ $X_{23}=0$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{210}=0$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=0$	$C_{32}=09$ $X_{32}=10$	$C_{33}=07$ $X_{33}=110$	$a_3=\cancel{120}=\cancel{110}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{20}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{10}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{21}=50, X_{22}=210, X_{32}=10, X_{33}=110$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{23}=X_{31}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{32}X_{32}+C_{33}X_{33}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=150\times02+20\times03+210\times04+10\times09+110\times07=2060um$$

02-طريقة الصف الأعلى(Row Maximum)(RMA): تبدأ هذه الطريقة بإختيار الخلية التي لها أعلى عائد ربح في الصف الأول ويتم شغل هذه الخلية بنفس الأسلوب السابق، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الأول من مصفوفة النقل، ثم ننتقل إلى الصف الثاني ونختار الخلية التي لها أعلى عائد ربح ويتم شغلها، ويستمر ذلك إلى أن يتم حذف الصف الثاني من مصفوفة النقل، وهكذاحتى يتم الإنتهاء من جميع صفوف مصفوفة النقل.

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=40$	$C_{13}=06$ $X_{13}=110$	$a_1=\cancel{150}=\cancel{40}=0$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=50$	$C_{22}=04$ $X_{22}=180$	$C_{23}=08$ $X_{23}=0$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{50}=0$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=50$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{180}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=40, X_{13}=110, X_{21}=50, X_{22}=180, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{23}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{13}X_{13}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=40\times05+110\times06+50\times03+180\times04+120\times11=3050um$$

03-طريقة الصف الأعلى المعدل(Modified Row Maximum)(MRMA): تقوم هذه الطريقة على إختيار أعلى عائد ربح في كل صف وذلك تبعا إلى عمود الطلب حيث يتم توزيع عمود الطلب على أعلى عائد في السطر فإذا تم إستيفاء السطر ننتقل إلى السطر الثاني، وإذا لم يتم إستيفاء السطر وتم إستيفاء العمود ننتقل إلى عمود آخر وهكذا حتى يتم شطب جميع الصفوف والأعمدة.

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=40$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$	$C_{13}=06$ $X_{13}=110$	$a_1=\cancel{150}=\cancel{40}=0$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=10$	$C_{22}=04$ $X_{22}=220$	$C_{23}=08$ $X_{23}=0$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{10}=0$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$

b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=\cancel{10}=0$	$b_2=\cancel{220}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=40, X_{13}=110, X_{21}=10, X_{22}=220, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{23}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{13}X_{13}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=40\times02+110\times06+10\times03+220\times04+120\times11=2970um$$

04-طريقة العمود الأعلى(CMA)(Column Maximum): تختلف هذه الطريقة عن الطريقة السابقة حيث تبدأ بإختيار الخلية التي بها أعلى عائد ربح في العمود الأول ويتم شغل هذه الخلية بنفس الأسلوب السابق وبعد الإنتهاء من العمود الأول وحذفه ننتقل إلى العمود الثاني فالثالث وهكذا حتى يتم الإنتهاء من المصفوفة كلها.

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=150$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=50$	$C_{22}=04$ $X_{22}=70$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{180}=\cancel{110}=0$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

05-طريقة العمود الأعلى المعدل(MCMA) (Modified Column MAXIMUM): تقوم هذه الطريقة على إختيار أعلى عائد ربح في كل عمود وذلك تبعا إلى صف العرض حيث يتم توزيع صف العرض على أعلى عائد في العمود فإذا تم إستيفاء العمود ننتقل إلى العمود الثاني، وإذا لم يتم إستيفاء العمود وتم إستيفاء الصف ننتقل إلى صف آخر وهكذا حتى يتم شطب جميع الأعمدة و الصفوف.

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=150$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=50$	$C_{22}=04$ $X_{22}=70$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{180}=\cancel{110}=0$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

06-طريقة أعلى عائد في المصفوفة(MMA)(Matrix Maximum): ويطلق عليها طريقة أعلى عائد بالمصفوفة ومنها نبحث عن أعلى عائد في مصفوفة النقل ثم تخصص كمية من التجهيزات (المصادر) إلى الطلبات بالعائد الأعلى للمصفوفة حتى يتم التخصيص للكل مع الأخذ بنظر الإعتبار التعديل والحذف وذلك بإنقاص الكمية التي حددت للخلية من مصدر الطلب والتجهيز، الطريقة تعتمد إستثمار التباين في الأسعار لا إشباع المتطلبات بأعلى العوائد، بل إن الهدف تأمين الإحتياجات من أي مصدر تجهيز وبأية عائد، لذا وضعت

طريقة أعلى عائد لكي يتم البحث والتركيز بموجبها على أعلى عائد متوفر في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض المقابلة لذلك العائد الأعلى.

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=150$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=50$	$C_{22}=04$ $X_{22}=70$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{120}=\cancel{50}=0$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=50$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

07-طريقة فوجل التقريبية(Vogal"s Approximation Méthod)(VAM):قد يطلب أحيانا إيجاد أكبر ربح ناتج عن عملية النقل، في هذه الحالة تكون القيم المعطاة في المصفوفة هي مقدار الربح الناتج عن عملية النقل بين كل مصدر (مركز توزيع) وكل مركز إستيراد(مركز إستيلام)،ويمكن حل المسألة في هذه الحالة بإستخدام طريقة فوجل التقريبية وفق الخطوات التالية:

01-التأكد من توازن المصفوفة بين قيمتي الطلب والعرض من المواد المنقولة، إذا لم تكن المسألة متوازنة نضيف صفا أو عمودا وهميا يمثل مصنعا أو مستودعا يضم الفرق المذكور، وتكون أرباح النقل المتحققة من إستخدام هذا الصف أو العمود في النقل مساوية للصفر.

02-يحسب الفرق بين أكبر عائدين غير متساويين في كل صف وكل عمود.

03-نأخذ الصف أو العمود ذا الفرق الأكبر.

04-نختار المربع ذا الربح الأكبر في الصف أو العمود المختار، ونعمل على تلبية طلبية مركز الإستيراد الذي يقع فيه هذا المربع من المصدر الذي يقابله.

05-نشطب الصف أو العمود الذي تمت تلبية طلبيته.

06-نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل الأعمدة والصفوف،ونكرر العملية السابقة إلى أن تلبى جميع طلبيات مراكز الإستيراد من المصادر المتاحة.

07-يراعى الترتيب في إعتماد الصفوف والأعمدة للتوزيع بحيث ينظر أولا إلى الصفوف ثم الأعمدة، ونختار أكبر قيمة فيهما، فإذا تساوت قيمتان في الصف تؤخذ القيمة الأولى وكذلك في الأعمدة وإذا تساوت قيمتان في الأعمدة و الصفوف تؤخذ القيمة الموجودة في الصفوف أولا وهكذا.

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i	V.A.M			
	P_1	P_2	P_3		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=150$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$	01	01	03	--
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=50$	$C_{22}=04$ $X_{22}=70$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{120}=\cancel{50}=0$	04	04	01	01
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$	02	--	--	--
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{70}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3} a_i=\sum_{j=1}^{3} b_j=500$				
Δ_1	09	04	01					
Δ_2	01	01	02					
Δ_3	01	01	-------					
Δ_4	03	04	-------					

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

08–طريقة روسيل التقريبية (Russels Approximation Méthod)(RAM): تعتبر هذه الطريقة أفضل من سابقاتها لأنها تعطينا حل أولي(قاعدي) أقرب للحل الأمثل(خصوصا للمصفوفات الكبيرة) ،أما خطوات الحل بهذه الطريقة فهي كالتالي:

01–تحديد أعلى عائد نقل لكل صف ونرمز لها ب $\bar{a}_i$ ولكل عمود نرمز لها ب $\bar{b}_j$

02–نشكل مصفوفة الأرباح عائداتها هي $\Delta_{ij} = C_{ij} + \bar{a}_i + \bar{b}_j$

03–نحدد الخلية التي لها أكبر عائد نقل Δ_{ij} ،ونعطي لمتغيرها أكبر كمية ممكنة والتي تساوي

$$X_{ij} = \min\left(a_i, b_j\right)$$

04–بحذف الصف او العمود المتحقق وتغيير كمية إجمالي الطلب أوالعرض الذي تقع فيه الخلية إلى مقدار الفرق بين كميتي العرض والطلب المقابلة لها.

05–إذا بقي صف أو عمود واحد نعطي للصف او العمود المتبقي كميات العرض أو الطلب المتبقية

06–إذا بقي أكثر من صف أو عمود واحد نعود للخطوة الأولى.

المرحلة الأولى:نستخرج مصفوفة الأرباح الجديدة بإستخدام العلاقة التالية $\Delta_{ij} = C_{ij} + \bar{a}_i + \bar{b}_j$

	P_1	P_2	P_3
A	19	20	20
B	22	21	24
C	33	29	26

بعد تشكيل المصفوفة نلاحظ أن أكبر عائد نقل هو في الخلية X_{31} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{31}

المرحلة الثانية: نعيد إستخراج مصفوفة الأرباح باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_1	P_2	P_3
A	19	20	20
B	22	21	24

بعد تشكيل المصفوفة نلاحظ أن أكبر عائد نقل هو في الخلية X_{23} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{23}

المرحلة الثالثة: نعيد إستخراج مصفوفة الأرباح باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_1	P_2
A	19	20
B	22	21

بعد تشكيل المصفوفة نلاحظ أن أكبر عائد نقل هو في الخلية X_{21} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{21}

المرحلة الرابعة: نعيد إستخراج مصفوفة الأرباح باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_2
A	20
B	21

بعد تشكيل المصفوفة نلاحظ أن أكبر عائد نقل هو في الخلية X_{22} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{22}

المرحلة الخامسة: نعيد إستخراج مصفوفة الأرباح باستخدام العلاقة السابقة والجدول التالي يوضح ذلك

	P_2
A	20

نلاحظ أن الخلية المتبقية هي الخلية X_{12} وبالتالي يتم شغلها بالكمية X_{12}

ويمكن توضيح ما تم شرحه سابقا من خلال الجدول التالي

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=150$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=50$	$C_{22}=04$ $X_{22}=70$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{120}=\cancel{70}=0$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=\cancel{120}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{50}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{150}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

ملاحظة: بعد إتمام عملية التوزيع لمسألة النقل بالطرق السابق ذكرها تم التوصل إلى النتائج التالية:

		تعظيم الأرباح	تعظيم الأرباح	تعظيم الأرباح
الرقم	طريقة النقل	تحويلMAXإلى MIN	طريقة النقل	الإبقاء على MAX
01	(NWC)	2060 ون	(NWC)	2060 ون
02	(RMI)	3050 ون	(RMA)	3050 ون
03	(MRMI)	2970 ون	(MRMA)	2970 ون
04	(CMI)	3380 ون	(CMA)	3380 ون
05	(MCMI)	3380 ون	(MCMA)	3380 ون
06	(MMI)	3380 ون	(MMA)	3380 ون
07	(VAM)	3380 ون	(VAM)	3380 ون
08	(RAM)	3380 ون	(RAM)	3380 ون

11-طرق تحسين الحل الأولي (القاعدي) وصولا إلى الحل الأمثل في مسائل التعظيم:يتم إختيار أمثلية الحل الأولي (القاعدي) في مسائل النقل بنفس الفكرة المتبعة في طريقة السمبلكس والتي تعتمد على فكرة أثر تحويل المتغيرات غير الأساسية في الحل إلى متغيرات أساسية وإن كان ذلك سيتم في نموذج النقل بطريقة تتناسب مع خصائص هذا النموذج.

ويوجد عدة طرق يمكن من خلالها إختبار أمثلية الحل ومن بين هذه الطرق نذكر التالي

-طريقة المسار المتعرج (Stepping Stone Method)

-طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method)

مثال19: نفس معطيات المثال رقم18

المطلوب:

01-أوجد الحل الأولي بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي وبطريقة تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة الخسائر النسبية؟

02-أوجد الحل الأمثل بإستخدام إحدى الطرق التالية:

02-01-طريقة المسار المتعرج (Stepping Stone Method)

02-02-طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method)

03- أوجد الحل الأولي بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي و بطريقة دالة الهدف من نوع تعظيم؟

04-أوجد الحل الأمثل بإستخدام إحدى الطرق التالية:

04-01-طريقة المسار المتعرج (Stepping Stone Method)

04-02-طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method)

الحل:

01-إيجاد الحل الأولي الأولي بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي وبطريقة تحويل مصفوفة الأرباح إلى مصفوفة الخسائر النسبية

لدينا مماسبق وحسب طريقة الركن الشمالي الغربي

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=150$	$C_{12}=06$ $X_{12}=0$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=\cancel{150}=0$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=20$	$C_{22}=07$ $X_{22}=210$	$C_{23}=03$ $X_{23}=0$	$a_2=\cancel{230}=\cancel{210}=0$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=0$	$C_{32}=02$ $X_{32}=10$	$C_{33}=04$ $X_{33}=110$	$a_3=\cancel{120}=\cancel{110}=0$
b_j	$b_1=\cancel{170}=\cancel{20}=0$	$b_2=\cancel{220}=\cancel{10}=0$	$b_3=\cancel{110}=0$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{21}=20, X_{22}=210, X_{32}=10, X_{33}=110$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{23}=X_{31}=0$

02-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{C}_{ij}X_{ij}\Rightarrow$$

$$=\bar{C}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}-(\bar{C}_{11}X_{11}+\bar{C}_{21}X_{21}+\bar{C}_{22}X_{22}+\bar{C}_{32}X_{32}+\bar{C}_{33}X_{33})\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=11\times(500)-(150\times09+20\times08+210\times07+10\times02+110\times04)=2060um$$

02-إيجاد الحل الأمثل بإستخدام إحدى الطرقتين التاليتين:

02-01-طريقة المسار المتعرج (Stepping Stone Method)

بما انه يوجد لدينا أربعة متغيرات غير أساسية إذن فعدد المسارات هو أربعة ويمكن توضيحها من خلال الجدول التالي

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	التكلفة غير المباشرة
X_{12}	$X_{12} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{12}$	$06-07+08-09=-02$
X_{13}	$X_{13} \to X_{11} \to X_{21} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{33} \to X_{13}$	$05-09+08-07+02-04=-05$
X_{23}	$X_{23} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{33} \to X_{23}$	$03-07+02-04=-06$
X_{31}	$X_{31} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{31}$	$0-02+07-08=-03$

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة هي الخلية X_{23} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{23} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{33} \to X_{23}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{23} \to \underset{(-)}{X_{22}} \to X_{32} \to \underset{(-)}{X_{33}} \to X_{23}$$

$$\text{MIN}(X_{22}, X_{33}) \Rightarrow \text{MIN}(210,110)=110$$

الوفر الإجمالي للتكلفة هو $110\times(-6)=-660$ ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=150$	$C_{12}=06$ $X_{12}=0$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=20$	$C_{22}=07$ $X_{22}=100$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=0$	$C_{32}=02$ $X_{32}=120$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{21}=20, X_{22}=100, X_{23}=110, X_{32}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{31}=X_{33}=0$

أما الأرباح الكلية للنقل فهو:

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{32}X_{32} \Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times 02+20\times 03+100\times 04+110\times 08+120\times 09=2720um$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

التكلفة غير المباشرة	المسار المغلق للمتغير الأساسي	المتغيرات غير الأساسية
$06-07+08-09=-02$	$X_{12}\to X_{22}\to X_{21}\to X_{11}\to X_{12}$	X_{12}
$05-03+08-09=01$	$X_{13}\to X_{23}\to X_{21}\to X_{11}\to X_{13}$	X_{13}
$0-02+07-08=-03$	$X_{31}\to X_{32}\to X_{22}\to X_{21}\to X_{31}$	X_{31}
$04-02+07-03=06$	$X_{33}\to X_{32}\to X_{22}\to X_{23}\to X_{33}$	X_{33}

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة هي الخلية X_{31} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{31}\to X_{32}\to X_{22}\to X_{21}\to X_{31}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{31}\to \underset{(-)}{X_{32}}\to X_{22}\to \underset{(-)}{X_{21}}\to X_{31}$$

$$MIN\left(X_{21},X_{32}\right)\Rightarrow MIN\left(20,120\right)=20$$

الوفر الإجمالي للتكلفة هو $20\times(-3)=60$ ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=150$	$C_{12}=06$ $X_{12}=0$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=0$	$C_{22}=07$ $X_{22}=120$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=20$	$C_{32}=02$ $X_{32}=100$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{22}=120, X_{23}=110, X_{31}=20, X_{32}=100$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{21}=X_{33}=0$

أما الأرباح الكلية للنقل فهي:

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}+C_{32}X_{32}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times 02+120\times 04+110\times 08+20\times 11+100\times 09=2780um$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	التكلفة غير المباشرة
X_{12}	$X_{12}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}$	$06-02+0-09=-05$
X_{13}	$X_{13}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{32}$ $\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{13}$	$05-03+07-02+0-09=-02$
X_{21}	$X_{21}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{21}$	$08-07+02-0=03$
X_{33}	$X_{33}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{33}$	$04-02+07-03=06$

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة سالبة هي الخلية X_{12} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{12}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{12}\rightarrow \underset{(-)}{X_{32}}\rightarrow X_{31}\rightarrow \underset{(-)}{X_{11}}\rightarrow X_{12}$$

$$MIN(X_{11},X_{32})\Rightarrow MIN(150,100)=100$$

الوفر الإجمالي للتكلفة هو $100\times(-5)=240$ ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=50$	$C_{12}=06$ $X_{12}=100$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=0$	$C_{22}=07$ $X_{22}=120$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=50, X_{12}=100, X_{22}=120, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{21}=X_{32}=X_{33}=0$

أما الأرباح الكلية للنقل فهي:

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{12}X_{12}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=50\times02+100\times05+120\times04+110\times08+120\times11=3280um$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	التكلفة غير المباشرة
X_{13}	$X_{13}\to X_{12}\to X_{22}\to X_{23}\to X_{13}$	$05-06+07-03=03$
X_{21}	$X_{21}\to X_{11}\to X_{12}\to X_{22}\to X_{21}$	$08-09+06-07=-02$
X_{32}	$X_{32}\to X_{31}\to X_{11}\to X_{12}\to X_{32}$	$02-0+09-06=05$
X_{33}	$X_{33}\to X_{23}\to X_{22}\to X_{12}$ $\to X_{11}\to X_{31}\to X_{33}$	$04-03+07-06+09-0=11$

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات الإشارة السالبة هي الخلية X_{21} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{21}\to X_{11}\to X_{12}\to X_{22}\to X_{21}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{21}\to \underset{(-)}{X_{11}}\to X_{12}\to \underset{(-)}{X_{22}}\to X_{21}$$

$$MIN(X_{11},X_{22})\Rightarrow MIN(50,120,)=50$$

الوفر الإجمالي للتكلفة هو 50×(2−)= 100ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=09$ $X_{11}=0$	$C_{12}=06$ $X_{12}=150$	$C_{13}=05$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=08$ $X_{21}=50$	$C_{22}=07$ $X_{22}=70$	$C_{23}=03$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$	$C_{32}=02$ $X_{32}=0$	$C_{33}=04$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

أما الأرباح الكلية للنقل فهي:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$
$$MAX(Z)=150\times 05+50\times 03+70\times 04+110\times 08+120\times 11=3380um$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

التكلفة غير المباشرة	المسار المغلق للمتغير الأساسي	المتغيرات غير الأساسية
$09-06+07-08=02$	$X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{21}\rightarrow X_{11}$	X_{11}
$05-06+07-03=03$	$X_{13}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{13}$	X_{13}
$02-0+08-07=03$	$X_{32}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{21}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{32}$	X_{32}
$04-03+08-0=09$	$X_{33}\rightarrow X_{23}\rightarrow X_{21}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{33}$	X_{33}

نلاحظ من خلال الجدول السابق أن جميع المسارات المغلقة ذات تكلفة مباشرة موجبة أو معدومة إذن فالحل أمثل.

02-02-طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method)

a_i	مراكز الإستلام (الطلب) P_3	P_2	P_1	مراكز التوزيع (العرض)	
	$J_3=-09$	$J_2=-07$	$J_1=-08$		
$a_1=150$	$C_{13}=-05$ $X_{13}=0$ $E_{13}=-05$	$C_{12}=-06$ $X_{12}=0$ $E_{12}=-02$	$C_{11}=-09$ $X_{11}=150$ $E_{11}=0$	$I_1=-01$	**A**
$a_2=230$	$C_{23}=-03$ $X_{23}=0$ $E_{23}=-06$	$C_{22}=-07$ $X_{22}=210$ $E_{22}=0$	$C_{21}=-08$ $X_{21}=20$ $E_{21}=0$	$I_2=0$	**B**
$a_3=120$	$C_{33}=-04$ $X_{33}=110$ $E_{33}=0$	$C_{32}=-02$ $X_{32}=10$ $E_{32}=0$	$C_{31}=0$ $X_{31}=0$ $E_{31}=-03$	$I_3=05$	**C**
$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$	$b_3=110$	$b_2=220$	$b_1=170$	b_j	

بعد تحديد قيم كل من (I_i)و(J_j) نقوم بحساب قيمة E_{ij} الإقتصاد في التكلفة

بعد حساب قيمة E_{ij}نلاحظ أنه توجد أكثر من قيمة سالبة وللقيام بعملية التحسين نختار أقل قيمة سالبة(أكبر قيمة بالقيمة المطلقة)وهي X_{23} ونكون إنطلاقا منها مايسمى بالمسار المغلق وذلك بإضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{23}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{33}\rightarrow X_{23}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{23} \to \underset{(-)}{X_{22}} \to X_{32} \to \underset{(-)}{X_{33}} \to X_{23}$$

$$MIN\left(X_{22}, X_{33}\right) \Rightarrow MIN\left(210,110\right) = 110$$

نقوم بتوزيع الخلية الجديدة حسب مسارها الجديد ،أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
		P_1	P_2	P_3	
		$J_1 = -08$	$J_2 = -07$	$J_3 = -03$	
A	$I_1 = -01$	$C_{11} = -09$ $X_{11} = 150$ $E_{11} = 0$	$C_{12} = -06$ $X_{12} = 0$ $E_{12} = -02$	$C_{13} = -05$ $X_{13} = 0$ $E_{13} = -01$	$a_1 = 150$
B	$I_2 = 0$	$C_{21} = -08$ $X_{21} = 20$ $E_{21} = 0$	$C_{22} = -07$ $X_{22} = 100$ $E_{22} = 0$	$C_{23} = -03$ $X_{23} = 110$ $E_{23} = 0$	$a_2 = 230$
C	$I_3 = 05$	$C_{31} = 0$ $X_{31} = 0$ $E_{31} = -03$	$C_{32} = -02$ $X_{32} = 120$ $E_{32} = 0$	$C_{33} = -04$ $X_{33} = 0$ $E_{33} = 02$	$a_3 = 120$
b_j		$b_1 = 170$	$b_2 = 220$	$b_3 = 110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

لا تزال هناك قيم سالبة ل E_{ij} مما يعني أن الحل ليس أمثل، نعيد الحساب من جديد وذلك بإختيار الخلية X_{31}

ونكون إنطلاقا منها مايسمى بالمسار المغلق وذلك بإضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{31} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{31}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{31} \to \underset{(-)}{X_{32}} \to X_{22} \to \underset{(-)}{X_{21}} \to X_{31}$$

$$MIN\left(X_{21}, X_{32}\right) \Rightarrow MIN\left(20,120\right) = 20$$

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
		P_1	P_2	P_3	
		$J_1=02$	$J_2=0$	$J_3=04$	
A	$I_1=-11$	$C_{11}=-09$ $X_{11}=150$ $E_{11}=0$	$C_{12}=-06$ $X_{12}=0$ $E_{12}=-05$	$C_{13}=-05$ $X_{13}=0$ $E_{13}=-02$	$a_1=150$
B	$I_2=-07$	$C_{21}=-08$ $X_{21}=0$ $E_{21}=03$	$C_{22}=-07$ $X_{22}=120$ $E_{22}=0$	$C_{23}=-03$ $X_{23}=110$ $E_{23}=0$	$a_2=230$
C	$I_3=-02$	$C_{31}=0$ $X_{31}=20$ $E_{31}=0$	$C_{32}=-02$ $X_{32}=100$ $E_{32}=0$	$C_{33}=-04$ $X_{33}=0$ $E_{33}=06$	$a_3=120$
b_j		$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i=\sum_{j=1}^{3} b_j$

لا تزال هناك قيم سالبة ل E_{ij} مما يعني أن الحل ليس أمثل، نعيد الحساب من جديد وذلك بإختيار الخلية X_{12} ونكون إنطلاقا منها مايسمى بالمسار المغلق وذلك بإضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{12}\rightarrow X_{32}\rightarrow X_{31}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{12}\rightarrow \underset{(-)}{X_{32}}\rightarrow X_{31}\rightarrow \underset{(-)}{X_{11}}\rightarrow X_{12}$$

$$\mathrm{MIN}\left(X_{11},X_{32}\right)\Rightarrow \mathrm{MIN}\left(150,100\right)=100$$

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
		P_1	P_2	P_3	
		$J_1=-10$	$J_2=-07$	$J_3=-03$	
A	$I_1=01$	$C_{11}=-09$ $X_{11}=50$ $E_{11}=0$	$C_{12}=-06$ $X_{12}=100$ $E_{12}=0$	$C_{13}=-05$ $X_{13}=0$ $E_{13}=03$	$a_1=150$
B	$I_2=0$	$C_{21}=-08$ $X_{21}=0$ $E_{21}=-02$	$C_{22}=-07$ $X_{22}=120$ $E_{22}=0$	$C_{23}=-03$ $X_{23}=110$ $E_{23}=0$	$a_2=230$

C	$I_3=10$	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$ $E_{31}=0$	$C_{32}=-02$ $X_{32}=0$ $E_{32}=05$	$C_{33}=-04$ $X_{33}=0$ $E_{33}=11$	$a_3=120$
b_j		$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j$

لا تزال هناك قيم سالبة واحدة ل E_{ij} وهي في الخلية X_{21} مما يعني أن الحل ليس أمثل، نعيد الحساب من جديد وذلك بتكوين مسار مغلق مع إضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{21}\rightarrow X_{11}\rightarrow X_{12}\rightarrow X_{22}\rightarrow X_{21}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{21}\rightarrow \underset{(-)}{X_{11}}\rightarrow X_{12}\rightarrow \underset{(-)}{X_{22}}\rightarrow X_{21}$$

$$MIN\left(X_{11},X_{22}\right)\Rightarrow MIN\left(50,120\right)=50$$

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		**مراكز الإستلام (الطلب)**			a_i
		P_1	P_2	P_3	
		$J_1=-08$	$J_2=-07$	$J_3=-03$	
A	$I_1=01$	$C_{11}=-09$ $X_{11}=0$ $E_{11}=02$	$C_{12}=-06$ $X_{12}=150$ $E_{12}=0$	$C_{13}=-05$ $X_{13}=0$ $E_{13}=03$	$a_1=150$
B	$I_2=0$	$C_{21}=-08$ $X_{21}=50$ $E_{21}=0$	$C_{22}=-07$ $X_{22}=70$ $E_{22}=0$	$C_{23}=-03$ $X_{23}=110$ $E_{23}=0$	$a_2=230$
C	$I_3=08$	$C_{31}=0$ $X_{31}=120$ $E_{31}=0$	$C_{32}=-02$ $X_{32}=0$ $E_{32}=03$	$C_{33}=-04$ $X_{33}=0$ $E_{33}=09$	$a_3=120$
b_j		$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j$

نلاحظ أن جميع قيم E_{ij} موجبة أو معدومة فالحل أمثل.

أما الربح الأعظمي فهو:

$$MAX\left(Z\right)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31}\Rightarrow$$

$$MAX\left(Z\right)=150\times 05+50\times 03+70\times 04+110\times 08+120\times 11=3380um$$

أو بالطريقة المباشرة

$$\overline{C}_{ij}=C_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\Delta E_{ij}\Rightarrow \overline{C}_{ij}=2610+(06)(110)+(03)(20)+(05)(100)+(02)(50)=3380um$$

03-إيجاد الحل الأولي بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي و بطريقة دالة الهدف من نوع تعظيم

طريقة الركن الشمالي الغربي(North West Corner Method)(NWC):في هذه الطريقة نقوم بتوزيع الكميات من مراكز التوزيع إلى مراكز الإستلام بإستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=150$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=20$	$C_{22}=04$ $X_{22}=210$	$C_{23}=08$ $X_{23}=0$	$a_2=230$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=0$	$C_{32}=09$ $X_{32}=10$	$C_{33}=07$ $X_{33}=110$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

وللتاكد من أن الحل الأولي مقبول لابد من تحقيق العلاقة التالية

عدد الخلايا المملوءة=عدد الأعمدة+عدد الأسطر-01

$$K=(m+n-1)\Rightarrow K=03+03-01=05$$

وبالتالي فالحل الأولي مقبول

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{21}=50, X_{22}=210, X_{32}=10, X_{33}=110$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{23}=X_{31}=0$

-حساب الربح الأعظمي

$$MAX(Z)=C_{11}X_{11}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{32}X_{32}+C_{33}X_{33}\Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times 02+20\times 03+210\times 04+10\times 09+110\times 07=2060um$$

04-إيجاد الحل الأمثل بإستخدام إحدى الطرقتين التاليتين:

04-01-طريقة المسار المتعرج (Stepping Stone Method): في هذه الطريقة نتبع نفس خطواتها في حالة تقليل التكاليف،فقط مع تغيير إشارة المسارات المغلقة حيث نأخذ أكبر قيمة موجبة للأرباح ونتوقف عن الحل عندما تصبح جميع المسارات المغلقة ذات إشارة سالبة أو معدومة.

و بما انه يوجد لدينا أربعة متغيرات غير أساسية إذن فعدد المسارات هو أربعة ويمكن توضيحها من خلال الجدول التالي

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	الأرباح غير المباشرة
X_{12}	$X_{12} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{12}$	$05-04+03-02=02$
X_{13}	$X_{13} \to X_{11} \to X_{21} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{33} \to X_{13}$	$06-02+03-04+09-07=05$
X_{23}	$X_{23} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{33} \to X_{23}$	$08-04+09-07=06$
X_{31}	$X_{31} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{31}$	$11-09+04-03=03$

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة موجبة هي الخلية X_{23} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{23} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{33} \to X_{23}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{23} \to \underset{(-)}{X_{22}} \to X_{32} \to \underset{(-)}{X_{33}} \to X_{23}$$

$$\text{MIN}\left(X_{22}, X_{33}\right) \Rightarrow \text{MIN}\left(210,110\right)=110$$

الربح الإضافي الإجمالي هو $110\times(6)=660$ ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=150$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=20$	$C_{22}=04$ $X_{22}=100$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=0$	$C_{32}=09$ $X_{32}=120$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{21}=20, X_{22}=100, X_{23}=110, X_{32}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{31}=X_{33}=0$

أما الربح الكلي للنقل فهو:

$$\text{MAX}\left(Z\right)=C_{11}X_{11}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{32}X_{32} \Rightarrow$$

$$\text{MAX}\left(Z\right)=150\times02+20\times03+100\times04+110\times08+120\times09=2720\text{um}$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	الأرباح غير المباشرة
X_{12}	$X_{12} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{12}$	$05-04+03-02=02$
X_{13}	$X_{13} \to X_{23} \to X_{21} \to X_{11} \to X_{13}$	$06-08+03-02=-01$
X_{31}	$X_{31} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{31}$	$11-09+04-03=03$
X_{33}	$X_{33} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{23} \to X_{33}$	$07-09+04-08=-06$

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة موجبة هي الخلية X_{31} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{31} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{31}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$\underset{}{X_{31}} \to \underset{(-)}{X_{32}} \to X_{22} \to \underset{(-)}{X_{21}} \to X_{31}$$

$$\text{MIN}\left(X_{21}, X_{32}\right) \Rightarrow \text{MIN}\left(20,120\right) = 20$$

الربح الإضافي الإجمالي هو $20\times(3)=60$ ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	**مراكز الإستلام (الطلب)**			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=150$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=04$ $X_{22}=120$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=20$	$C_{32}=09$ $X_{32}=100$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=150, X_{22}=120, X_{23}=110, X_{31}=20, X_{32}=100$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{12}=X_{13}=X_{21}=X_{33}=0$

أما الأرباح الكلية للنقل فهي:

$$\text{MAX}(Z) = C_{11}X_{11} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} + C_{32}X_{32} \Rightarrow$$
$$\text{MAX}(Z) = 150\times02 + 120\times04 + 110\times08 + 20\times11 + 100\times09 = 2780\text{um}$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	الأرباح غير المباشرة
X_{12}	$X_{12} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \to X_{12}$	$05-09+11-02=05$
X_{13}	$X_{13} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \to X_{13}$	$06-08+04-09+11-02=02$
X_{21}	$X_{21} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{21}$	$03-04+09-11=-03$
X_{33}	$X_{33} \to X_{32} \to X_{22} \to X_{23} \to X_{33}$	$07-09+04-08=-06$

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات أعلى مؤشر تحسين بإشارة موجبة هي الخلية X_{12} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{12} \to X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \to X_{12}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{12} \to \underset{(-)}{X_{32}} \to X_{31} \to \underset{(-)}{X_{11}} \to X_{12}$$

$$\text{MIN}\left(X_{11}, X_{32}\right) \Rightarrow \text{MIN}(150,100)=100$$

الربح الإضافي الإجمالي هو $100 \times (5) = 500$ ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=50$	$C_{12}=05$ $X_{12}=100$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$	$C_{22}=04$ $X_{22}=120$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{11}=50, X_{12}=100, X_{22}=120, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{13}=X_{21}=X_{32}=X_{33}=0$

أما الأرباح الكلية للنقل فهي:

$$\text{MAX}(Z) = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} \Rightarrow$$

$$\text{MAX}(Z) = 50 \times 02 + 100 \times 05 + 120 \times 04 + 110 \times 08 + 120 \times 11 = 3280\text{um}$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	الأرباح غير المباشرة
X_{13}	$X_{13} \to X_{12} \to X_{22} \to X_{23} \to X_{13}$	$06-05+04-08=-03$
X_{21}	$X_{21} \to X_{11} \to X_{12} \to X_{22} \to X_{21}$	$03-02+05-04=02$
X_{32}	$X_{32} \to X_{31} \to X_{11} \to X_{12} \to X_{32}$	$09-11+02-05=-05$
X_{33}	$X_{33} \to X_{23} \to X_{22} \to X_{12} \to X_{11} \to X_{31} \to X_{33}$	$07-08+04-05+02-11=-11$

نلاحظ أن الخلية الفارغة ذات الإشارة الموجبة الوحيدة هي الخلية X_{21} ذات المسار المغلق التالي:

$$X_{21} \to X_{11} \to X_{12} \to X_{22} \to X_{21}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$\begin{array}{l} X_{21} \to X_{11} \to X_{12} \to X_{22} \to X_{21} \\ \qquad\quad (-) \qquad\qquad (-) \end{array}$$

$$MIN\left(X_{11}, X_{22}\right) \Rightarrow MIN(50,120)=50$$

الربح الإضافي الإجمالي هو $50\times(2)=100$ ون

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)	مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
	P_1	P_2	P_3	
A	$C_{11}=02$ $X_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=150$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$	$a_1=150$
B	$C_{21}=03$ $X_{21}=50$	$C_{22}=04$ $X_{22}=70$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$	$a_2=230$
C	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$	$a_3=120$
b_j	$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

المتغيرات الأساسية هي $X_{12}=150, X_{21}=50, X_{22}=70, X_{23}=110, X_{31}=120$

المتغيرات غير الأساسية هي $X_{11}=X_{13}=X_{32}=X_{33}=0$

أما الأرباح الكلية للنقل فهي:

$$MAX(Z)=C_{12}X_{12}+C_{21}X_{21}+C_{22}X_{22}+C_{23}X_{23}+C_{31}X_{31} \Rightarrow$$

$$MAX(Z)=150\times05+50\times03+70\times04+110\times08+120\times11=3380um$$

نعيد إختبار الخلايا الفارغة للتأكد من أن الحل المتوصل إليه هو حل أمثل

المتغيرات غير الأساسية	المسار المغلق للمتغير الأساسي	الأرباح غير المباشرة
X_{11}	$X_{11} \to X_{12} \to X_{22} \to X_{21} \to X_{11}$	$02-05+04-03=-02$
X_{13}	$X_{13} \to X_{12} \to X_{22} \to X_{23} \to X_{13}$	$06-05+04-08=-03$
X_{32}	$X_{32} \to X_{31} \to X_{21} \to X_{22} \to X_{32}$	$09-11+03-04=-03$
X_{33}	$X_{33} \to X_{23} \to X_{21} \to X_{31} \to X_{33}$	$07-08+03-11=-09$

نلاحظ من خلال الجدول السابق أن جميع المسارات المغلقة ذات إيرادات مباشرة سالبة أو معدومة إذن فالحل أمثل.

04-02-طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution Method):في هذه الطريقة نستخدم نفس الخطوات المتبعة في حالة التقليل مع بعض اللإختلافات الجوهرية والتي نعرضها كالتالي:

01- نستخرج أولا الحل الأولي (القاعدي) بإحدى الطرق التي سبق شرحها.

02-نستخرج المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

03- نضيف عمود (I_i) وسطر (J_j)

04- نحسب (I_i)و (J_j)إنطلاقا من وضع إما $(I_1=0)$ أو (I_i) و (J_j) الموجودة في السطر او العمود ذو أكبر عدد من الخانات المملوءة مساويا للصفر (0).

05-

06-العلاقة التالية : $I_i+J_j=-C_{ij}$ تخص الخلايا المملوءة فقط، ولحساب (I_i) و (J_j) نضع $(I_1=0)$.

07- يتم حساب القيمة E_{ij} والتي تسمى الإقتصاد وهذا حسب العلاقة التالية: $E_{ij}=I_i+J_j+C_{ij}$

08-إذا كانت قيم كل E_{ij} سالبة أو معدومة فالحل أمثل،أما إذا وجدت قيمة موجبة على الأقل يجب القيم بعملية التحسين،

09-للقيام بعملية التحسين نختار أكبر قيمة موجبة ونكون إنطلاقا منها مايسمى **بالمسار المغلق** وهو عبارة عن شكل ذو مستقيمات ليست مائلة وله زوايا قائمة حيث ينطلق من الخانات ذات أقل قيمة سالبة والتي نضع بها $(+\Delta)$ ويعود إليها،أي نكون مسار مغلق تكون زواياه خانات مملوءة **(متغيرات أساسية)** ونضع بالتناوب $(-\Delta)$ و $(+\Delta)$

10-يتم تحديد قيمة (Δ)من خلال الخانات التي يوجد بها $(-\Delta)$ حيث نأخذ أقل قيمة أي $\Delta=\dfrac{\text{Min } X_{ij}}{(X_{ij}-\Delta_{ij})}$ ، ونعوضها إما بالزيادة أو النقصان.

11-القيم المحصل عليها بعد إدخال قيمة(Δ)توضع في جدول جديد ونقوم بحساب كل من(I_i)و(J_j) الخاصة به ونعيد العمليات السابقة للتأكد من أمثلية الحل إلى غاية الحصول على قيمةE_{ij} سالبة أو معدومة ثم نحسب الارباح.

12-الأرباح الجديدة الناتجة عن عملية التحسين هي نفسها الأرباح السابقة+ مجموع ΔE_{ij} أي

$$\overline{C_{ij}} = C_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \Delta E_{ij}$$

بحيث: $\overline{C_{ij}}$: الأرباح الجديدة.

C_{ij} : الأرباح السابقة.

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
		P_1	P_2	P_3	
		$J_1=-03$	$J_2=-04$	$J_3=-02$	
A	$I_1=01$	$C_{11}=02$ $X_{11}=150$ $E_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$ $E_{12}=02$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$ $E_{13}=05$	$a_1=150$
B	$I_2=0$	$C_{21}=03$ $X_{21}=20$ $E_{21}=0$	$C_{22}=04$ $X_{22}=210$ $E_{22}=0$	$C_{23}=08$ $X_{23}=0$ $E_{23}=06$	$a_2=230$
C	$I_3=-05$	$C_{31}=11$ $X_{31}=0$ $E_{31}=03$	$C_{32}=09$ $X_{32}=10$ $E_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=110$ $E_{33}=0$	$a_3=120$
b_j		$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

بعد تحديد قيم كل من (I_i)و(J_j) نقوم بحساب قيمة E_{ij} الإقتصاد

بعد حساب قيمةE_{ij} نلاحظ أنه توجد أكثر من قيمة موجبة وللقيام بعملية التحسين نختار أكبر قيمة موجبة وهيX_{23} ونكون إنطلاقا منها مايسمى بالمسار المغلق وذلك بإضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{23} \to X_{22} \to X_{32} \to X_{33} \to X_{23}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{23} \to \underset{(-)}{X_{22}} \to X_{32} \to \underset{(-)}{X_{33}} \to X_{23}$$

$$\mathrm{MIN}(X_{22}, X_{33}) \Rightarrow \mathrm{MIN}(210,110) = 110$$

نقوم بتوزيع الخلية الجديدة حسب مسارها الجديد ،أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		P_1 ($J_1=0$)	P_2 ($J_2=-01$)	P_3 ($J_3=-05$)	a_i
		مراكز الإستلام (الطلب)			
A	$I_1=-02$	$C_{11}=02$ $X_{11}=150$ $E_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$ $E_{12}=02$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$ $E_{13}=-01$	$a_1=150$
B	$I_2=-03$	$C_{21}=03$ $X_{21}=20$ $E_{21}=0$	$C_{22}=04$ $X_{22}=100$ $E_{22}=0$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$ $E_{23}=0$	$a_2=230$
C	$I_3=-08$	$C_{31}=11$ $X_{31}=0$ $E_{31}=03$	$C_{32}=09$ $X_{32}=120$ $E_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$ $E_{33}=-06$	$a_3=120$
b_j		$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

لا تزال هناك قيم موجبة ل E_{ij} مما يعني أن الحل ليس أمثل، نعيد الحساب من جديد وذلك بإختيار الخلية X_{31} ونكون إنطلاقا منها مايسمى بالمسار المغلق وذلك بإضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{31}\to X_{32}\to X_{22}\to X_{21}\to X_{31}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{31}\to \underset{(-)}{X_{32}}\to X_{22}\to \underset{(-)}{X_{21}}\to X_{31}$$

$$\text{MIN}\left(X_{21},X_{32}\right)\Rightarrow \text{MIN}(20,120)=20$$

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		P_1 ($J_1=-02$)	P_2 ($J_2=0$)	P_3 ($J_3=-04$)	a_i
		مراكز الإستلام (الطلب)			
A	$I_1=0$	$C_{11}=02$ $X_{11}=150$ $E_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=0$ $E_{12}=05$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$ $E_{13}=02$	$a_1=150$
B	$I_2=-04$	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$ $E_{21}=-03$	$C_{22}=04$ $X_{22}=120$ $E_{22}=0$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$ $E_{23}=0$	$a_2=230$

C	$I_3=-09$	$C_{31}=11$ $X_{31}=20$ $E_{31}=0$	$C_{32}=09$ $X_{32}=100$ $E_{32}=0$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$ $E_{33}=-06$	$a_3=120$
b_j		$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

لا تزال هناك قيم موجبة ل E_{ij} مما يعني أن الحل ليس أمثل، نعيد الحساب من جديد وذلك بإختيار الخلية X_{12} ونكون إنطلاقا منها مايسمى بالمسار المغلق وذلك بإضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{12}\to X_{32}\to X_{31}\to X_{11}\to X_{12}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{12}\to \underset{(-)}{X_{32}}\to X_{31}\to \underset{(-)}{X_{11}}\to X_{12}$$

$$\text{MIN}\left(X_{11},X_{32}\right)\Rightarrow \text{MIN}(150,100)=100$$

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
		P_1	P_2	P_3	
		$J_1=-02$	$J_2=-05$	$J_3=-09$	
A	$I_1=0$	$C_{11}=02$ $X_{11}=50$ $E_{11}=0$	$C_{12}=05$ $X_{12}=100$ $E_{12}=0$	$C_{13}=06$ $X_{13}=0$ $E_{13}=-03$	$a_1=150$
B	$I_2=01$	$C_{21}=03$ $X_{21}=0$ $E_{21}=02$	$C_{22}=04$ $X_{22}=120$ $E_{22}=0$	$C_{23}=08$ $X_{23}=110$ $E_{23}=0$	$a_2=230$
C	$I_3=-09$	$C_{31}=11$ $X_{31}=120$ $E_{31}=0$	$C_{32}=09$ $X_{32}=0$ $E_{32}=-05$	$C_{33}=07$ $X_{33}=0$ $E_{33}=-11$	$a_3=120$
b_j		$b_1=170$	$b_2=220$	$b_3=110$	$\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{3}b_j=500$

لا تزال هناك قيم موجبة واحدة ل E_{ij} وهي في الخلية X_{21} مما يعني أن الحل ليس أمثل، نعيد الحساب من جديد وذلك بتكوين مسار مغلق مع إضافة أو طرح قيمة (Δ)

$$X_{21}\to X_{11}\to X_{12}\to X_{22}\to X_{21}$$

نختار الخلايا التي تحمل إشار سالبة في المسار المغلق ونختار أقل قيمة فيها أي

$$X_{21} \rightarrow \underset{(-)}{X_{11}} \rightarrow X_{12} \rightarrow \underset{(-)}{X_{22}} \rightarrow X_{21}$$

$$MIN(X_{11}, X_{22}) \Rightarrow MIN(50,120) = 50$$

ننتقل إلى الجدول التالي بحسب توزيع مسار الخلية الجديدة أما بقية الخلايا التي لم يطرأ عليها تعديل فتبقى كما هي:

مراكز التوزيع (العرض)		مراكز الإستلام (الطلب)			a_i
		P_1	P_2	P_3	
		$J_1 = -03$	$J_2 = -04$	$J_3 = -08$	
A	$I_1 = -01$	$C_{11} = 02$ $X_{11} = 0$ $E_{11} = -02$	$C_{12} = 05$ $X_{12} = 150$ $E_{12} = 0$	$C_{13} = 06$ $X_{13} = 0$ $E_{13} = -03$	$a_1 = 150$
B	$I_2 = 0$	$C_{21} = 03$ $X_{21} = 50$ $E_{21} = 0$	$C_{22} = 04$ $X_{22} = 70$ $E_{22} = 0$	$C_{23} = 08$ $X_{23} = 110$ $E_{23} = 0$	$a_2 = 230$
C	$I_3 = -08$	$C_{31} = 11$ $X_{31} = 120$ $E_{31} = 0$	$C_{32} = 09$ $X_{32} = 0$ $E_{32} = -03$	$C_{33} = 07$ $X_{33} = 0$ $E_{33} = -09$	$a_3 = 120$
b_j		$b_1 = 170$	$b_2 = 220$	$b_3 = 110$	$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 500$

نلاحظ أن جميع قيم E_{ij} سالبة أو معدومة فالحل أمثل.

أما الربح الأعظمي فهو:

$$MAX(Z) = C_{12}X_{12} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} + C_{31}X_{31} \Rightarrow$$

$$MAX(Z) = 150 \times 05 + 50 \times 03 + 70 \times 04 + 110 \times 08 + 120 \times 11 = 3380um$$

أو بالطريقة المباشرة

$$\overline{C}_{ij} = C_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \Delta E_{ij} \Rightarrow \overline{C}_{ij} = 2610 + (06)(110) + (03)(20) + (05)(100) + (02)(50) = 3380um$$

قائمة المراجع

قائمة المراجع

أولا:الكتب العربية

1. اليمين فالتة،بحوث العمليات (الجزء الأول)،دار إيتراك للطباعة والنشر والتوزيع،مصر–القاهرة،2006
2. إبراهيم موسى عبد الفتاح،مقدمة في بحوث العمليات(نماذج وتطبيقات)،المكتبة العلمية الزقازيق، مصر–القاهرة،2006
3. أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، مجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، مصر–القاهرة ،2009.
4. أحمد أسعد عبد الوهاب الميداني ، مقدمة في بحوث العمليات ، الطبعة الثالثة ، مكتبة ومطبعة الإشعاء الفنية ، الإسكندرية – مصر 1998
5. أحمد عبد إسماعيل الصفار،ماجدة عبد اللطيف التميمي، بحوث العمليات –تطبيقات على الحاسوب– ،الطبعة الأولى،دار المناهج للنشر والتوزيع،عمان–الأردن،2007.
6. أكرم محمد عرفان المهتدي،الأساليب الكمية في إتخاذ القرارات الإدارية، الطبعة الأولى،دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان–الأردن،2004
7. أنغام علي كريف الشهربلي ، تقويم نظم المعلومات باستخدام بحوث العمليات ،الطبعة الأولى ، الوراق للنشر والتوزيع ،عمان الأردن، 2008 .
8. جمال عبد العزيز صبار، بحوث العمليات في المحاسبة، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر،2009.
9. جهاد صباح بني هاني،نازم محمود ملكاوي،فالح عبد القادر الحوري،تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال،الطبعة الأولى،دار الحامد للنشر والتوزيع،عمان–الأردن،2013
10. حامد سعد نور الشمرتي، بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا، مكتبة الذاكرة، الطبعة الأولى، بغداد–العراق،2010
11. حسين ياسين طعمة ،مروان محمد النسور ،إيمان حسين خشوش ،بحوث العمليات نماذج وتطبيقات ، الطبعة الأولى ، دار الصفاء للنشر والتوزيع ، عمان ، الأردن ، 2009.
12. خالد زهدي مصطفى خواجة،مدخل إلى بحوث العمليات والبرمجة الخطية،المكتبة الوطنية، عمان–الأردن،2022
13. خالد موسى ا سان،المدخل إلى البرمجة الخطية وتطبيقاتها في الإدارة،دار جامعة الملك سعود للنشر، الرياض–المملكة العربية السعودية،2019.
14. دلال صادق الجواد،حميد ناصر الفتال،بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان–الأردن،2008.

15. رعد فاضل حسن التميمي،أساليب التحليل الكمي بنظم (WINQSB,SPSS,MINITAB)،الطبعة الأولى،دار الفجر للنشر والتوزيع،القاهرة-مصر،2016
16. رفاه شهاب الحمداني ،أحمد شهاب الحمداني ، بحوث العمليات ، الطبعة الأولى ، دار وائل للنشر ، عمان-الأردن،1999 .
17. رند عمران مصطفى الأسطل،بحوث العمليات والأساليب الكمية في صنع القرارات الإدارية، الطبعة السادسة،جامعة فلسطين كلية إدارة المال و الأعمال،2016.
18. رونق كاظم حسين ،محاضرات في مادة بحوث العمليات ، قسم إدارة الأعمال ، المرحلة الثانية
19. زيد تميم البلخي ، مدخل إلى نظم ضبط ومراقبة المخزون ، النشر العلمي والمطابع ، جامعة الملك سعود ، الرياض ، المملكة العربية السعودية ، 2005 .
20. زيد تميم البلخي،لطفي عبد القادر تاج،البرمجة العددية نماذج وطرق الحل،النشر العلمي والمطابع، الرياض-المملكة العربية السعودية،2011
21. سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا، 2002 .
22. سهيلة عبد الله سعيد،الجديد في الأستاليب الكمية وبحوث العمليات،الطبعة الأولى،دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان-الأردن،2007.
23. صباح الدين بقجة جي ،وائل معلا ،محمد نايفة ،حسام مراد ،محمد نوا العوا ، بحوث العمليات ، الطبعة الأولى ، دمشق ،سوريا ، 1998 .
24. صبحي محمد ، إبراهيم نائب، حسن شرقي ، أنغام باقية ، بحوث العمليات ،منشورات جامعة حلب ، كلية الاقتصاد ، مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية ، حلب-سوريا ، 2008.
25. عبد الجبار خضر بخيت،سعد أحمد عبد الرحمان النعيمي،عباس حسين بطيخ الربيعي،بحوث العمليات-مرتكزات أساسية وقرارات علمية،جامعة بغداد، العراق-بغداد،2015.
26. عبد الحي مرعي،المعلومات المحاسبية وبحوث العمليات في إتخاذ القرارات،الدار الجامعية، بيروت-لبنان،1988.
27. فتحي خليل حمدان ، بحوث العمليات مع تطبيقاتها بإستخدام الحاسوب ، دار وائل للنشر ، الطبعة الأولى ،عمان-الأردن،2010.
28. محمد أحمد الطروانة ، سليمان خالد عبيدات ، مقدمة في بحوث العمليات ، الطبعة الأولى ، دار الميسرة للنشر والتوزيع ،عمان - الأردن ،2009.
29. محمد توفيق ماضي،الأساليب الكمية في مجال الإدارة،دار المعارف،القاهرة-مصر،

30. محمد دباس الحميد،البرمجة الرياضية، منشورات جامعة حلب كلية الهندسة المعلوماتية، سوريا–حلب،2010.

31. محمد راتول ، بحوث العمليات ، الطبعة الثالثة، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2008

32. محمد عبد العال النعيمي ، رفاه شهاب الحمداني ، أحمد شهاب الحمداني ، بحوث العمليات ، الطبعة الثانية ، دار وائل للنشر والتوزيع ، 2011 .

33. محمد محمد كعبور،أساسيات بحوث العمليات،الطبعة الأولى، منشورات كلية المحاسبة غريان،ليبيا،1992.

34. مود العبيدي ، مؤيد عبد الحسن الفضل ، بحوث العمليات وتطبيقاتها، الطبعة الأولى ، الوراق للنشر والتوزيع ،عمان ، الأردن ، 2004 .

35. محمود الفياض ، عيسى قدادة ، بحوث العمليات ،دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، الطبعة العربية ، 2007

36. مفيدة يحياوي،التقنيات الكمية في إدارة الأعمال،دار اليازوري للنشر والتوزيع،عمان–الأردن،2012.

37. منعم زمزير الموسوي ، الأساليب الكمية في الإدارة ، الطبعة الأولى ، دار زهران للطباعة و النشر، عمان – الأردن، 1993 .

38. مؤيد الفضل،المنهج الكمي في إتخاذ القرارات الإدارية المثلى،دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان–الأردن،2010

39. . عبد الحسين الفضل،الأساليب الكمية نماذج خطية وتطبيقاتها في تخطيط الإنتاج،الطبعة الأولى، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع،عمان–الأردن،2004.

40. ميسم أحمد جديد،بحوث العمليات،منشورات جامعة الشام الخاصة كلية الهندسة المعلوماتية، سوريا–حلب،2021.

41. نجم عبود نجم، مدخل إلى الأساليب الكمية –النماذج الاحتمالية– مع تطبيقات باستخدام EXCEL، ،دار الوراق للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى ، عمان–الأردن، 2013

42. وحيد أحمد ماهر،بحوث العمليات والطرق الكمية،منشورات جامعة عين شمس، القاهرة–مصر

ثانيا: الكتب باللغة الأجنبية

01–Michel Nakhla, Jean-Claude Moisdon-Recherche opérationnelle _ Méthodes d'optimisation en gestion-paris;2010

02–Vidal Cohen ,La recherche opérationnelle,presses universiters de France,paris,1995**.**

03–Michel Nedzela,Introduction a la science de la gestion,presses de l'université du Québec,1984

04–Boualem Benmazouz,Recherche opérationnelle de gestion,atlas aditons,1995.