جامعة ابن خلدون تيارت
كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير
قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

محاضـــرات في الإحصـــــاء 02

موجهة لطلبة السنة الأولى ليسانس (LMD) جذع مشترك

من إعـــــداد:
الدكتور: روابـــــة محمـــد

السنة الجامعية: 2026/2025

مقدمة:

يعتبر مقياس الإحصاء 2 من المقاييس الأساسية المكملة لمقياس الإحصاء 1 في التكوين القاعدي لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير. ويهدف هذا المقياس إلى تزويد الطلبة بالأسس النظرية والرياضية لعلم الاحتمالات، باعتباره الإطار المنهجي الضروري لتحليل الظواهر العشوائية ودراسة عدم اليقين في النماذج الاقتصادية والإحصائية.

يرتكز هذا المقياس على تقديم المفاهيم والبنى الرياضية الأساسية التي يقوم عليها حساب الاحتمالات، مع التركيز على الصياغة المنطقية والدقة الرياضية، بما يسمح للطالب بفهم طبيعة الظواهر الاحتمالية وبناء النماذج المناسبة لتحليلها. وقد تم تنظيم محتوى المقياس وفق تسلسل بيداغوجي متدرج، ينتقل من المفاهيم الرياضية التمهيدية إلى النتائج النظرية الأساسية في الاحتمالات.

ينطلق المقياس بمحور **نظرية المجموعات**، الذي يهدف إلى ترسيخ المفاهيم الرمزية والمنطقية الضرورية لصياغة الأحداث والعلاقات فيما بينها. ثم يتناول محور **التجربة والحدث** تعريف التجربة العشوائية، فضاء العينة، والأحداث، باعتبارها الأساس المفاهيمي لحساب الاحتمالات. ويخصّص محور **التحليل التوافقي** لدراسة تقنيات العدّ، لما لها من دور محوري في حساب الاحتمالات في الحالات المنتهية.

بعد ذلك، يتناول المقياس محور **الاحتمالات**، حيث يتم من خلاله عرض القواعد الأساسية لحساب الاحتمال، ومفهوم الاحتمال الشرطي، والاستقلال، وصيغ الاحتمالات المختلفة. ثم ينتقل إلى دراسة **المتغيرات العشوائية**، مع التمييز بين المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة، وتقديم توزيعاتها الاحتمالية.

كما يركّز المقياس على محور **التوقع الرياضي والتباين** باعتبارهما من أهم الخصائص العددية للمتغيرات العشوائية، لما لهما من دور أساسي في التحليل الإحصائي والنمذجة. ويُستكمل ذلك بمحور **العزوم والدالة المولدة للعزوم**، التي تُستعمل لدراسة خصائص التوزيعات الاحتمالية وتحليلها تحليلاً أعمق.

ويُختتم المقياس بمحور **نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة**، حيث تشكّلان الأساس النظري للإحصاء الاستدلالي في المقاييس اللاحقة.

وقد تم تدعيم محتوى هذا المقياس بأمثلة وتمارين تطبيقية، تهدف إلى تعزيز الفهم النظري وتطوير القدرات التحليلية والمنطقية لدى الطلبة، بما ينسجم مع متطلبات نظام LMD ويُهيّئهم لدراسة المقاييس الإحصائية المتقدمة خلال مسارهم الجامعي.

المحور الأول

نظريـــة المجموعـــــات

1. المحور الأول: نظرية المجموعات

بدأ تطور نظرية الاحتمالات في القرن السابع عشر من خلال ألعاب الرهان والمقامرة والتي تعتمد نتائجها على عنصر المصادفة، إذ لجأ الكثير من المقامرين إلى علماء الرياضيات من أمثال B.Pascal، J.Bernoulli، De Moiver وغيرهم من أجل تحسين فرصهم في الحصول على الربح. ولكن الفهم التجريبي أو الاحصائي للاحتمال تبلور في القرن الماضي من خلال أعمال R.A.Fisher و R.Von.Mises حيث أوجد هذا الأخير فكرة فضاء العينة Sample space والتي ساعدت على وضع إطار رياضي للاحتمال، اتسع بعدها تطبيق القواعد الاحتمالية في تحليل ومعالجة العديد من المشاكل التي تكتنفها ظروف عدم التأكد في مختلف المجالات الاقتصادية والإدارية والصحية وغيرها. لكننا قبل الخوض في مواضيع الاحتمالات نذكر أولا ببعض المواضيع الأساسية والهامة التي نحتاجها في علم الاحتمالات، وأحد أهم هذه المواضيع نجد نظرية المجموعات.

1.1. تعريف المجموعة: هي تجمع من أشياء محددة تسمى 'عناصر'. وهي كائن رياضي يعبر عنها بالحروف الكبيرة A، B، C، ... ويعبر عن عناصرها بالحروف الصغيرة a، b، c، ....

2.1. العلاقة بين العنصر والمجموعة: نحدد العلاقة بين العنصر والمجموعة باستخدام أحد الرمزين (∈) ينتمي أو (∉) لا ينتمي. فمثلا: نقول العنصرa ينتمي إلى المجموعة A ونكتب: $a \in A$. أو العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ونكتب: $a \notin A$.

3.1. طرق كتابة المجموعة: يمكن تمثيل المجموعة بطرق مختلفة. ومن الطرق الشائعة المستخدمة لتمثيل المجموعات نجد:

أ- طريقة القائمة: في هذه الطريقة نذكر جميع عناصر المجموعة مع وضع فاصلة بين كل عنصر والعنصر الذي يليه ولا نكرر العنصر أكثر من مرة واحدة، نضع هذه العناصر بين قوسين من الشكل { }.

مثال 1.1:

1. لتكن Q تمثل مجموعة الأعداد الفردية الأقل من 10، إذن: $Q = \{1,3,5,7,9\}$.
2. لتكن R تمثل مجموعة الأشهر الأربعة الأولى من السنة، إذن: $R = \left\{\text{جانفي, فيفري, مارس, أفريل}\right\}$.

مثال 2.1: أكتب عناصر المجموعة التالية بطريقة القائمة:" مجموعة أرقام العدد 57547".

نرمز لهذه المجموعة بالرمز A عندها:

$$A = \{5,7,4\}$$

مثال 3.1: أكتب عناصر المجموعة التالية بطريقة القائمة:" مجموعة أحرف كلمة sets".

$$A = \{s, e, t\}$$

ب- طريقة القاعدة (طريقة الخاصية المميزة): في هذه الطريقة نذكر الخاصية التي تميز عناصر المجموعة كما يلي:

$$A = \left\{x: \text{نضع هنا الخاصية المميزة لعناصر المجموعة}\right\}$$

مثال 4.1: أكتب مجموعة أرقام العدد 57547 بطريقة الخاصية المميزة.

نرمز للمجموعة بالرمز A عندها:

$$A = \left\{x: \text{57547 رقم من أرقام العدد } x\right\}$$

مثال 5.1: أكتب مجموعة أحرف كلمة sets بطريقة الخاصية المميزة.

$$A = \left\{x: \text{حيث } x \text{ حرف من أحرف كلمة } sets\right\}$$

4.1. أنواع المجموعات:

1.4.1. المجموعة المنتهية: نقول عن مجموعة أنها منتهية إذا كان عدد عناصرها منتهي.

مثال 6.1: المجموعات التالية هي مجموعات منتهية:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} = \{2,4,6,8,10\} \\ &\mathrm{B} = \{1,3,5,7, \dots\dots\dots ,99\} \\ &\mathrm{C} = \{x: x \in N, x < 5\} \end{aligned}$$

2.4.1. المجموعة غير المنتهية: نقول عن مجموعة أنها غير منتهية إذا كان عدد عناصرها غير منتهي.

مثال 7.1: المجموعات التالية هي مجموعات غير منتهية:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P} = \{1,2,3, \dots\dots\dots\} \\ &\mathrm{Q} = \{x: x \in N, x > 0\} \\ &\mathrm{R} = \{x: \text{ عدد أولي } x\} \end{aligned}$$

3.4.1. المجموعة الخالية: هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ونرمز لها بأحد الرمزين ϕ، { }.

مثال 8.1: المجموعات التالية هي مجموعات خالية:

$$\phi = \{x: \ 4 < x < 5 \text{ عدد صحيح و } x\}$$

$$\phi = \{x: \ x < 0 \text{ عدد صحيح موجب و } x\}$$

من الخطأ الشائع التعبير عن المجموعة الخالية بهذا الرمز $\{\phi\}$، لأن المجموعة الخالية ϕ لا تحوي أي عنصر، أما المجموعة $\{\phi\}$ فهي مجموعة غير خالية تحوي عنصر واحد هو المجموعة الخالية.

4.4.1. المجموعة الجزئية: نقول عن المجموعة B أنها مجموعة جزئية من المجموعة A إذا وفقط إذا كان كل عنصر من المجموعة B هو عنصر من المجموعة A ونستخدم لذلك الرمز ⊆ ونكتب: $B \subseteq A$. وإذا وجد عنصر من B لا ينتمي إلى A عندها لا تكون B مجموعة جزئية ونكتب: $B \nsubseteq A$.

مثال 9.1:

1. إذا كان $\mathrm{A} = \{2,3,4\}$ و $\mathrm{B} = \{1,2,3,4,\}$ من الواضح: $x \in A \Rightarrow x \in B$ وبهذا: $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.

2. إذا كان $K = \{5,6,7\}$ فإن المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هي: $\{5\}$، $\{6\}$، $\{7\}$، $\{5,6\}$، $\{6,7\}$، $\{5,7\}$، $\{5,6,7\}$ و ϕ.

ملاحظات:

1. كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها أي $B \subseteq B$.
2. المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من كل مجموعة.
3. عدد المجموعات الجزئية لمجموعة تحتوي على n عنصر هو 2^n.

5.4.1. تساوي مجموعتين: نقول عن المجموعتين A و B أنهما متساوتان إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر أي كل عنصر في المجموعة A هو عنصر في المجموعة B وكل عنصر في المجموعة Bهو عنصر في المجموعة A والرمز المستخدم للدلالة على تساوي مجموعتين هو "="، وبهذا:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

مثال 10.1:

1. إذا كان $\mathrm{A} = \{2,3,4,5\}$ و $\mathrm{B} = \{5,4,3,2\}$ فإن: $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.
2. إذا كان $\mathrm{P} = \{a, b, c\}$ و $\mathrm{Q} = \{a, a, b, b, b, c, c\}$ فإن $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

ملاحظة: ترتيب العناصر أو تكرارها لا يغير من طبيعة المجموعة.

6.4.1. مجموعة المجموعات الجزئية: لتكن A مجموعة و $\mathcal{P}(A)$ مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة A أو هي عائلة المجموعات الجزئية من A.

ملاحظات:

- المجموعة الخالية والمجموعة نفسها هما عنصران في مجموعة المجموعات الجزئية.
- إذا كانت A مجموعة منتهية فإن $\mathcal{P}(A)$ منتهية.
- إذا كانت A مجموعة غير منتهية فإن $\mathcal{P}(A)$ غير منتهية.

مثال 11.1: لتكن المجموعة $A = \{a, b, c\}$. والمطلوب إيجاد مجموعة المجموعات الجزئية أي $\mathcal{P}(A)$.

نستطيع تشكيل المجموعات الجزئية التالية من المجموعة A:

$$\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

ونكتب:

$$\mathcal{P}(A) = \left\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\right\}$$

7.4.1. المجموعة الكلية: هي مجموعة كل العناصر التي تتصف بنفس الصفة ونرمز لها بالرمز S أو Ω.

مثال 12.1: لتكن المجموعات التالية:

$A = \{a, b, c\}$، $\mathrm{B} = \{b, c, d, e\}$، $\mathrm{C} = \{d, e, f, g, h\}$ و $\mathrm{S} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

من الواضح أن المجموعات A، B و C هي مجموعات جزئية من المجموعة S، إذن المجموعة S هي المجموعة الكلية للمجموعات A، B، C.

5.1. أصلي مجموعة: إذا كانت A مجموعة تحتوي على n عنصرا مختلفا حيث n عدد صحيح غير سالب نقول في هذه الحالة أن A مجموعة منتهية وأن أصلي هذه المجموعة يساوي n (أي عدد عناصر هذه المجموعة n) ونرمز لأصلي المجموعة A بالرمز $|A|$ أو $card(A)$.

مثال 13.1:

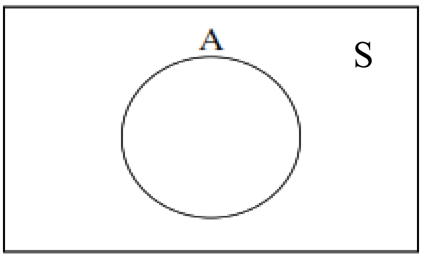
1. إذا كانت $A = \{a, e, i, o, u\}$ فإن: $|A| = 5$.
2. إذا كان $B = \{x: x \in N, x < 7\}$ فإن : $B = \{1,2,3,4,5,6\}$ وبهذا: $|B| = 6$.
3. إذا كانت C تمثل مجموعة الأحرف المشكلة لكلمة "ARITHMETIC" فإن: $C = \{A, R, I, T, H, M, E, C\}$ وبهذا: $|C| = 8$.

بعض النتائج المهمة حول أصلي مجموعة (عدد عناصر مجموعة):

إذا كانت A، B و C ثلاث مجموعات و S تمثل المجموعة الكلية، فإن:

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B|$
- $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$
- $|A' \cup B'| = |(A \cap B)'| = |S| - |A \cap B|$
- $|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |S| - |A \cup B|$
- $|A'| = |S| - |A|$
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$
- $|A \cap B \cap C'| = |A \cap B| - |A \cap B \cap C|$
- $|A \cap B' \cap C'| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- $|A' \cap B' \cap C'| = |S| - |A \cup B \cup C|$

6.1. مخطط Venn: تم تقديم هذا المخطط من طرف عالم المنطق الإنجليزي John Venn، وهو تمثيل رسومي للمجموعات الرياضية أو المنطقية باستخدام دوائر أو منحنيات مغلقة داخل مستطيل يمثل المجموعة الكلية. كما هو موضح في الشكل الموالي:

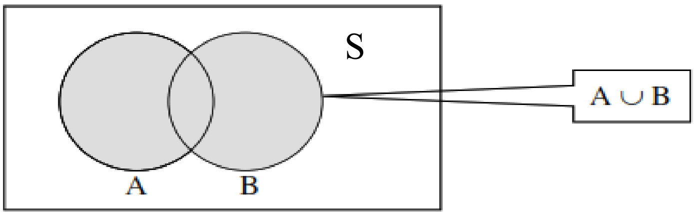


7.1. العمليات على المجموعات:

1.7.1. اتحاد المجموعات: لتكن A وB مجموعتان، اتحاد المجموعتان A وB الذي نرمز له بالرمز $A \cup B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو المجموعة B ونكتب:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

المساحة المضللة في الشكل أدناه تمثل المجموعة $A \cup B$:



مثال 14.1:

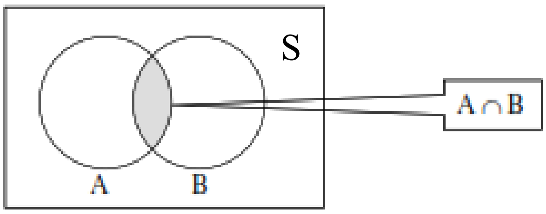
1. إذا كانت $A = \{2,4,6,8\}$ و $B = \{4,6,7,9\}$ فإن: $A \cup B = \{2,4,6,7,8,9\}$.
2. إذا كانت $A = \{a, b\}$، $B = \{b, c, d\}$ و $C = \{c, d, e, f\}$ فإن: $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f\}$.

ملاحظة: إذا كان $A \subset B$ فإن $A \cup B = B$.

2.7.1. تقاطع المجموعات: لتكن A وB مجموعتان، إن تقاطع المجموعتان A وB الذي نرمز له بالرمز $A \cap B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A والمجموعة B معا ونكتب:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$$

المساحة المضللة في الشكل أدناه تمثل المجموعة $A \cap B$:



مثال 12.1:

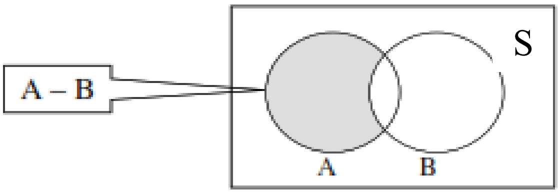
1. إذا كانت $A = \{5,6,7,8\}$ و $B = \{7,8,9,10\}$ فإن: $A \cap B = \{7,8\}$.
2. إذا كانت $A = \{a, b, c\}$، $B = \{b, c, d\}$ و $C = \{c, d, e\}$ فإن: $A \cap B \cap C = \{c\}$.

ملاحظة: إذا كان $A \subset B$ فإن $A \cap B = A$.

3.7.1. فرق المجموعات: لتكن A وB مجموعتان، إن فرق المجموعتان A وB الذي نرمز له بالرمز $A - B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B ونكتب:

$$A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

المساحة المضللة في الشكل أدناه تمثل المجموعة $A - B$:



مثال 1.16:

1. إذا كانت $A = \{m, n, o, p\}$ و $B = \{o, p, q, r\}$ فإن: $A - B = \{m, n\}$ و $B - A = \{q, r\}$.
2. إذا كانت $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ و $B = \{2,4,6,8\}$ فإن: $A - B = \{1,3,5,7\}$ و $B - A = \Phi$.

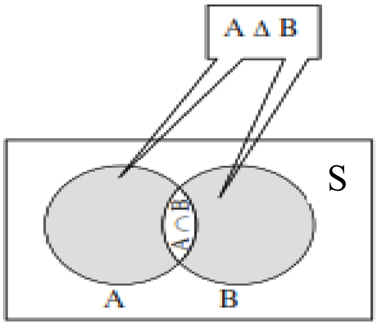
ملاحظات:

1. $A - B \neq B - A$.
2. إذا كان $B \subset A$ فإن $B - A = \Phi$.

4.7.1. الفرق التناظري: هو المجموعة الناتجة من اتحاد المجموعتين $A - B$ و $B - A$ ونرمز له بالرمز Δ ونكتب:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{x : x \in A \text{ or } x \in B, x \notin A \cap B\}$$

المساحة المضللة في الشكل أدناه تمثل المجموعة $A\Delta B$:



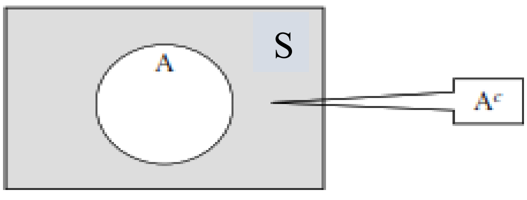
مثال 17.1:

1. إذا كانت $A = \{2,4,5,6,7,9\}$ و $B = \{2,3,4,8,9,10\}$ فإن: $A - B = \{5,6,7\}$ و $B - A = \{3,8,10\}$، وبهذا: $A\Delta B = \{3,5,6,7,8,10\}$.

5.7.1. متمم مجموعة: لتكن S هي المجموعة الكلية، إن متمم المجموعة A والذي نرمز له بأحد الرموز التالية: A^c، $\bar{A}$ ، A' هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى S ولا تنتمي إلى A ونكتب:

$$A^c = \{x : x \in S, x \notin A\}$$

المساحة المضللة في الشكل أدناه تمثل المجموعة A^c:



مثال 18.1: إذا كانت $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ و $A = \{2,4,6\}$ فإن: $A^c = \{1,3,5,7\}$.

6.7.1. الجداء الديكارتي للمجموعات: لتكن A و B مجموعتان، نعرف الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B ونرمز له $A \times B$ ، على أنه مجموعة الأزواج المرتبة (a, b) بحيث يكون $a \in A$ و $b \in B$، ونعبر عنه كما يلي:

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \; and \; b \in B\}$$

مثال 19.1: لتكن $A = \{a, b\}$ و$B = \{1,2\}$. المطلوب إيجاد $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

ملاحظة 01: إذا كانت $A = \phi$، $B = \{1,2\}$ فإن $A \times B = \phi$ لأنه لا توجد أزواج مرتبة حدها الأول من A لأن A خالية وعليه تكون المجموعة $A \times B$ غير خالية إذا وفقط إذا كانت المجموعتان A و B غير خاليتين معا.

ملاحظة 02: نقول عن الزوجين (a, b) و (a_1, b_1) أنهما متساويان إذا كان $a = a_1$ و$b = b_1$.

وعليه يجب أن نميز بين الزوج المرتب (a, b) والمجموعة المؤلفة من العنصرين a و b التالية: $\{a, b\}$.

إذا كانت $A \neq B$ فإن:

$$A \times B \neq B \times A$$

الجداء الديكارتي لعدد من المجموعات: لتكن لدينا المجموعات A_1، A_2، A_3، ...، A_n فإن:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in A_i\}$$

ملاحظة03: إذا كانت كل المجموعات A_i في الجداء الديكارتي هي نفس المجموعة A فإننا نستخدم:

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A$$

مثال 20.1: لتكن $A = \{a, b, c\}$، والمطلوب إيجاد: A^2، A^3.

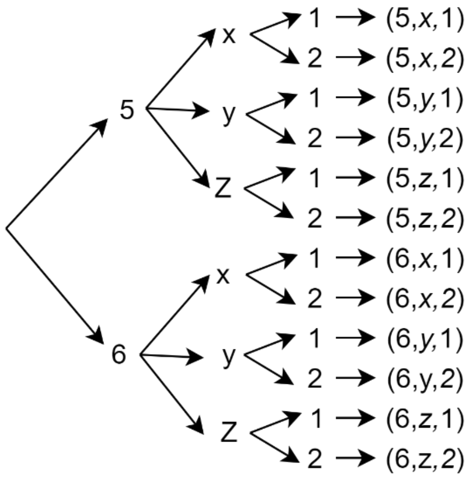
$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$\begin{aligned} A^3 = \{&(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), (a, b, b), (a, b, c), (a, c, a), (a, c, b), (a, c, c), \\ &(b, a, a), (b, a, b), (b, a, c), (b, b, a), (b, b, b), (b, b, c), (b, c, a), (b, c, b), (b, c, c), \\ &(c, a, a), (c, a, b), (c, a, c), (c, b, a), (c, b, b), (c, b, c), (c, c, a), (c, c, b), (c, c, c)\}. \end{aligned}$$

مثال 21.1: لتكن $A = \{5,6\}$، $B = \{x, y, z\}$ ، $C = \{1,2\}$.والمطلوب إيجاد الجداء الديكارتي: $A \times B \times C$.

الجداء الديكارتي: $A \times B \times C$ يتكون من الثلاثيات المرتبة (a, b, c) حيث: $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$.

يمكن الحصول على $A \times B \times C$ بشكل منظم باستخدام المخطط الشجري:



8.1. تعميم الاتحاد والتقاطع: نفرض أن A_1، A_2، A_3، ...، A_n هي مجموعات عددها n، نعبر عن اتحاد هذه المجموعات بالرمز:

$$A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$$

ونعبر عن تقاطع هذه المجموعات بالرمز:

$$A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

كما يمكن توسيع مفهوم الاتحاد والتقاطع لعدد غير منته من المجموعات ونستخدم:

$$A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

9.1. تجزئة مجموعة: لتكن A مجموعة، نقول عن العائلة $(E_i)_{i=1,n}$ من المجموعات الجزئية من A بأنها تشكل تجزئة لـ A إذا وفقط إذا تحقق:

1. (E_i) ليست مجموعة خالية مهما يكن $i \in \{1,2,\dots,n\}$.
2. $\cup_{i=1}^{n} E_i = A$
3. $E_i \cap E_j = \phi, \forall i \neq j, i,j \in \{1,2,\dots,n\}$

مثال 22.1: نعتبر المجموعة $A = \{1,2,3,4,5\}$ ولتكن $E_1 = \{1,3\}$، $E_2 = \{2\}$ و $E_3 = \{4,5\}$ ومنه المجموعات E_1، E_2، E_3 تشكل تجزئة للمجموعة A.

10.1. قوانين نظرية المجموعات:

يمكن اشتقاق قوانين المجموعات الأساسية التالية:

1. التبديلية:

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

البرهان:

أ. إثبات أن $\boldsymbol{A \cup B = B \cup A}$:

لبرهان هذه العلاقة نبين أن $A \cup B$ هي مجموعة جزئية من $B \cup A$، وأيضا نبين أن $B \cup A$ هي مجموعة جزئية من $A \cup B$، أي:

$$A \cup B \subseteq B \cup A \quad \text{and} \quad B \cup A \subseteq A \cup B$$

نبين في البداية أن $A \cup B \subseteq B \cup A$، ليكن x عنصر من المجموعة $A \cup B$، باستخدام تعريف اتحاد مجموعتين نحصل على:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \quad &\Rightarrow x \in A \text{ or } x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \text{ or } x \in A \\ &\Rightarrow x \in B \cup A \end{aligned}$$

وبهذا:

$$A \cup B \subseteq B \cup A \qquad (1)$$

الآن نبين أن $B \cup A \subseteq A \cup B$، ليكن y عنصر من المجموعة $B \cup A$، باستخدام تعريف اتحاد مجموعتين نحصل على:

$$\begin{aligned} y \in B \cup A \quad &\Rightarrow y \in B \text{ or } y \in A \\ &\Rightarrow x \in A \text{ or } y \in B \\ &\Rightarrow y \in A \cup B \end{aligned}$$

وبهذا:

$$B \cup A \subseteq A \cup B \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$A \cup B = B \cup A$$

ب. إثبات أن $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$:

نبين في البداية أن $A \cap B \subseteq B \cap A$، ليكن x عنصر من المجموعة $A \cap B$، باستخدام تعريف تقاطع مجموعتين نحصل على:

$$\begin{aligned} x \in A \cap B \quad &\Rightarrow x \in A \text{ and } x \in B \\ &\Rightarrow x \in B \text{ and } x \in A \\ &\Rightarrow x \in B \cap A \end{aligned}$$

وبهذا:

$$B \cap A \subseteq A \cap B \qquad (1)$$

الآن نبين أن $B \cap A \subseteq A \cap B$، ليكن y عنصر من المجموعة $B \cap A$، باستخدام تعريف تقاطع مجموعتين نحصل على:

$$\begin{aligned} y \in B \cap A \quad &\Rightarrow y \in B \text{ and } y \in A \\ &\Rightarrow y \in A \text{ and } y \in B \\ &\Rightarrow y \in A \cap B \end{aligned}$$

وبهذا:

$$B \cap A \subseteq A \cap B \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$A \cap B = B \cap A$$

2. التجميعية:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

البرهان:

أ. إثبات أن $\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$:

ليكن x عنصر من $A \cup (B \cup C)$، وبهذا:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \; or \; x \in (B \cup C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ or } x \in B \text{ or } x \in C \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ or } x \in B) \text{ or } x \in C \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ or } x \in C \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C \end{aligned}$$

ومنه:

$$A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C \qquad (1)$$

أيضا: ليكن y عنصر من $(A \cup B) \cup C$، وبهذا:

$$\begin{aligned} y \in (A \cup B) \cup C &\Rightarrow y \in (A \cup B) \text{ or } y \in C \\ &\Rightarrow y \in A \text{ or } y \in B \text{ or } y \in C \\ &\Rightarrow y \in A \text{ or } (y \in B \text{ or } y \in C) \\ &\Rightarrow y \in A \text{ or } y \in (B \cup C) \\ &\Rightarrow y \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

ومنه:

$$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

ب. إثبات أن $\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$:

ليكن x عنصر من $A \cap (B \cap C)$، وبهذا:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\Rightarrow x \in A \text{ and } x \in (B \cap C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ and } x \in B \text{ and } x \in C \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ and } x \in B) \text{ and } x \in C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ and } x \in C \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

ومنه:

$$A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C \qquad (1)$$

أيضا: ليكن y عنصر من $(A \cap B) \cap C$ ، وبهذا:

$$\begin{aligned} y \in (A \cap B) \cap C &\Rightarrow y \in (A \cap B) \text{ and } y \in C \\ &\Rightarrow y \in A \text{ and } y \in B \text{ and } y \in C \\ &\Rightarrow y \in A \text{ and } (y \in B \text{ and } y \in C) \\ &\Rightarrow y \in A \text{ and } y \in (B \cap C) \\ &\Rightarrow y \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

ومنه:

$$(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. التوزيع:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

البرهان:

أ. إثبات أن $\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$:

ليكن x عنصر من $A \cup (B \cap C)$، وبهذا:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Rightarrow x \in A \text{ or } x \in (B \cap C) \\ &\Rightarrow x \in A \text{ or } (x \in B \text{ and } x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ or } x \in B) \text{ and } (x \in A \text{ or } x \in C) \\ &\Rightarrow (x \in (A \cup B) \text{ and } x \in (A \cup C) \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

ومنه:

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad (1)$$

أيضا: ليكن y عنصر من $(A \cup B) \cap (A \cup C)$، وبهذا:

$$\begin{aligned} y \in (A \cup B) \cap (A \cup C) &\Rightarrow y \in (A \cup B) \text{ and } y \in (A \cup C) \\ &\Rightarrow (y \in A \text{ or } y \in B) \text{ and } (y \in A \text{ or } y \in C) \\ &\Rightarrow y \in A \text{ or } (y \in B \text{ and } y \in C) \\ &\Rightarrow y \in A \text{ or } y \in (B \cap C) \\ &\Rightarrow y \in A \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

ومنه:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ب. إثبات أن $\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$:

ليكن x عنصر من $A \cap (B \cup C)$، وبهذا:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Rightarrow x \in A \text{ and } x \in (B \cup C)\\
&\Rightarrow x \in A \text{ and } (x \in B \text{ or } x \in C)\\
&\Rightarrow (x \in A \text{ and } x \in B) \text{ or } (x \in A \text{ and } x \in C)\\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \text{ or } x \in (A \cap C)\\
&\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad (1)$$

أيضا: ليكن y عنصر من $(A \cap B) \cup (A \cap C)$، وبهذا:

$$
\begin{aligned}
y \in (A \cap B) \cup (A \cap C) &\Rightarrow y \in (A \cap B) \text{ or } y \in (A \cap C)\\
&\Rightarrow (y \in A \text{ and } y \in B) \text{ or } (y \in A \text{ and } y \in C)\\
&\Rightarrow y \in A \text{ and } (y \in B \text{ or } y \in C)\\
&\Rightarrow y \in A \text{ and } y \in (B \cup C)\\
&\Rightarrow y \in A \cap (B \cup C)
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. المتممات:

$$
\begin{aligned}
&(A')' = A\\
&A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'\\
&A \cup A' = S \text{ and } A \cap A' = \phi\\
&(S)' = \phi \text{ and } (\phi)' = S
\end{aligned}
$$

5. قانون دي مورقان:

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)' &= A' \cap B'\\
(A \cap B)' &= A' \cup B'
\end{aligned}
$$

البرهان:

أ. إثبات أن $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \cap \mathbf{B}'$:

ليكن x عنصر من $(A \cup B)'$، وبهذا:

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin (A \cup B)\\
&\Rightarrow x \notin A \text{ and } x \notin B\\
&\Rightarrow x \in A' \text{ and } x \in B'\\
&\Rightarrow x \in (A' \cap B')
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$(A \cup B)' \subseteq A' \cap B' \qquad (1)$$

أيضا: ليكن y عنصر من $A' \cap B'$، وبهذا:

$$
\begin{aligned}
y \in A' \cap B' &\Rightarrow y \in A' \text{ and } y \in B'\\
&\Rightarrow y \notin A \text{ and } y \notin B\\
&\Rightarrow y \notin (A \cup B)\\
&\Rightarrow y \in (A \cup B)'
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$A' \cap B' \subseteq (A \cup B)' \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

ب. إثبات أن $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})' = \boldsymbol{A}' \cup \mathbf{B}'$:

ليكن x عنصر من $(A \cap B)'$، وبهذا:

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)' &\Rightarrow x \notin (A \cap B) \\ &\Rightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \text{ or } x \in B' \\ &\Rightarrow x \in (A' \cup B') \end{aligned}$$

ومنه:

$$(A \cap B)' \subseteq A' \cup B' \qquad (1)$$

أيضا: ليكن y عنصر من $A' \cup B'$، وبهذا:

$$\begin{aligned} y \in A' \cup B' &\Rightarrow y \in A' \text{ or } y \in B' \\ &\Rightarrow y \notin A \text{ or } y \notin B \\ &\Rightarrow y \notin (A \cap B) \\ &\Rightarrow y \in (A \cap B)' \end{aligned}$$

ومنه:

$$A' \cup B' \subseteq (A \cap B)' \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

المحور الثاني

التجربـــة والحـــــدث

2. المحور الثاني: التجربة والحدث

1.2. التجربة العشوائية Random Expriment: نسمي تجربة كل عملية نتحصل من خلالها على قياس أو ملاحظة أو تسجيل ما عن طريق هذه العملية. وتعرف التجربة العشوائية على أنها أي عملية أو إجراء يمكن تكراره تحت نفس الظروف، ولكن نتيجته غير مؤكدة أو محددة مسبقًا. بعبارة أخرى، هي تجربة يمكن أن تؤدي إلى مجموعة من النتائج المحتملة، ولكننا لا نعرف بالتحديد أي نتيجة ستحدث.

2.2. فضاء العينة Sample Space: فضاء العينة لتجربة عشوائية ما هو مجموعة النتائج الممكنة لتلك التجربة، ويرمز عادة لفضاء العينة بالرمز S أو Ω. وكل عنصر من عناصر فضاء العينة يسمى نقطة عينة (Sample point).

3.2. الحادث العشوائي: نسمي حادث عشوائي مرافق لتجربة عشوائية كل مجموعة جزئية من فضاء العينة. بحيث يمكن أن يحتوي الحادث على نتيجة واحدة أو أكثر.

مثال 1.2: نعتبر تجربة رمي قطعة نقود مرة واحدة، فضاء العينة يتكون من نقطتين (نتيجتين) هما "heads (H)" و "tails" (T) وبهذا $S = \{H, T\}$.

في هذه التجربة نستطيع معرفه كل النتائج الممكنة لها، لكن لا نستطيع التنبؤ بالنتيجة التي سوف تحصل، أي لا نستطيع أن نجزم بأننا نحصل على النتيجة (H) أو على النتيجة (T)، لذلك سميت هذه التجربة بالتجربة العشوائية.

مثال 2.2: لنفترض أن تجربة تتم في مرحلتين، في المرحلة الأولى نرمي قطعة نقدية، وفي المرحلة الثانية إذا كانت نتيجة المرحلة الأولى "Tail" نرمي قطعة نرد، أما إذا كانت نتيجة المرحلة الأولى "heads" نرمي قطعة نقدية مرة أخرى. فضاء العينة في هذه التجربة هو $S = \{T1, T2, T3, T4, T5, T6, HT, HH\}$. من خلال هذه التجربة حادث الحصول على "Head" في المرحلة الأولى من التجربة هو $E = \{HT, HH\}$، وحادث الحصول على عدد فردي عند رمي قطعة النرد هو$F = \{T1, T3, T5\}$.

مثال 3.2: نعتبر تجربة قياس مدة حياة مصباح كهربائي، في هذه التجربة أي عدد حقيقي موجب يمكن اعتباره كمدة حياة للمصباح الكهربائي (بالساعات). فضاء العينة هو $S = \{x: x \geq 0\}$. في هذه التجربة الحادث المعرف بـ $E = \{x: x \geq 100\}$ هو حادث "مدة حياة المصباح الكهربائي على الأقل تكون 100 ساعة". و$F = \{x: x \leq 1000\}$ هو حادث " مدة حياة المصباح تكون أقل من 1000 ساعة"، و $G = \{716{,}4\}$ هو حادث "مدة حياة المصباح الكهربائي تكون 716.4 ساعة بالضبط".

ملاحظة 01: نعتبر تجربة عشوائية لها فضاء عينة S و E حادث، نقول عن الحادث E أنه قد وقع أو تحقق، إذا كانت نتيجة التجربة العشوائية (نقطة العينة) هي أحد عناصر الحادث E. وكمثال على هذا نعتبر تجربة رمي قطعة نرد $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ و E حادث الحصول على عدد فردي أي $E=\{1,3,5\}$. من خلال هذه التجربة العشوائية يقع الحادث E إذا كانت نتيجة التجربة أحد عناصر E.

في نظرية الاحتمالات العلاقة بين مختلف الحوادث لتجربة عشوائية تلعب دورا مهما، وفيما يلي مجموعة من التعاريف الخاصة بالعلاقات بين الحوادث:

التساوي Equality: نقول عن حادثين E و F أنهما متساويين ونكتب: $E=F$ إذا كان تحقق الحادث E يستلزم تحقق الحادث F ، والعكس صحيح، أي: $E \subseteq F$ و $F \subseteq E$.

التقاطع Intersection: نقول عن حادث أنه تقاطع حادثين E و F إذا تحقق الحادثان E و F في آن واحد، وبلغة نظرية المجموعات يرمز لهذا الحادث بـ EF أو $E \cap F$ لأنه المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين E و F.

الإتحاد Union: نقول عن حادث أنه اتحاد حادثين E و F إذا تحقق حادث واحد على الأقل من الحادثين E و F، ويرمز لهذا الحادث بـ $E \cup F$ لأنه المجموعة التي تحتوي على عناصر E و F أو كليهما.

المتمم Complement: نقول عن حادث أنه متمم الحادث E بالنسبة للمجموعة الأساسية S إذا تحقق فقط عندما لا يتحقق الحادث E ، ويرمز لهذا الحادث بـ E^c أو $\bar{E}$ لأنه المجموعة التي تحتوي على عناصر S والتي لا تنتمي إلى E.

الفرق Difference: نقول عن حادث أنه الفرق بين حادثين E و F إذا تحقق الحادث E ولكن لا يتحقق الحادث F ، ويرمز لهذا الحادث بـ $E-F$ لأنه المجموعة التي تحتوي على عناصر E والتي لا تنتمي إلى F.

الحادث الأكيد Sure Event: هو الحادث الذي تقع دائما عند إجراء التجربة، ويرمز له بالرمز S أو Ω (وهو فضاء العينة).

الحادث المستحيل Impossible Event: هو الحادث الذي لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة، ويرمز له بالرمز ϕ (وهو المجموعة الخالية).

الحوادث المتنافية Mutually Exclusiveness: نقول عن حادثين E و F أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر، أي $E \cap F=\phi$. وتكون مجموعة الحوادث $\{E_1,E_2,\dots\}$ متنافية مثنى مثنى إذا كان تحقق أحدهما يلغي تحقق الحوادث الأخرى، أي $\forall i \neq j$ يكون: $E_iE_j=\phi$.

تعرف الحوادث $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ ، $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$، $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ بنفس طريقة تعريف $E_1 \cup E_2$ و $E_1 \cap E_2$. وعلى سبيل المثال، إذا كانت $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ مجموعة من الحوادث. العلاقة $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ تعني الحادث الذي يتحقق من خلاله حادث واحد على الأقل من بين الحوادث E_i حيث $1 \leq i \leq n$. والعلاقة $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ تعني الحادث الذي يتحقق من خلاله جميع الحوادث E_i حيث $1 \leq i \leq n$.

المحور الثالث

التحليل التوافقي

3. المحور الثالث: التحليل التو افقي

في هذا الدرس، سندرس بعض القواعد التي تمكننا من العد بشكل منهجي من خلال تناولنا موضوع التحليل التوافقي الذي يعتبر أحد فروع الرياضيات حيث يهدف إلى التعامل مع طرق العد وهو مجال واسع له تطبيقات في كل فرع من فروع الرياضيات التطبيقية والنظرية بالإضافة إلى الاحتمالات والاحصاء، يستخدم في نظرية المعلومات، البرمجة الخطية، مشكلات النقل، نظرية المجموعات وغيرها من المجالات.

1.3. مبادئ العد الأساسية:

بافتراض أن عدد الطرق الممكنة للانتقال من المدينة A إلى المدينة B هو n وعدد الطرق الممكنة للانتقال من المدينة B إلى المدينة C هو m. وأردنا الذهاب من المدينة A إلى المدينة C مرورا بالمدينة B. فإن كل طريق يتم اختياره من بين n طريق للذهاب من المدينة A إلى المدينة B يوجد لدينا m خيار للانتقال من المدينة B إلى المدينة C. وبهذا مجموع الخيارات الممكنة للذهاب من المدينة A إلى المدينة C مرورا بالمدينة B هو nm. هذا المثال البسيط يعتبر كتمهيد للمبدأ الأساسي للعد والذي سوف نتطرق إليه فيما يلي.

مبرهنة 01: (مبدأ العد) إذا كانت المجموعة E تحتوي على n عنصر والمجموعة F تحتوي على m عنصر، فإنه يوجد nm طريقة يمكننا من خلالها في البداية اختيار عنصر من E ثم اختيار عنصر من F.

البرهان: لتكن $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $F = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$، إذن المصفوفة الموالية، التي تتكون على nm عنصر، تحتوي على جميع الطرق الممكنة التي يمكننا من خلالها اختيار عنصر من E في البداية ثم عنصر من F.

$$\begin{array}{c}(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_m)\\(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_m)\\(a_n, b_1), (a_n, b_2), \dots, (a_n, b_m)\end{array}$$

الآن نعود إلى مثالنا السابق ونفترض أن هناك مدينة رابعة D مرتبطة بالمدينة C بعدد ℓ من الطرق الممكنة. ما هو عدد الطرق الممكنة إذا أردنا الذهاب من المدينة A إلى المدينة D مرورا بالمدينة B ثم C. من خلال ما سبق وجدنا أن عدد الطرق الممكنة للذهاب من A إلى C مرورا بـ B، ولكل طريق من هذه الطرق الممكنة يوجد ℓ إمكانية للإنتقال من C إلى D.

وبهذا باستخدام مبدأ العد الأساسي، العدد الكلي للطرق التي يمكننا من خلالها الذهاب من المدينة A إلى المدينة D مرورا بـ B ثم C هو عدد الطرق الممكنة للذهاب من المدينة A إلى المدينة C مرورا بالمدينة B مضروبا في ℓ. نتحصل على $nm\ell$. ومن خلال ما سبق يمكننا تعميم مبدأ العد.

مبرهنة 02: (تعميم مبدأ العد) ليكن $E_1, E_2, \dots, E_k$ مجموعات بحيث عدد عناصر كل مجموعة هو $n_1, n_2, \dots . n_k$ على التوالي، إذن يوجد $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$ طريقة يمكن من خلالها في البداية اختيار عنصر من E_1 ثم عنصر من E_2 وبعدها عنصر من E_3 ،... وفي الأخير اختيار عنصر من E_k.

مثال 1.3: ما هو عدد الأعداد ذات 4 أرقام مختلفة الممكن تشكيلها.

الحل: يمكن اعتبار أن عملية تشكيل عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة تتم عبر 4 مراحل حيث يتم اختيار الأرقام من اليسار إلى اليمين على التوالي كما هو موضح أدناه:

المرحلة 04:	المرحلة 03:	المرحلة 02:	المرحلة 01:
اختيار رقم الآحاد	اختيار رقم العشرات	اختيار رقم المئات	اختيار رقم الآلاف

المرحلة الأولى: تتمثل في عملية اختيار رقم الآلاف وهنا لا يمكننا اختيار الرقم 0 وبهذا هناك 9 طرق ممكنة لهذه المرحلة.

المرحلة الثانية: تتمثل في عملية اختيار رقم المئات ويمكن أن يكون أي رقم ماعدا الرقم الذي تم اختياره في المرحلة الأولى، وبهذا هناك 9 طرق ممكنة لهذه المرحلة.

المرحلة الثالثة: تتمثل في عملية اختيار رقم العشرات ويمكن أن يكون أي رقم ماعدا الرقمين اللذين تم اختيارهما في المرحلتين 1 و2، وبهذا هناك 8 طرق ممكنة لهذه المرحلة.

المرحلة الرابعة: تتمثل في عملية اختيار رقم الآحاد ويمكن أن يكون أي رقم ماعدا الأرقام الثلاثة التي تم اختيارها في المراحل الثلاثة الأولى. وبهذا هناك 7طرق ممكنة لهذه المرحلة.

إذن تبعا لقاعدة الجداء، المراحل الأربعة لهذه التجربة العشوائية تتم معا بـ $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ طريقة ممكنة.

مثال 2.3: ما هو عدد النتائج الممكنة إذا قمنا برمي 5 قطع نرد؟

الحل: ليكن E_i بحيث $1 \le i \le 5$ تمثل المجموعة التي تحتوي على النتائج الممكنة لرمي حجر النرد i. إذن $E_i = \{1,2,3,4,5,6\}$.عدد النتائج الممكنة الموافقة لرمي 5 قطع نرد يساوي عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار عنصر من E_1 في البداية، ثم عنصر من E_2 ، ... وفي الأخير عنصر من E_5. وبهذا نتحصل على $6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^5$.

مثال 3.3: صندوق يحتوي على 7 كرات متماثلة مرقمة من 1 إلى 7. تم سحب ثلاث كرات الواحدة تلوى الأخرى بطريقة عشوائية وبالإرجاع. المطلوب إيجاد عدد الطرق الممكنة للحالات التالية:

1- جميع الكرات المسحوبة تحمل رقم فردي؟

2- كرة واحدة فقط من بين الكرات المسحوبة تحمل رقم فردي؟

الحل:

1- بما أن السحب يكون بالإرجاع، فإنه يوجد 7 طرق ممكنة لسحب كرة من الصندوق في كل عملية سحب. وبهذا فضاء العينة يحتوي على $7 \times 7 \times 7 = 343$ نتيجة أولية. ويوجد $4 \times 4 \times 4 = 64$ طريقة يكون فيها نتيجة عمليات السحب الثلاث كلها عبارة عن رقم فردي. أي كل كرة مسحوبة تحمل أحد الأرقام التالية 1، 3، 5 أو 7.

2- يوجد $4 \times 3 \times 3 = 36$ طريقة ممكنة من خلالها يمكن الحصول على عدد فردي في السحب الأول ثم على عدد زوجي (2، 4 أو 6) في السحب الثاني والثالث. ويوجد أيضا $3 \times 4 \times 3 = 36$ طريقة يمكن من خلالها الحصول على رقم زوجي في السحب الأول والثالث ورقم فردي في السحب الثاني. وهناك أيضا $3 \times 3 \times 4 =$ 36 طريقة يمكن من خلالها الحصول على رقم زوجي في السحب الأول والثاني ورقم فردي في السحب الثالث. وبهذا عدد الطرق الممكنة لسحب كرة واحدة فقط تحمل رقم فردي هو $3 \times 36 = 108$.

مثال 4.3: قام أحد الأشخاص بدعوة n صديق إلى منزله. إذا حضر جميع المدعوين وصافح كل واحد منهم الآخر مرة واحدة بالضبط، فما هو عدد المصافحات؟

الحل 01: يوجد $n+1$ شخص، وكل واحد منهم قام بمصافحة n شخص، ومن خلال هذا العدد الكلي للمصافحات يكون $n(n+1)$. لكن هذا غير صحيح لأننا قمنا بحساب كل مصافحة مرتين، وبعبارة أخرى إذا "الشخص A صافح الشخص B" أو "الشخص B صافح الشخص A" تعتبر مصافحة واحدة بينما من خلال العلاقة السابقة نعتبرهما مصافحتين مختلفتين، وبما أن كل مصافحة تم حسابها مرتين، فإن عدد المصافحات هو $(n+1)n/2$.

الحل 02: بافتراض أن الضيوف يصلون الواحد تلوى الآخر، وبهذا الضيف 1 سيصافح صاحب الدعوة (مصافحة واحدة)، والضيف الثاني سيصافح صاحب الدعوة والضيف الأول (مصافحتين) وهكذا ...والضيف n سيصافح صاحب الدعوة والضيوف $n-1$ الأخرى (n مصافحة). وبهذا العدد الكلي المصافحات هو: $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1$، وهذا المجموع عبارة عن مجموع n حد الأولى لمتتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 1، إذن:

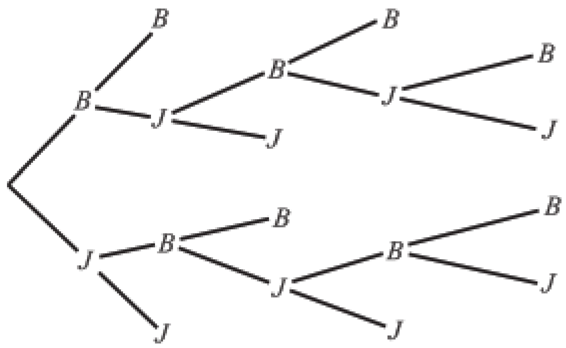
$$1 + 2 + 3 \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.3.المخطط الشجري:

المخطط الشجري يستخدم لعرض مسائل العد المعقدة في شكل بياني مما يساعد في تبسيطها. ومن بين أهم المزايا الإيجابية للمخطط الشجري هو أنه يساعدنا على تحديد جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. ولهذا يستخدم فقط في حالة التجارب العشوائية ذات مجموعة نتائج منتهية. والمثال التالي يوضح كيفية إنشاء مخطط شجري ولماذا يعتبر مفيد.

مثال 5.3: يلعب شخصان B وJ لعبة ما ويتوقف اللعب عند فوز أحدهما في اللعبة مرتين متتاليتين أو فوز أحدهما ثلاث مرات في المجموع.

الشكل أدناه يعرض لنا المخطط الشجري لهذه التجربة العشوائية.



المخطط الشجري أعلاه يعرض جميع الحالات الممكنة، العدد الكلي للحالات الممكنة يساوي عدد نهايات أفرع المخطط الشجري والذي هو 10. وعلى سبيل المثال عدد الحالات التي يفوز بها الشخص B في اللعبة من خلال الفوز في ثلاث مباريات في المجموع بدون أن يربح في اللعبة مرتين متتاليتين هو حالة واحدة.

3.3. التر اتيب:

1.3.3. التر اتيب بدون تكرار:

تعريف 01: نقول عن ترتيب r عنصر مختلف من المجموعة A التي تحتوي على n عنصر $(0 < r \leq n)$ بحيث لا يسمح باختيار العنصر أكثر من مرة أنها ترتيبة بدون تكرار ذات r عنصر من المجموعة A . وعدد الترتيبات بدون تكرار ذات r عنصر من مجموعة ذات n يرمز له بـ A_n^r.

من خلال هذا التعريف، إذا ترشح ثلاث أشخاص أحمد، عمر، عادل لإجراء مقابلة عمل، نقول عن أي ترتيب ممكن للأشخاص الثلاثة أنه ترتيبة بدون تكرار ذات 3 عناصر من المجموعة {أحمد، عمر ،عادل}.

إذا كان على سبيل المثال $A = \{a, b, c, d\}$، فإن ab تمثل ترتيبة بدون تكرار ذات عنصرين من المجموعة A، acd تمثل ترتيبة بدون تكرار ذات 3 عناصر من المجموعة A و $adcb$ هي ترتيبة بدون تكرار ذات أربع عناصر من المجموعة A. مع مراعاة أن ترتيب العناصر في الترتيبات مهم أي يؤخذ بعين الاعتبار. وعلى سبيل المثال ab و ba يعتبران ترتيبتان مختلفتان من مجموعة الترتيبات ذات عنصرين. وأيضا abc و cba ترتيبتان مختلفتان من مجموعة الترتيبات ذات 3 عناصر.

لحساب A_n^r، عدد الترتيبات بدون تكرار ذات r عنصر من مجموعة A ذات n عنصر حيث $(1 \leq r \leq n)$، نستخدم تعميم مبدأ العد الأساسي. باعتبار أن المجموعة A تحتوي على n، عدد الخيارات المتاحة لاختيار العنصر الأول لترتيبة ذات r عنصر هو n. ولإختيار العنصر الثاني عدد الخيارات المتبقية هو $n - 1$ عنصر من المجموعة A. وبالنسبة لعملية اختيار العنصر الثالث في الترتيبة عدد الخيارات المتبقية هو $n - 2$، ... وفي الأخير، من أجل اختيار العنصر r عدد الخيارات المتبقية هو $n - (r - 1) = n - r + 1$، وبهذا:

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \qquad (1)$$

هناك صيغة أكثر استخداما بديلة عن صيغة العلاقة (1) نتحصل عليها من خلال ضرب طرفي العلاقة (1) في $(n-r)! = (n-r)(n-r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$، نتحصل على:

$$A_n^r \cdot (n-r)! = [n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)] \cdot [(n-r)(n-r-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1] \qquad (2)$$

هذا يعطينا $A_n^r \cdot (n-r)! = n!$، ومنه عدد الترتيبات ذات $\boldsymbol{r}$ عنصر من مجموعة $\boldsymbol{A}$ ذات $\boldsymbol{n}$ عنصر حيث $(\boldsymbol{1 \leq r \leq n})$، يعطى بالعلاقة التالية:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال 6.3: تتكون مؤسسة إنتاجية من 10 عمال، يراد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 أعضاء لهم المهام التالية: مدير عام، مراقب إنتاج ومسؤول مبيعات. ما هو عدد الطرق التي يمكن بها تشكيل هذه اللجنة.

الحل: لاختيار المدير هناك 10 حالات (طرق) ممكنة، في كل حالة من 10 حالات الممكنة لاختيار المدير يوجد 9 حالات لاختيار مراقب انتاج، أيضا في كل حالة من حالات اختيار المدير ثم مراقب انتاج يوجد 8 حالات لاختيار مسؤول مبيعات، وبهذا عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه اللجنة هو:

$$A_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = \frac{10!}{(10-3)!}$$

2.3.3. التر اتيب بتكرار:

تعريف 02: نقول عن ترتيب r عنصر من المجموعة A التي تحتوي على n عنصر بحيث يسمح باختيار العنصر أكثر من مرة أنها ترتيبة بتكرار ذات r عنصر من المجموعة A.

لحساب A_n^r، عدد الترتيبات بتكرار ذات r عنصر من مجموعة A ذات n عنصر، نستخدم أيضا تعميم مبدأ العد الأساسي. باعتبار أن المجموعة A تحتوي على n عنصر، عدد الخيارات المتاحة لاختيار العنصر الأول لترتيبة بتكرار ذات r عنصر هو n. ولإختيار العنصر الثاني عدد الخيارات هو n عنصر من المجموعة A. وبالنسبة لعملية اختيار العنصر الثالث في الترتيبة هو n، ... وفي الأخير، من أجل اختيار العنصر r عدد الخيارات الممكنة هو n، وبهذا:

$$A_n^r = \underbrace{n \times n \times n \cdots n}_{n \text{ مرة}} = n^r$$

4.3. التباديل:

التباديل تسمح لنا بحساب عدد الطرق التي نرتب بها مجموعة من العناصر، هذه العناصر قد تكون جميعها مختلفة وفي هذه الحالة نكون أمام التباديل البسيطة (أو التباديل بدون تكرار)، وقد يكون في هذه العناصر ما هو متماثل وفي هذه الحالة نكون أمام التباديل في حالة وجود عناصر متماثلة مكررة (أو التباديل بتكرار).

1.4.3. التباديل البسيطة:

الترتيبة بدون تكرار ذات n عنصر من مجموعة ذات n عنصر اختصارا نسميها تبديلة، عدد التبديلات لمجموعة تحتوي على n عنصر، A_n^n، يحسب من خلال العلاقة (1) أعلاه بوضع $n = r$.

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1) = n! \qquad (2)$$

لاحظ أنه من أجل $r = n$، هذه العلاقة تستلزم أن $P_n = n!/0!$. لكن من خلال المعادلة (2) $P_n = n!$. وبهذا من أجل $r = n$، حتى تكون العلاقتين (2) و (3) متكافئتين، نعرف العلاقة التالية: $0! = 1$.

مثال 7.3: تقدم ثلاثة أشخاص أحمد، عمر، عادل إلى مقابلة عمل، بكم طريقة مختلفة يمكن أن يكون ترتيب الأشخاص الثلاثة في المقابلة.

الحل: عدد مختلف الترتيبات الممكنة يساوي عدد التبديلات للمجموعة {أحمد، عمر ،عادل}. ومنه يوجد $3! =$ 6 تبديلة ممكنة لهذه المقابلة.

2.4.3. التباديل في حالة وجود عناصر متماثلة مكررة أو التباديل بتكرار:

من خلال ما سبق عدد التباديل لمجموعة مكونة من n عنصر هو $n!$. هذه الصيغة صالحة فقط إذا كانت كل عناصر المجموعة متمايزة عن بعضها البعض. وعلى سبيل المثال يوجد $6!$ تبديلة ممكنة للأحرف الستة في كلمة "KHALED" لأن جميع هذه الأحرف متمايزة عن بعضها البعض. لكن عدد التبديلات لـ 8 أحرف في "MOHAMMED" يكون أقل من $8!$ لأن الحرف الأول، الخامس والسادس متماثل. إذا قمنا في تبديلة من التباديل الممكنة لهذه الحروف بتغيير موضع الأحرف الثلاثة المتماثلة M، فإن التبديلة المتحصل عليها لا تختلف عن التبديلة التي تسبقها. وفيما يلي نحاول حساب عدد التبديلات الممكنة لحروف MOHAMMED. بافتراض أنه يوجد x تبديلة ممكنة لهذه الحروف الثمانية ونأخذ أية تبديلة منهم ولتكن MOHAMMED على سبيل المثال. إذا قمنا بترميز الأحرف M : $M_1OHAM_2M_3ED$ فإنه في هذه الحالة جميع الحروف متمايزة. وبتبديل الحروف M_i فيما بينها نتحصل على $3!$ تبديلة جديدة، وهي:

$$\begin{array}{ll} M_1OHAM_2M_3ED & M_2OHAM_3M_1ED \\ M_1OHAM_3M_2ED & M_3OHAM_1M_2ED \\ M_2OHAM_1M_3ED & M_3OHAM_2M_1ED \end{array}$$

وكل هذه التبديلات تعتبر تبديلة واحدة إذا حذفنا الترميز. وبهذا كل تبديلة من x تبديلة الممكنة لهذه الحروف يكون لها $3!$ من التبديلات المتشابهة. وبهذا العدد الكلي للتبديلات يكون $x \times 3!$. لكن عدد التبديلات الممكن تشكيله من 8 أحرف مختلفة هو $8!$ تبديلة. إذن $8! = 3! \times x$. وهذا يعطينا $x = 8!/3!$،وبهذا نكون قد توصلنا إلى أن عدد التبديلات المختلفة الممكن تشكيلها من أحرف MOHAMMED.

مثال 8.3: ما هو عدد التبديلات المختلفة الممكن إنشاؤها من الحروف a، a، b، b.

الحل: إذا قمنا بترميز الحروف السابقة كما يلي: $a_1a_2b_1b_2$، فإن عدد التبديلات الممكنة هو $4!$، وإذا أخذنا على سبيل المثال التبديلة aabb (حالة واحدة) يقابلها $2! \times 2! = 4$ تبديلة ممكنة في حالة ترميز الحروف كما هو موضح فيما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} a_1a_2b_1b_2 \\ a_1a_2b_2b_1 \\ a_1a_1b_1b_2 \\ a_1a_1b_2b_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad aabb$$

ونتيجة لذلك، عدد التبديلات الممكن إنشاؤها في هذه الحالة هو:

$$\frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

مثال 9.3: ما هو عدد التبديلات المختلفة الممكن إنشاؤها من الحروف a، a، b، b، c، c، c.

الحل: إذا قمنا بترميز الحروف السابقة كما يلي:$a_1a_2b_1b_2c_1c_2c_3$، فإن عدد التبديلات الممكنة هو !7، وإذا أخذنا على سبيل المثال التبديلة aabbccc (حالة واحدة) يقابلها !3 × !2 × !2 تبديلة ممكنة في حالة ترميز الحروف.

ونتيجة لذلك، عدد التبديلات الممكن إنشاؤها في هذه الحالة هو:

$$\frac{7!}{2!\,2!\,3!} = 210$$

ومن خلال المبرهنة الموالية سنقوم بتعميم هذه الحالة.

مبرهنة 03: عدد التبديلات المختلفة لـ n عنصر ذات k نوع مختلف، حيث يكون n_1 عنصر متماثل، n_2 عنصر متماثل، ...، n_k عنصر متماثل و $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$، هو:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

مثال 10.3: ما هو عدد كلمات السر التي يمكن تشكيلها والتي تتكون من 10 حروف باستخدام ثلاثة أحرف a، أربعة أحرف b، 3 أحرف c.

الحل: من خلال المبرهنة السابقة، عدد كلمات السر هو: $10!/(3! \times 4! \times 3!) = 4200$.

5.3. التوفيقات:

في العديد من مسائل التحليل التوفيقي، على عكس التباديل، يكون ترتيب العناصر غير مهم. وعلى سبيل المثال، بافتراض أنه تأهل في أحد المسابقات 10 متسابقين إلى الدور النصف نهائي، يتأهل منهم 3 متسابقين فقط إلى الدور النهائي. ونريد حساب عدد الطرق الممكنة لتأهل 3 متسابقين إلى الدور النهائي. إذا قمنا بحساب عدد الطرق الممكنة باستخدام علاقة التباديل أي $10 \times 9 \times 8$ نكون قد أخطأنا، لأن ترتيب المتسابقين الذي يتأهلون إلى النهائي لا يهمنا. فإذا كان A، B و C تمثل المتسابقين الثلاثة المتأهلين، فإن ABC، BCA، ACB، BAC، CAB

و CBA تمثل نفس الحدث ولها نفس المعنى "المتسابقين A ، B و C تأهلوا للدور النهائي". لذلك في هذا النوع من الحالات نستخدم التوفيقات للتعامل مع هذا النوع من المسائل.

1.5.3. تعريف 03: التشكيلات الغير مرتبة المكونة من r عنصر المأخوذة من مجموعة A تحتوي على n عنصر $(r \leq n)$ تسمى توفيقة ذات r عنصر مأخوذة من مجموعة ذات n عنصر.

وبهذا نعتبر أن تشكيلتين في التوافيق مختلفتين عندما تختلفان فقط في العناصر. ولا نعتبرهما مختلفتان باختلاف ترتيب العناصر كما هو الحال في التباديل.

ليكن x يمثل عدد التوفيقات ذات r عنصر من مجموعة A ذات n عنصر. إذا تم إيجاد جميع التباديل لكل توفيقة ذات r عنصر، فإننا نكون قد وجدنا جميع التباديل ذات r عنصر للمجموعة A. وباعتبار أن لكل توفيقة ذات r عنصر من المجموعة A يوجد $r!$ تبديلة والعدد الكلي للتباديل ذات r هو A_n^r، وبهذا يكون:

$$x \cdot r! = A_n^r$$

ومنه $x \cdot r! = n!/(n-r)!$، إذن $x = n!/[(n-r)!\,r!]$. وبهذا:

عدد التوفيقات ذات $\boldsymbol{r}$ عنصر من مجموعة ذات $\boldsymbol{n}$ عنصر معطاة بـ:

$$C_n^r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

والجدير بالملاحظة هو أن C_n^r يمثل عدد المجموعات الجزئية ذات الحجم r الممكن تشكيلها من مجموعة حجمها n. والمجموعة التي تحتوي على n عنصر لها 2^n مجموعة جزئية. وبهذا من بين هذه 2^n مجموعة جزئية عدد المجموعات التي لها بالضبط r عنصر هو C_n^r.

ترميز: من خلال الرمز $\binom{n}{r}$ نعني عدد كل التوفييقات ذات r عنصر من مجموعة ذات n. وبهذا، من أجل $r \leq n$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

2.5.3. بعض الخواص المهمة للتوفيقات:

1.
$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

4. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad , 0 \le r \le n$

5. $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \quad , 0 \le r \le n$

6. $\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$

7. $\mathrm{r} \cdot C_n^r = n \cdot C_{n-1}^{r-1}$

البرهان:

1.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{r!\,(n-r)!}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

2.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$$
$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = 1$$

3.

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n\,;$$
$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!\,(\mathrm{n}-(n-1))!} = \binom{n}{n-1}$$

4.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!\,[n-(n-r)]!} = \binom{n}{n-r}$$

5.

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right]$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}\right] = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}.$$

6.

$$\frac{C_n^r}{C_n^{r-1}} = \frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}} = \frac{(r-1)!\,(n-r+1)!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n-r+1}{r}$$

7.

$$\frac{C_n^r}{C_{n-1}^{r-1}} = \frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{\frac{(n-1)!}{(r-1)![(n-1)-(r-1)]!}} = \frac{n!\,(r-1)!\,(n-r)!}{(n-1)!\,r!\,(n-r)!} = \frac{n}{r}$$

مثال 11.3: بكم طريقة يمكننا اختيار كتابين في الرياضيات وثلاثة كتب في الإحصاء من بين 8 كتب في الرياضيات و6 كتب في الإحصاء.

الحل: يوجد $\binom{8}{2}$ طريقة ممكنة لإختيار كتابين في الرياضيات و$\binom{6}{3}$ طريقة ممكنة لإختيار ثلاثة كتب في الإحصاء. وبهذا بإستخدام مبدأ العد نتحصل على:

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{3} = \frac{8!}{6!\,2!} \times \frac{6!}{3!\,3!} = 560$$

ومنه يوجد 560 طريقة ممكنة لاختيار كتابين في الرياضات وثلاثة كتب في الإحصاء.

أحد أهم التطبيقات الخاصة بالتوفيقات هي أنها تساعدنا على إيجاد الصيغة الجبرية للعبارة التالية $(x+y)^n$.

مبرهنة 04: (دستور ثنائي الحد لنيوتن) ليكن x و y عددين حقيقين و n عدد طبيعي غير معدم. صيغة ثنائي الحد لنيوتن تعطى وفق الصيغة التالية:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}y^i\end{aligned}$$

3.5.3. مثلث باسكال:

n \ r	0	1	2	3	4	5	.	.	.	$r-1$	r
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
.											
.											
$n-1$	$\binom{n-1}{0}$	$\binom{n-1}{1}$	.	.	.	.	.	.	.	$\binom{n-1}{r-1}$	$\binom{n-1}{r}$
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	.	.	.	.	.	.	.	$\binom{n}{r-1}$	$\binom{n}{r}$

مبرهنة 05: لدينا الصيغ التالية لباسكال، وهي تسمح بحساب معاملات ثنائي الحد بكل سهولة (إذا كان n غير كبير)، وهذه الصيغة هي:

1. $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$, $0\le r\le n$

	1	2	3	4	5	
$(x+y)^0$	1					$=1$
$(x+y)^1$	1	1				$=1x+1y$
$(x+y)^2$	1	2	1			$=1x^2+2xy+1y^2$
$(x+y)^3$	1	3	3	1		$=1x^3+3x^2y+3yx^2+1y^3$
$(x+y)^4$	1	4	5	4	1	$=1x^4+4x^3y+5x^2y^2+4xy^2+1y^3$

$(x+y)^2$	$=1x^2+2xy+1y^2$	$=\binom{2}{0}x^2+\binom{2}{1}xy+\binom{2}{2}y^2$
$(x+y)^3$	$=1x^3+3x^2y+3yx^2+1y^3$	$=\binom{n}{0}x^3+\binom{n}{1}x^2y+\binom{n}{2}yx^2+\binom{n}{3}y^3$

مثال 12.3: أحسب: $(2x+3y)^5$.

الحل:

$$(2x+3y)^5=\binom{5}{0}(2x)^5+\binom{5}{1}(2x)^4(3y)^1+\binom{5}{2}(2x)^3(3y)^2+\binom{5}{3}(2x)^2(3y)^3$$
$$+\binom{5}{4}(2x)^1(3y)^4+\binom{5}{5}(3y)^5$$

$$=32x^5+240x^4y^1+720x^3y^2+1080x^2y^3+810x^1y^4+243y^5$$

ملاحظة: الصيغة $(x+y)^n$ لها $n+1$، والحد رقم i هو:

$$\binom{n}{i-1}x^{n-i+1}y^{i-1},\ 1\le i\le n+1$$

مثال 13.3: ما هو معامل x^2y^3 في الصيغة $(2x+3y)^5$؟

الحل:

ليكن $u=2x$ و $v=3y$، إذن $(2x+3y)^5=(u+v)^5$. معامل u^2v^3 في الصيغة $(u+v)^5$ هو $\binom{5}{3}$ و $u^2v^3=(2^2\cdot 3^3)x^2y^3$. ومنه معامل x^2y^3 في الصيغة $(2x+3y)^5$ هو $1080=(2^2\cdot 3^3)\binom{5}{3}$.

مبرهنة 06: (دستور متعدد الحدود) في الصيغة العامة: $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$

معامل الحد $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots x_k^{n_k}$ حيث $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$ هو:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

وبهذا:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_a^{n}\cdots x_k^{n_k}.$$

6.3. صيغة STIRLING:

لتقدير قيمة $n!$ من أجل القيم الكبيرة لـ n، نستخدم الصيغة التالية والتي تم وضعها من طرف *James Stirling* سنة *1730*:

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$$

حيث: ~ تعني $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}}=1$.

هذه الصيغة عادة ما تعطينا تقريبات ممتازة للحسابات العددية، كما تستخدم أيضا في البراهين النظرية. والجدول الموالي يعرض نتائج تقدير عند بعض القيم لصيغة *Stirling*.

n	n!	$\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}$	$R(n)$
1	1	0.922	1.0844
2	2	1.919	1.0422
5	120	118.019	1.0168
8	40320	39902.395	1.0105
10	3628800	3598695.619	1.0084
12	479001600	475687486.473	1.0070

حيث: $R(n)=n!/\left(\sqrt{2\pi n}n^ne^{-n}\right)$

مثال 14: أعط تقريب للقيمة $[2^n(n!)^2]/(2n)!$ من أجل n قيمة كبيرة.

الحل: باستخدام صيغة *Stirling* لدينا:

$$\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}\sim\frac{2^n2\pi n(n^n)^2e^{-2n}}{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}=\frac{\sqrt{\pi n}}{2^n}$$

المحور الرابع

الاحتمالات

4. المحور الرابع: الاحتمالات

1.4. تعريف الاحتمال:

1.1.4. التعريف الكلاسيكي أو الرياضي للاحتمال (Laplace 1812):

بافتراض أن تجربة عشوائية لها n نتيجة ممكنة، بحيث هذه النتائج متنافية مثنى مثنى ولها نفس الفرصة في الوقوع. وليكن m من النتائج الممكنة ملائمة لوقوع الحادث A. إذن احتمال وقوع الحادث A معرف كما يلي:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

مثال1.4: ألقيت قطعة نرد متزنة مرة واحدة، ما هو احتمال ظهور عدد زوجي؟

- عدد الطرق الممكنة للتجربة $n = 6$.
- عدد الطرق الملائمة لظهور عدد زوجي $m = 6$.

بفرض أن A هي حادثة ظهور عدد زوجي، إذن:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0.5$$

عيوبه:

1. يشترط هذا التعريف أن يكون فضاء العينة منتهيا.
2. يشترط أيضا هذا التعريف أن تكون كافة عناصر فضاء العينة لها نفس فرصة الظهور.

2.1.4. التعريف الاحصائي أو التجريبي للاحتمال (التكرار النسبي) (Von Mises):

بافتراض أن تجربة عشوائية أجريت عدد كبير من المرات بصفة مستقلة وتحت نفس الظروف. وليكن a_n يمثل عدد المرات التي يتحقق فيها الحادث A عند إجراء التجربة n مرة. ونعرف الاحتمال:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

مثال2.4: إذا ألقيت قطعة النقود n مرة وظهرت الصورة m فإن نسبة ظهورالصورة هو $\frac{m}{n}$ مرة. هذه النسبة ليس بالضرورة تساوي 0.5 ولكن عندما يزداد عدد مرات إلقاء هذه القطعة نجد أن النسبة تقترب من 0.5 فيكون احتمال ظهور الصورة هو: $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

وقد أجرى بالفعل أحد الأشخاص هذه التجربة وحصل على النتائج التالية:

عدد مرات إلقاء قطعة النقود	عدد مرات ظهور الصورة	التكرار النسبي
4000	2032	0.5080
8000	4029	0.5036
12000	6030	0.5025
24000	12034	0.5014
55000	25030	0.5006
100000	50011	0.5001

في هذا المثال نلاحظ أن التكرار النسبي يكتسب بعض الانتظام الاحصائي ويستقر حول القيمة الثابتة 0.5.

مثال3.4:أجرى طبيب 300 عملية جراحية نجح منها 278 عملية، فما هو احتمال نجاح العملية.

الحل:

- عدد مرات أجراء العملية:$n = 300$
- عدد مرات نجاح العملية:$m = 288$

بفرض أن A ترمز لحادث نجاح العملية:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{288}{300} = 0.96$$

مثال4.4: في مصنع للمصابيح الكهربائية تبين أن من بين كل 1000 مصباح يوجد 50 مصباح غير صالح للاستعمال. ما هو احتمال وجود مصباح جيد.

- عدد المصابيح:$n = 1000$
- عدد المصابيح غير الصالحة:$m = 50$

بفرض أن A تمثل حادثة المصباح غير صالح للاستعمال:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{50}{1000} = 0.05$$

عيوبه:

1. يشترط هذا التعريف إجراء التجربة العشوائية عدد كبير جدا من المرات.

3.1.4. التعريف البديهي (بديهيات الاحتمال لـ(Kolmogorov 1933)):

لتكن S تمثل فضاء عينة لتجربة عشوائية و A حادث. العدد الحقيقي الذي نرمز له بـ $P(A)$ والمتعلق بالحادث A. إذا حقق التطبيق P البديهيات التالية نقول عنه أنه احتمال، والعدد الحقيقي $P(A)$ نقول عنه أنه احتمال تحقق الحدث A.

البديهية 01: $P(A) \geq 0$

البديهية 02: $P(S) = 1$

البديهية 03: إذا كانت $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ حوادث متنافية مثنى مثنى ($A_i \cap A_j = \phi$ حيث: $i \neq j$) إذن: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

البديهية 01 تنص على أن احتمال تحقق حادث ما دائما موجب. أما البديهية 02 تنص على أن احتمال تحقق الحادث S (الحادث الأكيد) هو 1. والبديهية الأخيرة تنص على أنه من أجل متتابعة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى، احتمال أن يتحقق على الأقل حادث من هذه الحوادث هو مجموع احتمالات هذه الحوادث.

لتكن S تمثل فضاء عينة لتجربة عشوائية. وليكن A و B حادثان من S. نقول أن A و B لهما نفس الفرصة في الوقوع إذا كان $P(A) = P(B)$. وليكن أيضا w_1 و w_2 نقاط عينة من S. نقول أن w_1 و w_2 لهما نفس الفرصة في الوقوع إذا كان الحدثان $\{w_1\}$ و $\{w_2\}$ لهما نفس الفرصة وهذا يكون عندما $P(w_1) = P(w_2)$.

مبرهنة 01: احتمال المجموعة الخالية ϕ هو 0، أي $P(\phi) = 0$.

البرهان: لتكن $A_1 = S$ و $A_i = \phi$ من أجل $i \geq 2$، و $A_1, A_2, A_3 \ldots$ متتابعة حوادث متنافية مثنى مثنى. ومن خلال البديهية رقم 03:

$$P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = P(S) + \sum_{i=1}^{\infty} P(\phi) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} P(\phi) = P(S) - P(S) = 0$$

وبهذا $\sum_{i=1}^{\infty} P(\phi) = 0$، وهذا ممكن فقط عندما يكون $P(\phi) = 0$.

مبرهنة 02: لتكن $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ مجموعة من الحوادث المتنافية مثنى مثنى، إذن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

البرهان: من أجل $i > n$ ، لتكن $A_i = \phi$ ، و $A_1, A_2, A_3, \dots$ متتابعة من حوادث متنافية مثنى مثنى. ومن خلال البديهية 03 والمبرهنة (01) نجد:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} P(\phi)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

لتكن $n = 2$، من خلال المبرهنة (01) إذا كان A_1 و A_2 حادثين متنافيين، إذن:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

من خلال هذه المعادلة، من أجل أي حادث A : $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

ولدينا أيضا من خلال البديهية 02: $P(A \cup A^c) = P(S) = 1$، إذن $P(A) + P(A^c) = 1$ ، ومن خلال البديهية رقم 01 لدينا: $P(A) \leq 1$ إذن يمكن استنتاج أن:

احتمال تحقق حادث هو دائما قيمة محصورة بين 0 و 1، أي: $0 \leq P(A) \leq 1$.

مثال5.4: نقول عن عملة أنها متزنة أو غير متحيزة، إذا كان احتمال الحصول على الوجه Head يساوي احتمال الحصول على Tail. ولنفترض أنه في تجربة قمنا بإلقاء قطعة نقدية متزنة. فضاء العينة في هذه التجربة هو $S = \{\mathrm{T}, \mathrm{H}\}$. وبما أن القطعة النقدية متزنة فإن الحادثين $\{\mathrm{H}\}$ و $\{\mathrm{T}\}$ لهما نفس الفرصة في الوقوع، أي $P(\{\mathrm{T}\}) = P(\{\mathrm{H}\})$، والحادثين متنافيين، إذن:

$$P(\{\mathrm{T}, \mathrm{H}\}) = P(\{\mathrm{T}\}) + P(\{\mathrm{H}\})$$

ومن خلال البديهية 02 و03 نجد:

$$1 = P(S) = P(\{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}) = P(\{\mathrm{H}\}) + P(\{\mathrm{T}\}) = P(\{\mathrm{H}\}) + P(\{\mathrm{H}\}) = 2P(\{\mathrm{H}\})$$

وهذا يعطينا $P(\{\mathrm{H}\}) = 1/2$ و $P(\{\mathrm{T}\}) = 1/2$.

الآن لنفترض أنه في تجربة إلقاء قطعة نقود حيث يكون فيها فرصة ظهور النتيجة tails ضعف فرصة ظهور النتيجة heads، وبهذا $P(\{\mathrm{T}\}) = 2P(\{\mathrm{H}\})$، إذن:

$$1 = P(S) = P(\{\mathrm{H}, \mathrm{T}\}) = P(\{\mathrm{H}\}) + P(\{\mathrm{T}\}) = P(\{\mathrm{H}\}) + 2P(\{\mathrm{H}\}) = 3P(\{\mathrm{H}\})$$

ومن خلال يكون $P(\{\mathrm{H}\}) = 1/3$ و $P(\{\mathrm{T}\}) = 2/3$.

مثال6.4: صندوق به 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5، نقوم باختيار كرة بطريقة عشوائية من هذا الصندوق. ما هو احتمال سحب كرة تحمل رقم 5.

الحل: لتكن B_i حيث $1 \leq i \leq 5$ تمثل حادث سحب كرة تحمل الرقم i. وبما أن كل الكرات لها نفس الفرصة في الإختيار فإن: $P(\{B_1\}) = P(\{B_2\}) = P(\{B_3\}) = P(\{B_4\}) = P(\{B_5\})$.

والحوادث $\{B_1\},\{B_2\},\{B_3\},\{B_4\}$ و $\{B_5\}$ متنافية مثنى مثنى، وفضاء العينة $S = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$. إذن من خلال البديهيتين 2 و3 نجد:

$$1 = P(S) = P(\{B_1\}) + P(\{B_2\}) + P(\{B_3\}) + P(\{B_4\}) + P(\{B_5\}) = 5 \cdot P(\{B_1\})$$

وهذا يعطينا $P(\{B_1\}) = 1/5$، إذن $P(\{B_i\}) = 1/5$ ، من أجل $1 \leq i \leq 5$. وبهذا احتمال سحب كرة تحمل الرقم 5 هو $1/5$.

من خلال المثالين السابقين يتبين لنا أنه إذا كان فضاء العينة يحتوي على N نقطة عينة كل هذه النقاط لها نفس الفرصة في الوقوع، إذن احتمال كل نتيجة (نقطة عينة) هو $1/N$.

يمكن تعميم هذه النتيجة كما يلي، نعتبر $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وإذا كانت كل نقاط العينة لها نفس الفرصة في الوقوع، يكون:

$$P(\{s_1\}) = P(\{s_2\}) = \cdots = P(\{s_N\})$$

لكن $P(S) = 1$ والحوادث $\{s_1\}$، $\{s_2\}$،...،$\{s_N\}$ متنافية مثنى مثنى، إذن:

$$\begin{aligned} 1 = P(S) &= P(\{s_1, s_2, \dots s_N\}) \\ &= P(\{s_1\}) + P(\{s_2\}) + \cdots + P(\{s_N\}) = NP(\{s_1\}) \end{aligned}$$

وبهذا يكون $P(\{s_1\}) = 1/N$، وبهذا $P(\{s_i\}) = 1/N$ من أجل $1 \leq i \leq N$.

من خلال ما سبق، أحد النتائج التي يمكن استخلاصها من خلال بديهيات الاحتمال، إذا كان فضاء العينة لتجربة يحتوي على N نقطة عينة وكل هذه النقاط لها نفس الفرصة في الوقوع. إذن احتمال وقوع حادث A يساوي عدد نقاط الحادث A، وليكن $N(A)$ مقسوم على N.

هذه النتيجة تمثل التعريف الكلاسيكي للاحتمال، والمبرهنة التالية تعرض لنا التعريف الكلاسيكي للاحتمال كأحد نتائج بديهيات الاحتمال والتي تعتبر كأداة مهمة في حساب احتمالات الحوادث للتجارب العشوائية التي لها فضاء عينة منته.

مبرهنة 03: لتكن S فضاء عينة لتجربة عشوائية. إذا كانت S تحتوي على N نقطة وكل هذه النقاط لها نفس الفرصة في الوقوع، إذن احتمال أي حادث A من S هو:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

حيث: $N(A)$ هو عدد نقاط الحادث A.

البرهان: لتكن $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث s_i تمثل نتائج (نقاط عينة) لهذه التجربة. إذا كانت هذه النقاط لها نفس الفرصة في الوقوع إذن: $P(\{s_i\}) = 1/N$ من أجل جميع قيم i حيث: $1 \le i \le N$. وليكن $A = \{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{N(\mathrm{A})}}\}$ حيث: $s_{i_j} \in S$. إذا كان $\{s_{i_1}\}$، $\{s_{i_2}\}$، ...، $\{s_{i_{N(A)}}\}$ حوادث متنافية مثنى مثنى، ومن خلال البديهية 03 يكون:

$$P(A) = P\left(\left\{s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_{N(A)}}\right\}\right)$$

$$= P(\{s_{i_1}\}) + P(\{s_{i_2}\}) + \dots + P\left(\left\{s_{i_{N(A)}}\right\}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{N(A) \text{ حد}} = \frac{N(A)}{N}$$

مثال7.4:ليكن S فضاء عينة لتجربة إلقاء قطعة نقدية ثلاث مرات، و A حادث الحصول على الوجه heads على الأقل مرتين، إذن:

$$S = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HTH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THH}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTT}\}$$

و $A = \{\mathrm{HHH}, \mathrm{HTH}, \mathrm{HHT}, THH\}$ ، وبهذا $N = 8$ و $N(A) = 4$. ومن خلال هذا احتمال الحصول على الوجه heads على الأقل مرتين هو $N(A)/N = 4/8 = 1/2$.

مثال8.4:مصعد كهربائي على متنه فردين يتوقف في الطابق الثاني، الثالث والرابع. إذا كانت فرص النزول في أحد الطوابق الثلاثة متساوية لكل فرد من الفردين. ما هو احتمال نزول الفردين في طابقين مختلفين.

الحل: لتكن a و b تمثلان الفردين و a_2b_4 تعني الفرد a ينزل في الطابق الثاني والفرد b ينزل في الطابق الربع وبالمثل بالنسبة لبقية الحالات. وليكن A حادث نزول الفردين في طابقين مختلفين، وبهذا:

$$S = \{a_2b_2, a_2b_3, a_2b_4, a_3b_2, a_3b_3, a_3b_4, a_4b_2, a_4b_3, a_4b_4\}$$

و $A = \{a_2b_3, a_2b_4, a_3b_2, a_3b_4, a_4b_2, a_4b_3\}$. وبالتالي: $N = 9$ و $N(A) = 6$. إذن الاحتمال المرغوب فيه هو: $P(A) = N(A)/N = 6/9 = 2/3$.

مثال9.4:نختار رقم بطريقة عشوائية من مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,\dots,1000\}$، ما هو احتمال اختيار رقم يقبل القسمة على 3؟

الحل: في هذه الحالة فضاء العينة يتكون من 1000 نقطة، وبالتالي $N = 1000$. وليكن A يمثل جميع الأعداد الطبيعية المحصورة بين 1 و1000 والتي تقبل القسمة على 3. وبهذا $A = \{3m: 1 \le m \le 333\}$. ومنه $N(A) = 333$. إذن احتمال أن عدد طبيعي محصور بين 1 و1000 تم اختياره بطريقة عشوائية يقبل القسمة على 3 يساوي $333/1000$.

مثال10.4:نختار عدد بطريقة عشوائية من المجموعة $\{1,2,\dots.N\}$. ما هو احتمال أن يكون العدد المختار يقبل القسمة على k حيث $1 \le k \le N$.

الحل: في هذه الحالة فضاء العينة يحتوي على N. لتكن A يمثل حادث اختيار عدد يقبل القسمة على k . وبهذا $A = \{km: 1 \le m \le [N/k]\}$، حيث $[N/k]$ هو أكبر عدد طبيعي أقل أو يساوي النسبة N/k (لحساب $[N/k]$ نقوم بقسمة N على k ونقرب القيمة بالنقصان إلى عدد طبيعي) . إذن $N(A) = [N/k]$ و $P(A) = [N/k]/N$.

مبرهنة 04: من أجل أي حادث A، $P(A^c) = 1 - P(A)$.

البرهان: نعلم أن $AA^c = \phi$ لأن A و A^c حدثان متنافيان، وبهذا:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

ولدينا أيضا: $A \cup A^c = S$ و $P(S) = 1$، إذن:

$$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

وبهذا: $P(A^c) = 1 - P(A)$.

هذه المبرهنة تنص على أن احتمال عدم تحقق الحادث A هو 1 مطروحا منه احتمال تحققه، وعلى سبيل المثال، نعتبر $S = \{(i,j): 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6\}$ فضاء العينة الخاص برمي حجري نرد. إذا كان A يمثل حادث الحصول على مجموع النتيجتين يساوي 4، إذن $A = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ و $P(A) = 3/36$. ومن خلال المبرهنة السابقة احتمال A^c حادث عدم الحصول على مجموع النتيجتين يساوي 4، والذي نسبيا من الصعب إيجاده، هو $1 - 3/36 = 33/36$. وكمثال آخر، نعتبر تجربة اختيار عدد عشوائي من المجموعة $\{1,2,3,\dots,1000\}$. احتمال اختيار رقم يقبل القسمة على 3 هو $333/1000$. ومن خلال المبرهنة السابقة

احتمال اختيار عدد لا يقبل القسمة على العدد 3، والذي من الصعب إيجاده، هو $1-333/1000=$ $.667/1000$

مثال11.4:في تجربة إلقاء قطعة نرد 4 مرات، ما هو احتمال الحصول النتيجة 3 على الأقل مرة واحدة؟

الحل: ليكن A يمثل حادث الحصول على النتيجة 3 على الأقل مرة واحدة. إذن A^c هو حادث عدم الحصول على الرقم 3 عند إلقاء قطعة نرد 4 مرات، $N(A^c)$ و N تمثل عدد نقاط العينة لـ A^c والعدد الكلي لنقاط العينة لهذه التجربة العشوائية، على التوالي، معطاة كما يلي: $5^4=5\times5\times5\times5$ و $6^4=6\times6\times6\times6$. وبهذا $P(A^c)=N(A^c)/N=5^4/6^4$. ومنه:

$$P(A)=1-P(A^c)=1-625/1296=671/1296\approx0.52$$

مثال12.4:ما هو احتمال أن يكون على الأقل طالبين في فوج يتكون من n طالب لهما نفس تاريخ الميلاد؟ وأوجد القيم العددية للاحتمالات من أجل $n=23,30,50,60$. افترض أن معدل المواليد ثابت خلال العام ويوجد 365 يوم في السنة.

الحل: يوجد 365 إمكانية لتاريخ الميلاد لكل طالب في الفوج (عدد الطلبة في الفوج هو n). وبهذا فضاء العينة يحتوي على 365^n نقطة. في نقاط العينة هذه يوجد $365\times364\times363\times\cdots\times[365-(n-1)]$ طريقة ممكنة لا يتصادف فيها طالبين لهما نفس تاريخ الميلاد. إذن $P(n)$ الذي يمثل احتمال أن لا يوجد طالبين لهما نفس تاريخ الميلاد في فوج مكون من n طالب يساوي:

$$P(n)=\frac{365\times364\times363\times\cdots\times[365-(n-1)]}{365^n}.$$

وبهذا الاحتمال المطلوب هو $1-P(n)$، ومن أجل $n=23,30,50,60$ الاحتمالات المطلوبة هي: $P(23)=0.507$، $P(30)=0.706$، $P(50)=0.970$، $P(60)=0.995$.

مثال13.4: بافتراض أن تاريخ ميلاد أحد الأشخاص هو 12 جوان، كما نفترض أيضا أن معدل المواليد ثابت خلال العام ويوجد 365 يوم في السنة. حتى يكون لهذا الشخص فرصة 50% لمقابلة شخص على الأقل له نفس تاريخ الميلاد، ما هو عدد الأشخاص الذين يجب عليه مقابلتهم بطريقة عشوائية؟

الحل: ليكن n يمثل أقل عدد من الأشخاص من المفترض مقابلتهم. وبهذا فضاء العينة يحتوي على 365^n نقطة. من بينها 364^n حالة يكون فيها ولا أحد من بين الأشخاص تاريخ ميلاده هو 12 جوان. إذن احتمال أن لا يوجد شخص يشترك مع هذا الشخص في تاريخ الميلاد هو $364^n/365^n$. ومنه الاحتمال $1-(364^n/365^n)$ يمثل

احتمال أن يكون على الأقل شخص واحد من بين n شخص الذين يقابلهم تاريخ ميلاده هو 12 جوان. إذن يجب أن يكون:

$$1-\frac{364^n}{365^n}\geq 0.5$$

ومنه:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n\leq 0.5$$

وهذا يعطينا: $n\ln(364/365)\leq \ln(0.5)$ ، إذن $n\geq 252.65$. وبهذا يحتاج هذا الشخص إلى مقابلة 253 شخص عشوائيا حتى تكون هناك فرصة 50% لمقابلة شخص على الأقل له نفس تاريخ الميلاد، 12 جوان.

مبرهنة 05: إذا كان $A\subseteq B$ إذن:

$$P(B-A)=P(BA^c)=P(B)-P(A)$$

البرهان:

$$A\subseteq B\Rightarrow\ B=(B-A)\cup A$$

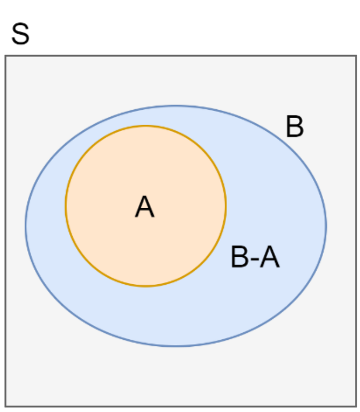
نعلم أيضا أن A و $B-A$ حدثان متنافيان وبهذا: $(B-A)A=\phi$. من خلال ما سبق يكون:

$$P(B)=P((B-A)\cup A)=P(A-B)+P(A)$$
$$\Rightarrow\ P(A-B)=P(B)-P(A)$$

وهذا يعطينا: $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

مبرهنة 06: إذا كان $A\subseteq B$ إذن: $P(A)\leq P(B)$

البرهان: من خلال المبرهنة السابقة لدينا: $P(B-A)=P(B)-P(A)$ ، ولدينا أيضا: $P(B-A)\geq 0$، إذن: $P(B)-P(A)\geq 0$ وبهذا: $P(A)\leq P(B)$.



من خلال الشكل أعلاه لاحظ أن $A \subseteq B$ يستلزم أن $B = (B - A) \cup A$.

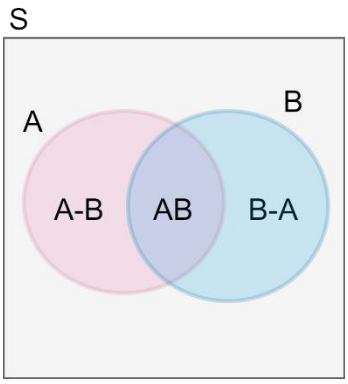
مبرهنة 07: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

البرهان: $A \cup B = A \cup (B - AB)$ (أنظر الشكل أدناه) و $A(B - AB) = \emptyset$ ، إذن A و $B - AB$ حدثان متنافيان، ومنه: $P(A \cup B) = P(A \cup (B - AB)) = P(A) + P(B - AB)$

وبما أن: $AB \subseteq B$، فإنه حسب المبرهنة السابقة:

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB)$$

وهذا يعطينا: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



مثال14.4: بافتراض أن مجتمع مكون من 400 فرد، 300 فرد منهم يمارسون رياضة ركوب الدراجات أو السباحة أو كليهما. 160 يمارسون رياضة السباحة و120 يمارسون رياضة السباحة وركوب الدراجات. تم اختيار فرد بطريقة عشوائية، ما هو احتمال أن يكون يمارس رياضة ركوب الدراجات؟

الحل: ليكن A يمثل حادث الفرد يمارس رياضة السباحة و B يمثل حادث الفرد يمارس رياضة ركوب الدراجات.
وبهذا $P(A \cup B) = 300/400$ ، $P(A) = 160/400$ و $P(AB) = 120/400$.

من خلال العلاقة $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ نستنتج:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) + P(AB) - P(A) \\ &= \frac{300}{400} + \frac{120}{400} - \frac{160}{400} = \frac{260}{400} = 0.65 \end{aligned}$$

مثال15.4:نختار عدد بطريقة عشوائية من المجموعة $\{1,2, \dots ,1000\}$. ما هو احتمال أن يكون العدد يقبل القسمة على 3 أو 5 أو كليهما.

الحل: عدد الأعداد الطبيعية المحصور بين 1 و N والتي تقبل القسمة على k تحسب من خلال قسمة N على k وتقريب القيمة بالنقصان إلى عدد طبيعي. إذا كان A هو حادث العدد المختار يقبل القسمة على 3 و B حادث

العدد المختار يقبل القسمة على 5. وبهذا $P(A) = 333/1000$ و $P(B) = 200/1000$. كما أن AB يمثل حادث العدد المختار يقبل القسمة على 3 و5 معا. والعدد يقبل القسمة على 3 و5 إذا وفقط إذا كان يقبل القسمة على 15 وبهذا نتحصل على $P(AB) = 66/1000$ (نقوم بقسمة 1000 على 15 ونقرب النتيجة بالنقصان نجد 66)، والإحتمال المطلوب يكون:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{333}{1000} + \frac{200}{1000} - \frac{66}{1000} = \frac{467}{1000} = 0.467 \end{aligned}$$

من خلال المبرهنة السابقة يمكننا حساب احتمال وقوع على الأقل حادث واحد من الحادثين A و B. ويمكننا أيضا حساب احتمال وقوع حادث على الأقل من بين الحوادث A_1، A_2، A_3 ... A_n.

فمن أجل الحوادث A_1، A_2 و A_3 :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \quad & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) \\ & -P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3) \end{aligned}$$

ومن أجل أربعة حوادث:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \quad & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1A_2) \\ & -P(A_1A_3) - P(A_1A_4) - P(A_2A_3) - P(A_2A_4) \\ & -P(A_3A_4) + P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) \\ & +P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \end{aligned}$$

مبرهنة 08: ليكن A و B حادثان من فضاء العينة S: $P(A) = P(AB) + P(AB^c)$.

البرهان: من الواضح أن $A = AS = A(B \cup B^c) = AB \cup AB^c$. كما أن AB و AB^c حدثان متنافيان إذن:

$$P(A) = P(AB \cup AB^c) = P(AB) + P(AB^c)$$

مثال16.4: في مجتمع، 32% من الأفراد ذكور مدخنين، 27% إناث مدخنين. ما هي نسبة الأفراد المدخنين في هذا المجتمع.

الحل: ليكن A هو حادث الفرد المختار بطريقة عشوائية من هذا المجتمع يدخن، و B حادث الفرد المختار ذكر. ومن خلال المبرهنة السابقة يكون: $P(A) = P(AB) + P(AB^c) = 0.32 + 0.27 = 0.59$.

إذن 59% من الأفراد في هذا المجتمع يدخنون.

2.4. الاحتمالات الشرطية:

لتقديم مفهوم الاحتمال الشرطي، نقوم في البداية بمعالجة المسألة التالية: بافتراض أن جميع الطلبة الجدد في كلية العلوم الاقتصادية درسوا مقياسي الاحصاء والرياضيات خلال السداسي الأول. كما نفترض أيضا أن 70% من الطلبة الجدد نجحوا في مقياس الإحصاء، 55% نجحوا في مقياس الرياضيات و 45% نجحوا في كلا المقياسين. إذا تم اختيار طالب من الطلبة الجدد بطريقة عشوائية ووجد أنه ناجح في مقياس الإحصاء، ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب ناجح أيضا في مقياس الرياضيات؟

ليكن A يمثل حادث "الطالب ناجح في مقياس الإحصاء" و B يمثل حادث "الطالب ناجح في مقياس الرياضيات". ما يمكن ملاحظته هنا هو أن $P(B)$ لا يمثل الاحتمال المطلوب في هذه المسألة، والذي قيمته 0.55. لأنه من خلال هذه المسألة لدينا معلومة إضافية متمثلة في تحقق الحادث A والذي من الممكن أن يؤثر في فرص تحقق الحادث B. ولإيجاد الاحتمال المرغوب فيه، والذي يكتب كما يلي $P(B/A)$، وهو الاحتمال الشرطي لتحقق الحادث B علما أن الحادث A قد تحقق. ليكن n يمثل العدد الكلي للطلبة الجدد. وبهذا $n(0.7)$ هو عدد الناجحين في مقياس الإحصاء و $n(0.45)$ هو عدد الطلبة الناجحين في كلا المقياسين. وبهذا $n(0.7)$ من الطلبة الجدد نجحوا في الإحصاء ومن بينهم $n(0.45)$ نجحوا أيضا في مقياس الرياضيات. إذا الطالب الذي تم اختياره بطريقة عشوائية هو واحد من بين $n(0.7)$ فما هو احتمال أن يكون واحد من بين $n(0.45)$ الذين نجحوا أيضا في مقياس الرياضيات. من الواضح أن هذا الاحتمال المطلوب يساوي $(0.45)n/(0.7)n = 0.45/0.7$ ، ومنه:

$$P(B/A) = \frac{0.45}{0.7}$$

لكن 0.45 تمثل $P(AB)$ و 0.7 تمثل $P(A)$، إذا من خلال هذه المسألة يمكن استنتاج أن:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

وكمثال آخر، نفترض أن أحد الحافلات تصل يوميا إلى أحد المحطات في وقت عشوائي خلال الفترة الممتدة من الساعة الواحدة إلى الساعة الواحدة والنصف. بافتراض أن الساعة الآن تشير إلى الساعة الواحدة وعشر دقائق والحافلة لم تصل بعد إلى المحطة. المطلوب إيجاد احتمال أن تصل الحافلة خلال العشر دقائق الموالية.

ليكن A يمثل حادث وصول الحافلة إلى المحطة خلال الفترة الممتدة بين الساعة الواحدة وعشر دقائق والساعة الواحدة وعشرين دقيقة و B يمثل حادث وصول الحافلة إلى المحطة خلال الفترة الممتدة بين الساعة الواحدة وعشر دقائق والساعة الواحدة والنصف. إذن الاحتمال المرغوب فيه هو:

$$P(A/B) = \frac{20-10}{30-10} = \frac{\frac{20-10}{30-0}}{\frac{30-10}{30-0}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

تعريف: إذا كان $P(B) > 0$، الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث A علما أن الحادث B قد تحقق، ونرمز له بـ $P(A/B)$،هو :

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

إذا كان $P(B) = 0$ فإن العلاقة السابقة تكون بدون معنى، وبهذا الإحتمال الشرطي يكون معرف فقط إذا كان $P(B) > 0$. وتقرا الصيغة أعلاه الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث A علما أن الحادث B قد وقع.

مثال17.4: نعتبر تجربة رمي قطعتي نرد، ونفرض أن A يمثل حادث ظهور الرقم 2على الأقل مرة واحدة، وB يمثل حادث مجموع النتيجتين يساوي 6. والمطلوب حساب $P(A/B)$ ، $P(B/A)$.

الحل:

$S = \{(i,j): 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\}$

$A = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$

$B = \{(1,5), (2,6), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$P(A) = 11/36$, $P(B) = 5/36$, $P(AB) = 2/36 = 1/18$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11}$$

مبرهنة 09: لتكن S فضاء عينة لتجربة، وليكن B حادث مع $P(B) > 0$ ، إذن:

1. $P(A/B) \geq 0$ من أجل أي حادث A من S .
2. $P(S/B) = 1$.
3. إذا كانت A_1، A_2، ... حوادث متنافية مثنى مثنى فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i/B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i/B)$$

من خلال المبرهنة السابقة يمكن استنتاج مجموعة من الخواص من أجل أي حادث B حيث $P(B) > 0$:

1. $P(\emptyset/B) = 0$.
2. $P(A^c/B) = 1 - P(A/B)$.
3. إذا كان $C \subseteq A$ فإن $P(AC^c/B) = P(A - C/B) = P(A/B) - P(C/B)$.

4. إذا كان $C \subseteq A$ فإن $P(C/B) \leq P(A/B)$.

5. $P(A \cup C/B) = P(A/B) + P(C/B) - P(AC/B)$.

6. $P(A/B) = P(AC/B) + P(AC^c/B)$.

ملاحظة 01: العلاقة: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ يمكن أن تستخدم أيضا في حساب $P(AB)$. فإذا تم ضرب طرفي العادلة في $P(B)$ (مع الأخذ بعين الإعتبار أن $P(B) > 0$) نجد:

$$P(AB) = P(B)P(A/B)$$

وهذا يعني أن احتمال تحقق الحادثين A و B معا هو حاصل ضرب احتمال تحقق الحادث B والاحتمال الشرطي لتحقق الحادث A علما أن الحادث B قد تحقق. وإذا كان $P(A) > 0$، بوضع $A = B$ و $B = A$ من خلال المعادلة أعلاه نجد:

$$P(BA) = P(A)P(B \mid A)$$

كما أن $P(BA) = P(AB)$، وبهذا نتحصل على العلاقة التالية:

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

وبهذا لحساب $P(AB)$ نستخدم أحد العلاقتين السابقتين، وهذا يتوقف على أي الاحتمالين $P(A \mid B)$ و $P(B \mid A)$ معلوم. والمثال التالي يوضح كيفية استخدام العلاقتين.

مثال18.4: نفترض أنه لدينا 7 وحدات من منتوج معين، 5 وحدات منها سليمة، من أجل إيجاد الوحدات الفاسدة، نقوم باختبار هذه الوحدات الواحدة تلوى الأخرى، ويتم اختيار الوحدات من أجل الاختبار بطريقة عشوائية وبدون ارجاع. ما هو احتمال إيجاد الوحدتين الفاسدتين في أول اختبارين.

الحل: ليكن D_1 و D_2 يمثلان حادث إيجاد الوحدتين الفاسدتين في الاختبارين الأول والثاني على التوالي. وبهذا الاحتمال المطلوب يكون هو $P(D_1D_2)$ ، وبإستخدام قاعدة الضرب نجد:

$$P(D_1D_2) = P(D_1)P(D_2 \mid D_1) = \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$$

يمكن تعميم قاعدة الضرب لحساب احتمال تحقق ثلاث حوادث معا، فإذا كان $P(AB) > 0$، فإن:

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB)$$

وهذه العلاقة نتحصل عليها من خلال المعادلة أدناه، باعتبار أن $P(AB) > 0$ والذي يستلزم أن يكون $P(A) > 0$، إذن:

$$P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB) = P(A)\frac{P(AB)}{P(A)}\frac{P(ABC)}{P(AB)} = P(ABC)$$

كما يكن أيضا تعميم قاعدة الضرب في الحالة العامة، فإذا كان $P(A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}) > 0$، فإن:

$$P(A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1}A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) \cdots P(A_n \mid A_1A_2A_3 \cdots A_{n-1})$$

3.4. الاستقلالية:

ليكن A و B حادثان من فضاء العينة S، ونفترض أن $P(A) > 0$ و $P(B) > 0$ ، لقد رأينا بشكل عام أن الاحتمال الشرطي لتحقق الحادث A علما أن B قد تحقق لا يساوي احتمال تحقق A. بينما إذا تحقق أي عندما يكون $P(A/B) = P(A)$ نقول عندئذ أن الحادث A مستقل عن الحادث B. هذا يعني أنه إذا كان A مستقل عن B، فإن المعلومة الملاحظة حول تحقق الحادث B لم تغير في فرصة تحقق الحادث A. والعلاقة $P(A/B) = P(A)$ مكافئة للعلاقات التالية: $P(AB)/P(B) = P(A)$ ، $P(AB) = P(A)P(B)$ ، $P(BA)/P(A) = P(B)$ و $P(B/A) = P(B)$. تكافؤ العلاقة الأولى مع العلاقة الأخيرة يعني أنه إذا كان A مستقل عن B فإن B مستقل عن A. وبعبارة أخرى إذا كانت المعلومة الملاحظة حول تحقق B لم تغير في فرصة تحقق A ، فإن المعلومة الملاحظة حول تحقق A لن تغير أيضا في فرصة تحقق B. وكنتيجة لهذا بدلا من تقديم تعريف لـ " A مستقل عن B" وتعريف آخر لـ " B مستقل عن A"، فإننا نقدم تعريف بسيط واحد للعبارة "استقلالية A و B". ومن أجل ذلك نأخذ $P(AB) = P(A)P(B)$ كتعريف لذلك. بالإضافة إلى ذلك العلاقتان $P(A/B) = P(A)$ و$P(B/A) = P(B)$ تتطلبان افتراض أن $P(A) > 0$ أو $P(B) > 0$ بينما في تعريفنا لا يتطلب ذلك.

تعريف: نقول عن حادثين A و B أنهما مستقلان إذا كان:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

من الملاحظ أنه من خلال التعريف لم نشترط أن يكون $P(A) > 0$ و $P(B) > 0$. بينما من خلال هذا التعريف أي حادث A بإحتمال تحقق $P(A) = 0$ أو $P(A) = 1$ هو حادث مستقل عن أي حادث B.

مثال19.4: في تجربة إلقاء قطعة نقود متزنة مرتين، ليكن A و B حادثين يمثلان الحصول على الوجه heads في الرمية الأولى والثانية، على التوالي. من الملاحظ أن A مستقل عن B. ومن أجل برهان ذلك رياضيا، لدينا $P(A) = 1/2$ و $P(B) = 1/2$. لكن فضاء العينة لهذه التجربة يتكون من أربعة نتائج لها نفس فرصة الوقوع هذه النتائج هي HH ، HT ، TH و TT. لدينا $P(AB) = P(HH) = 1/4$. وبهذا العلاقة $P(AB) = P(A)P(B)$ محققة وهذا يستلزم أن A و B حادثان مستقلان.

مثال20.4: صندوق به 5 كرات حمراء و7زرقاء. نفترض أنه تم سحب كرتين على التوالي بطريقة عشوائية وبالإرجاع. وليكن A و B حادثان يمثلان سحب كرة حمراء في السحب الأول والثاني على التوالي. إذن بإستخدام مبدأ العد نتحصل على $P(AB) = (5 \times 5)/(12 \times 12)$. وبهذا العلاقة $P(AB) = P(A)P(B)$ محققة لأن $P(A) = 5/12$ و $P(B) = 5/12$. إذن A و B مستقلان. وفي المقابل إذا قمنا بنفس التجربة لكن السحب يكون بدون إرجاع فإن $P(B \mid A) = 4/11$ بينما:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c) \\ &= \frac{4}{11} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{11} \times \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

إذن $P(B \mid A) \neq P(B)$، وهذا يستلزم أن A و B غير مستقلين.

مثال21.4: في تجربة اختيار عدد عشوائي من مجموعة الأعداد الطبيعية $\{1,2,3, \dots ,100\}$، ليكن A ، B و C تمثل حوادث اختيار عدد يقبل القسمة على 2، 3 و5 على التوالي. من الواضح أن $P(A) = 1/2$ ، $P(B) = 33/100$ ، $P(C) = 1/5$ ، $P(AB) = 16/100$ و$P(AC) = 1/10$. وبهذا A و B حدثان مستقلان بينما A و C غير مستقلان.

مبرهنة 10: إذا كان A و B حادثان مستقلين، فإن A و B^c أيضا مستقلان.

البرهان: مما سبق نعلم أن:

$$P(A) = P(AB) + P(AB^c)$$

وبهذا:

$$\begin{aligned} P(AB^c) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

مبرهنة 11: إذا كان A و B حادثان مستقلين، فإن A^c و B^c أيضا مستقلان.

البرهان: إذا كان A و B حادثان مستقلين إذن باستخدام المبرهنة السابقة يكون A وB^c مستقلان. وباستخدام نفس المبرهنة للمرة الثانية نتحصل على أن A^c و B^c مستقلين.

وبهذا إذا كان A و B حادثان مستقلين فإن المعلومة الملاحظة حول تحقق أو عدم تحقق الحادث A لن تغير في فرص تحقق أو عدم تحقق الحادث B. والعكس صحيح.

ملاحظة 02: إذا كان A و B حادثان متنافيان و $P(A)>0$ ، $P(B)>0$ فإن الحادثان غير مستقلين (مرتبطين). لأنه إذا علمنا أن أحد الحادثين قد تحقق فإن فرصة تحقق الحادث الآخر تكون معدومة. لأن تحقق أحد الحادثين يلغي تحقق الآخر.

نقوم الآن بتوسيع مفهوم الاستقلالية على ثلاث حوادث. ونقول عن الحوادث A ، B و C أنها مستقلة إذا كانت المعلومة المتعلقة بتحقق أي حادث من الحوادث الثلاثة أو تحقق أي حادثين منها معا لا يؤثر في فرص تحقق الحوادث المتبقية. وهذا يعني أن الحوادث A ، B و C تكون مستقلة إذا كانت $\{A,B\}$، $\{A,C\}$، $\{B,C\}$، $\{A,BC\}$، $\{B,AC\}$ و $\{C,AB\}$ كلها مجموعات من الحوادث المستقلة. وبهذا A ، B و C حوادث مستقلة إذا كان:

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(A(BC)) &= P(A)P(BC) \\ P(B(AC)) &= P(B)P(AC) \\ P(C(AB)) &= P(C)P(AB) \end{aligned}$$

كما أنه بالإمكان تقليص العلاقات أعلاه، لأن العلاقات الثلاثة الأخيرة تكون محققة ضمنيا إذا تحققت العلاقات الثلاثة الأولى مع العلاقة $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$. وبهذا تعريف استقلالية ثلاث حوادث يمكن أن يختصر كما هو موضح في التعريف الموالي.

تعريف: نقول عن الحوادث A ، B و C أنها مستقلة إذا كان:

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(ABC) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

إذا كان A ، B و C حوادث مستقلة، فإننا نقول عن المجموعة $\{A,B,C\}$ أنها مجموعة حوادث مستقلة.

من خلال المثال الموالي نبين أنه إذا كان $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ ، بصفة عامة فإن هذا لا يستلزم أن تكون $\{A,B,C\}$ مجموعة حوادث مستقلة.

مثال22.4:بافتراض تجربة إلقاء قطعة نرد مرتين. ليكن A يمثل حادث الحصول على 1، 2 أو 5 في الرمية الثانية، B يمثل حادث الحصول على 4، 5 أو 6 في الرمية الثانية، و C يمثل حادث مجموع نتائج الرميتين يساوي 9. وبهذا $P(A)=P(B)=1/2$ ، $P(C)=1/9$ ، أيضا:

$$P(AB) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$
$$P(AC) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = P(A)P(C)$$
$$P(BC) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = P(B)P(C)$$

في حين أن:

$$P(ABC) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)P(C)$$

إذن تحقق العلاقة $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ يعتبر شرط غير كاف لاستقلالية الحوادث A ، B و C.

4.4. نظرية الاحتمال الكلي:

في بعض الحالات يكون من غير الممكن حساب احتمال تحقق الحادث A بطريقة مباشرة. ففي الحالات التي تكون فيها الاحتمالات $P(B)$ ، $P(A/B)$ ، $P(A/B^c)$ معلومة فإن المبرهنة الموالية تساعدنا في حساب هذا الاحتمال $P(A)$.

مبرهنة 12: (**نظرية الاحتمال الكلي**) ليكن B حادث مع $P(B) > 0$ و $P(B^c) > 0$. من أجل أي حادث A يكون:

$$P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c)$$

البرهان:

من خلال ما سبق لدينا: $P(A) = P(AB) + P(AB^c)$

إذا كان: $P(B) > 0$ و $P(B^c) > 0$ فإن: $P(AB) = P(A/B)P(B)$ و $P(AB^c) = P(A/B^c)P(B^c)$. بالتعويض نجد:

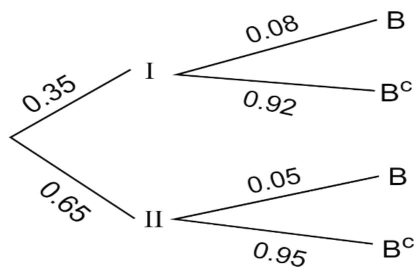
$$P(A) = P(AB) + P(AB^c) = P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c)$$

مثال23.4: في شركة تأمين، 35% من السيارات المؤمنة من طرف هذه الشركة تم تأمينها من طرف الوكالة I و 65% من السيارات مؤمنة في الوكالة II. بافتراض أن 8% من السيارات المؤمنة من طرف الوكالة I و 5% من السيارات المؤمنة من طرف الوكالة II تعرضوا لحادث خلال فترة التأمين. ما هو احتمال أن تتعرض سيارة مؤمنة في هذه الشركة لحادث خلال فترة التأمين؟

الحل: ليكن B يمثل حادث تعرض السيارة المؤمنة من طرف الشركة لحادث خلال فترة التأمين. وليكن I و II حادثي تأمين السيارة من طرف الوكالتين I و II على التوالي. وباستخدام نظرية الاحتمال الكلي نجد:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/\mathrm{I})P(\mathrm{I}) + P(B/\mathrm{II})P(\mathrm{II}) \\ &= (0.08)(0.35) + (0.05)(0.65) = 0.0605 \end{aligned}$$

كما يستخدم أيضا المخطط الشجري من أجل تسهيل حساب الاحتمالات في هذا النوع من المسائل، وهو موضح في الشكل الموالي:



مبرهنة 13: إذا كانت $\{B_1, B_2, \dots . B_n\}$ تشكل تجزئة لفضاء العينة الخاص بتجربة عشوائية و $P(B_i) > 0$ حيث $i = 1,2, \dots, n$ ، فإنه من اجل أي حادث A من S يكون:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \cdots + P(A/B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i)P(B_i). \end{aligned}$$

وبصيغة أكثر تعميما إذا كانت $\{B_1, B_2, \dots\}$ متتابعة من حوادث متنافية مثنى مثنى من S حيث $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = S$. بافتراض أن $P(B_i) > 0$ حيث $i \geq 1$. إذن من أجل أي حادث A من S فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i)P(B_i).$$

البرهان: إذا كانت B_1 ، B_2 ، .... ، B_n حوادث متنافية مثنى مثنى و $B_iB_j = \emptyset$ من أجل $i \neq j$ ، فإن $(AB_i)(AB_j) = \emptyset$ من أجل $i \neq j$. وبهذا $\{AB_i, AB_2 \dots, AB_n\}$ مجموعة حوادث متنافية مثنى مثنى. إذن:

$$S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

وهذا يعطينا:

$$A = AS = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$$

وبهذا:

$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$

لكن: $P(AB_i) = P(A/B_i)P(B_i)$ من أجل $i = 1,2, \dots, n$ ، إذن:

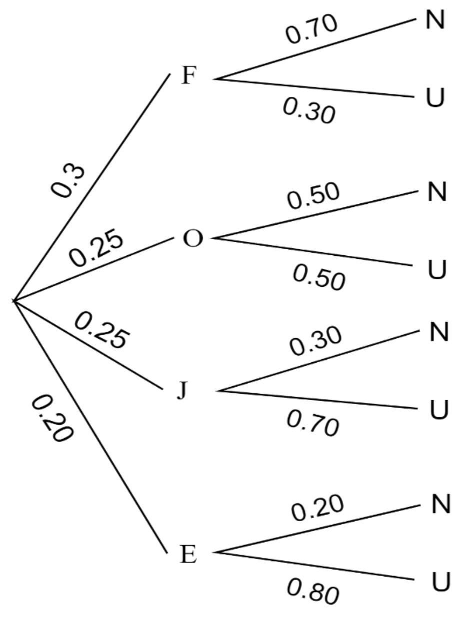
$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \cdots + P(A/B_n)P(B_n).$

مثال24.4: نفترض أن 80% من طلبة السنة الرابعة، 70% من طلبة السنة الثالثة، 50% من طلبة السنة الثانية و 30% من طلبة السنة الأولى في أحد الكليات بالجامعة يستخدمون المكتبة بشكل منتظم. إذا كان 30% من مجموع الطلبة هم طلبة طلبة في السنة الأولى، 25% طلبة في السنة الثانية، 25% طلبة في السنة الثالثة و20% طلبة في السنة الرابعة. ما هو نسبة الطلبة الذين يستخدمون المكتبة بشكل منتظم.

الحل: لتكن U يمثل حادث الطالب الذي تم اختياره بطريقة عشوائية يستخدم المكتبة بإنتظام. وليكن F ، O ، J و E تمثل حوادث الطالب في السنة الأولى، الثانية، الثالثة والرابعة على التوالي. إذن $\{F, O, J, E\}$ تشكل تجزئة لفضاء العينة، وبهذا:

$$\begin{aligned} P(U) &= P(U/F)P(F) + P(U/O)P(O) + P(U/J)P(J) + P(U/E)P(E) \\ &= (0.30)(0.30) + (0.50)(0.25) + (0.70)(0.25) + (0.80)(0.20) = 0.55 \end{aligned}$$

إذن هناك 55% من الطلبة يستخدمون المكتبة بشكل منتظم، ونفس النتيجة يمكن التحصل عليها من خلال المخطط الشجري في الشكل أدناه، حيث U تمثل حادث الطالب يستخدم المكتبة بشكل منتظم و N يمثل الحادث العكسي له.



5.4. صيغة بايز Bayes' formula:

لتقديم صيغة بايز، نقوم في البداية بمعالجة المسألة التالية. في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية، 30%،50% و 20% من الإنتاج الكلي يتم تصنيعه بواسطة الآلات I ، II و III على التوالي. وإذا كان 4% ، 5% و 3% من إنتاج هذه الآلات معيبة، ما هو احتمال أن مصباح كهربائي تم سحبه بطريقة عشوائية ووجد أنه معيب قد تم صناعته في الآلة III؟

لحل هذه المسألة، لنفترض أن A يمثل حادث المصباح الكهربائي معيب وأن يكون B_3 يمثل حادث المصباح الكهربائي مصنوع من طرف الآلة III. والاحتمال المطلوب هو $P(B_3/A)$.

لدينا:

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3A)}{P(A)} \quad \ldots.(1)$$

إذن لحساب $P(B_3 \mid A)$ نحتاج لمعرفة $P(B_3A)$ و $P(A)$. لكن كلا الإحتمالين غير معروفين. لكننا من خلال معطيات المسألة الإحتمالين $P(A \mid B_3)$ و $P(B_3)$ معلومين، لذلك نستخدم العلاقة:

$$P(B_3A) = P(A/B_3)P(B_3) \quad \ldots(2)$$

لحساب $P(B_3A)$. ومن أجل حساب $P(A)$ نستخدم قانون الاحتمال الاحتمال الكلي. لذلك لتكن B_1 و B_2 يمثلان حادث المصباح الكهربائي مصنوع من طرف الآلتين I وII على التوالي. وبهذا $\{B_1, B_2, B_3\}$ تشكل تجزئة لفضاء العينة، إذن:

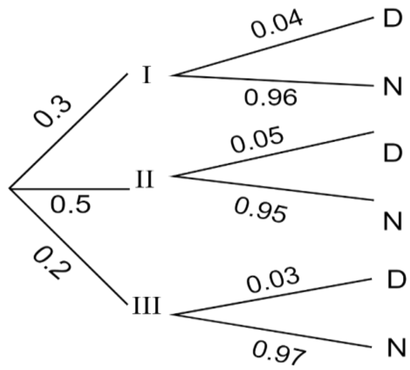
$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(BB_2) + P(A/B_3)P(B_3) \quad \ldots(3)$$

بتعويض المعادلتين (2) و(3) في المعادلة (1) نتحصل على صيغة بايز والتي تسمح لنا بحساب $P(B_3 \mid A)$:

$$\begin{aligned} P(B_3/A) &= \frac{P(B_3A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A/B_3)P(B_3)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(BB_2) + P(A/B_3)P(B_3)} \quad \ldots..(4) \\ &= \frac{(0.03)(0.20)}{(0.04)(0.30) + (0.05)(0.50) + (0.03)(0.20)} = 0.14 \end{aligned}$$

العلاقة (4) هي حالة خاصة من الصيغة العامة لصيغة بايز.

الشكل الموالي يمثل المخطط الشجري لهذه المسألة باعتبار أن D يمثل حادث المصباح الكهربائي معيب وN يمثل الحادث العكسي له (أي المصباح الكهربائي سليم). ولإيجاد الاحتمال المرغوب نقوم بإيجاد احتمال المسار المرغوب فيه، المسار من III إلى D، ونقوم بقسمته على مجموع احتمالات المسارات التي يتحقق فيها الحادث D.



مبرهنة 14: (مبرهنة بايز) لتكن $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ تجزئة لفضاء العينة S لتجربة عشوائية. إذا كان $P(B_i) > 0$ من أجل $i = 1,2, \dots, n$ ، وأيضا من أجل أي حادث A من S مع $P(A) > 0$ ، فإن:

$$P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \cdots + P(A/B_n)P(B_n)} \dots (1)$$

ومن أجل أي حادث B من S ، حيث $B \neq \emptyset$ و $B^c \neq \emptyset$، وبهذا المجموعة $\{B, B^c\}$ تشكل تجزئة لـ S، إذن من خلال المعادلة (1) : إذا $P(B) > 0$ و $P(B^c) > 0$، فإنه من أجل أي حادث A من S مع $P(A) > 0)$:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c)}$$

وبالمثل:

$$P(B^c/A) = \frac{P(A/B^c)P(B^c)}{P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c)}$$

تعتبر المعادلتين السابقتين أبسط صيغ بايز. وتستخدمان عندما تكون الاحتمالات $P(A \mid B)$ ، $P(A/B^c)$ و $P(B)$ معطاة أو بالإمكان حسابها.

مثال25.4: صندوق به 7 كرات حمراء و13 كرة زرقاء. تم اختيار كرتين على التوالي بطريقة عشوائية وتم استبعادهم بدون ملاحظة لون الكرتين. إذا تم سحب كرة ثالثة وكان لونها أحمر. ما هو احتمال أن يكون لون كلا الكرتين المستبعدتين أزرق؟

الحل: لتكن BB ، BR و RR تمثل حوادث الكرتين المسحوبتين والتي هي زرقاء مع زرقاء، زرقاء مع حمراء، حمراء مع حمراء على التوالي. أيضا لتكن R يمثل حادث الكرة الثالثة المسحوبة حمراء.

المجموعة $\{BB, BR, RR\}$ تشكل تجزئة لفضاء العينة، وبهذا يمكن استخدام صيغة بايز لحساب $P(BB/R)$، إذن:

$$P(BB/R) = \frac{P(R/BB)P(BB)}{P(R/BB)P(BB) + P(R/BR)P(BR) + P(R/RR)P(RR)}$$

حيث:

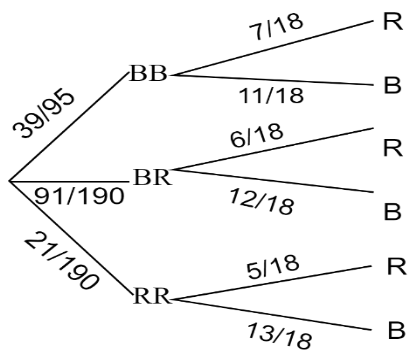
$$P(BB) = \frac{13}{20} \times \frac{12}{19} = \frac{39}{95},\ P(RR) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} = \frac{21}{190}$$

$$P(BR) = \frac{13}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{7}{20} \times \frac{13}{19} = \frac{91}{190}$$

يمثل الحادث BR الخاص بالمعادلة الأخيرة اتحاد حادثين هما: حادث سحب كرة زرقاء والثانية حمراء وحادث سحب كرة حمراء ثم كرة زرقاء، وبهذا:

$$P\left(\frac{BB}{R}\right) = \frac{\frac{7}{18} \times \frac{39}{95}}{\frac{7}{18} \times \frac{39}{95} + \frac{6}{18} \times \frac{91}{190} + \frac{5}{18} \times \frac{21}{190}} = 0.46.$$

هذه النتيجة بالإمكان إيجادها أيضا باستخدام المخطط الشجري المعروض في الشكل أدناه.



المحــــور 🕮 الخامـــس

المتغيـــرات العشوائيــــة

5. المحور الخامس: المتغيرات العشوائية

1.5. المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي:

1.1.5. المتغير العشوائي وأنواعه:

نعتبر تجربة إلقاء قطعة نقدية متزنة 5 مرات متتالية، فضاء العينة لهذه التجربة يحتوي على 32 نتيجة ممكنة معرفة كما يلي:

$$S = \{(T,T,T,T,T),(H,T,T,T,T),(T,H,T,T,T),\ldots,(H,H,H,H,H)\}$$

نفترض الآن أننا نريد دراسة عدد المرات التي نتحصل فيها على الوجه $Head$ في هذه التجربة. في هذه الحالة نقوم بتعريف دالة (تابع) على فضاء العينة لهذه التجربة لحساب عدد المرات التي نحصل فيها على الوجه $Head$. هذه الدالة تعطينا عددا صحيحا من 0 إلى 5 لكل نتيجة ممكنة من عناصر فضاء العينة. فإذا كان X يمثل هذه الدالة فإن:

$$X(T,T,T,T,T) = 0;\ \ X(T,H,T,T,T) = 1;\ \ X(T,H,T,T,T) = 1\,;\ldots;X(H,H,H,H,H) = 5$$

وبهذا مجموعة القيم الممكنة R_X لهذه الدالة هي: $R_X = \{0,1,2,3,4,5\}$. ويمكن القول إن هذه المجموعة أيضا تمثل فضاء العينة. بالإضافة إلى ذلك من بين مزاياها مقارنة بفضاء العينة الأصلي هو أنها تأخذ بعين الاعتبار المشكل المراد دراسته (تحليل عدد المرات التي نتحصل فيها على الوجه $Head$) ولهذا تم عرض فضاء العينة بطريقة أكثر ملاءمة. ومن خلال هذا إذا قمنا بعرض فضاء العينة بهذه الطريقة فإنه يظهر في شكل قيم عددية. ويكون أيضا ملائم لإجراء تحليل رياضي على فضاء العينة المعروض في شكل قيم عددية. وعلى سبيل المثال، يمكننا حساب متوسط عدد مرات ظهور الوجه $Head$.

في أغلب الأحيان، عند إجراء التجربة العشوائية يكون من الملائم دراسة دالة (تابع) مخرجات هذه التجربة بدلا من دراسة نتائج هذه التجربة العشوائية، إذا كانت نتائج هذه الدالة في شكل عددي، نسميها متغير عشوائي. وبهذا نعرف المتغير العشوائي كما يلي:

تعريف: المتغير العشوائي هو دالة عددية معرفة على فضاء العينة تعين قيمة عددية لكل عنصر من عناصر فضاء العينة.

بعد تعريف المتغير العشوائي نقوم الآن بتحديد الاحتمال الخاص بكل حالة من حالات المتغير العشوائي، فمن خلال مثالنا السابق كل نتيجة ممكنة (32 نتيجة ممكنة) من فضاء العينة لها نفس فرصة الظهور. كما نلاحظ أنه هناك حالة واحدة من بين النتائج الممكنة لا يظهر فيها الوجه $Head$ ($X = 0$)، وبهذا احتمال أن المتغير العشوائي X (عدد المرات التي نتحصل فيها على الوجه $Head$) يأخذ القيمة 0 يساوي $\frac{1}{32}$. بالإضافة إلى

ذلك يوجد 5 حالات من فضاء العينة يظهر فيها الوجه $Head$ مرة واحدة $(X = 1)$. ونتيجة لهذا احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X القيمة 1 يساوي $\frac{5}{32}$. وبطريقة مماثلة نتحصل على:

$$P(X=0)=\frac{1}{32}, \quad P(X=1)=\frac{5}{32}, \quad P(X=2)=\frac{10}{32}, \quad P(X=4)=\frac{5}{32}, \quad P(X=5)=\frac{1}{32}$$

كما يجب ملاحظة أن:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$$

كما يمكننا أيضا صياغة هذه الاحتمالات في شكل علاقة رياضية كما يلي:

$$P(X=x)=\frac{\binom{5}{x}}{32} \quad ; \quad x=0,1,2,\dots,5$$

هذه الدالة التي تعرض لنا احتمال كل قيمة من القيم الممكنة للمتغير العشوائي نسميها الدالة الاحتمالية أو دالة الكتلة الاحتمالية.

$$S = \{\underbrace{(T,T,T,T,T)}, \underbrace{(H,T,T,T,T),(T,H,T,T,T),(T,T,H,T,T),(T,T,T,H,T),(T,T,T,T,H)}, \dots, \underbrace{(H,H,H,H,H)}\}$$

$$R_X = \{ \; 0, \quad 1, \quad \dots, \quad 5 \; \}$$

$$P(X=x) = \{ \; \frac{1}{32}, \quad \frac{5}{32}, \quad \dots, \quad \frac{1}{32} \; \}$$

مثال1.5: ليكن Y متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه $Heads$ المتحصل عليها عند رمي قطعة نقدية متزنة مرتين متتاليتين. وبهذا القيم الممكنة للمتغير العشوائي Y هي القيم: 0، 1، 2. أيضا:

$$P\{Y=0\}=P\{(T,T)\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{(T,H),(H,T)\}=\frac{2}{4},$$

$$P\{Y=2\}=P\{(H,H)\}=\frac{1}{4}.$$

كما يجب ملاحظة أن: $P\{Y=0\}+P\{Y=1\}+P\{Y=2\}=1$.

أنواع المتغيرات العشوائية: يمكن أن نميز بين نوعين من المتغيرات:

أ- **المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل):** يكون المتغير العشوائي X متقطع (منفصل) إذا كانت مجموعة تعريفه منتهية أو غير منتهية قابلة للعد.

ب- **المتغير العشوائي المستمر (المتصل):** يكون المتغير العشوائي X مستمر (متصل) إذا كانت مجموعة تعريفه غير منتهية وغير قابلة للعد.

مثال2.5: X متغير عشوائي معرف بمجموع الرقمين الظاهرين بعد إلقاء قطعة نرد مرتين.

لدينا: $R_X = \{2,3,4,\dots,12\}$ هذه المجموعة منتهية إذن X متغير عشوائي متقطع.

مثال3.5: X متغير عشوائي معرف بعدد الرميات اللازمة لقطعة نقدية إلى غاية أن نحصل على الوجه F للمرة الأولى.

لدينا: $R_X = \{2,3,4,\dots\} = N^*$ هذه المجموعة غير منتهية قابلة للعد إذن X متغير عشوائي متقطع.

مثال4.5: X متغير عشوائي كمية الامطار المتساقطة (بالملم) خلال السنة القادمة.

لدينا: $R_X = \{x: x \geq 0\}$ هذه المجموعة غير منتهية غير قابلة للعد إذن X متغير عشوائي مستمر.

2.1.5. التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع:

تعريف 01: ليكن X متغير عشوائي متقطع له مجموعة القيم الممكنة $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. نسمي دالة الكتلة الاحتمالية لـ X الدالة $p(x_i) = P(X = x_i)$ المعرفة من R_X نحو R .

تعريف 02: نسمي توزيع (أو قانون) احتمالي للمتغير العشوائي X مجموعة الأزواج التالية $\{(x_i, p_i)\}$ حيث: $x_i \in R_X$. عموما يقدم هذا التوزيع الاحتمالي في شكل جدول أو صيغة رياضية.

مثال5.5: صندوق به 5 كرات بيضاء و6 كرات سوداء. نختار بطريقة عشوائية 3 كرات من هذا الصندوق. إذا كان X يمثل عدد الكريات البيضاء المسحوبة. أوجد الدالة الاحتمالية.

الحل: فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية يحتوي على $\binom{11}{3}$ نتيجة ممكنة متساوية الفرص في الوقوع. وباعتبار أن X يمثل عدد الكريات البيضاء المسحوبة فإن مجموعة القيم الممكنة له هي: $R_X = \{0,1,2,3\}$، والدالة الاحتمالية للمتغير العشوائي X معرفة كما يلي:

$$P(X=0)=\frac{\binom{5}{0}\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}}=\frac{4}{33},\qquad P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{6}{2}}{\binom{11}{3}}=\frac{5}{11}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{6}{1}}{\binom{11}{3}}=\frac{4}{11},\qquad P(X=3)=\frac{\binom{5}{3}\binom{6}{0}}{\binom{11}{3}}=\frac{2}{33}$$

يمكن التعبير عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في شكل علاقة رياضية كما يلي:

$$P(X=x)=\frac{\binom{5}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{11}{3}};\qquad x=0,1,2,3$$

أو بصيغة أخرى في شكل جدول كما يلي:

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{33}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{33}$

مثال6.5: نرمي على التوالي قطعة نقدية متزنة إلى غاية الحصول على الوجه *Head* أو عندما يصبح مجموع عدد الرميات 4. ونعرف المتغيرات العشوائية X، Y ، Z كما يلي:

1. X: يمثل عدد مرات الرمي.
2. Y: يمثل عدد مرات ظهور الوجه *Tail*.
3. Z: عدد مرات ظهور الوجه *Head*.

والمطلوب إيجاد الدالة الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المعرفة أعلاه.

الحل: فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية معرفة كما يلي:

1. المتغير العشوائي X يمثل بعدد مرات الرمي. وكنتيجة لهذا، مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي 1، 2، 3، 4 والدالة الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$P(X=1)=\{H\}=\frac{1}{2}$$
$$P(X=2)=\{TH\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$P(X=3)=\{TTH\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$
$$P(X=4)=P\{TTTH\}+P\{TTTT\}=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

وبهذا يعطى قانون احتمال X في الجدول الموالي:

$X=x_i$	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. المتغير العشوائي Y يمثل عدد مرات ظهور الوجه $Tail$، وبهذا مجموعة القيم الممكنة له 0، 1، 2، 3، 4، والدالة الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$P(Y=0)=\{H\}=\frac{1}{2}$$
$$P(Y=1)=\{TH\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$
$$P(Y=2)=\{TTH\}=\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$
$$P(Y=3)=P\{TTTH\}=(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})=\frac{1}{16}$$
$$P(Y=4)=P\{TTTT\}=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$$

وبهذا يعطى قانون احتمال Y في الجدول الموالي:

$Y=y_i$	0	1	2	3	4
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

3. Z: عدد مرات ظهور الوجه $Head$، وبهذا مجموعة القيم الممكنة له 0، 1، والدالة الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$P(Z=0)=P\{TTTT\}=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$
$$P(Z=1)=P\{H\}+P\{TH\}+P\{TTH\}+P\{TTTH\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{16}$$

وبهذا يعطى قانون احتمال X في الجدول الموالي:

$Z=z_i$	0	1
$P(Z=z_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$

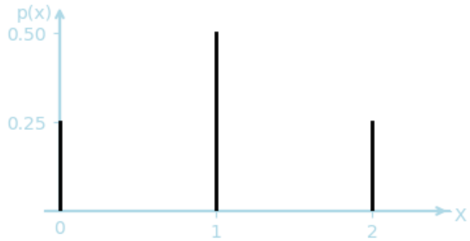
3.1.5. شروط دالة الكتلة الاحتمالية للمتغيرة المتقطعة:

ليكن X متغير عشوائي متقطع له مجموعة القيم الممكنة $R_X=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$. وله دالة كتلة احتمالية $p(x_i)$. دالة الكتلة الاحتمالية $p(x_i)$ يجب أن تحقق الشرطين التاليين:

1. $\forall i,\ p(x_i)=P(X=x_i)\geq 0$.
2. $\sum_{i=1}^{\infty}p(x_i)=1$.

4.1.5. التمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المتقطعة:

لتمثيل دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع بيانيا نستخدم خطوط عمودية تربط بين النقاط $(x_i, 0)$ و $(x_i, p(x_i))$. وعلى سبيل المثال، إذا كان X يمثل عدد الأوجه *heads* المتحصل عليها عند رمي قطعة نقود مرتين. وبهذا $X = 0,1,2$ مع $p(0) = 1/4$، $p(1) = 1/2$ و $p(2) = 1/4$. والتمثيل البياني للدالة p مقدم في الشكل الموالي:



مثال7.5: هل يمكن للدالة p المعرفة أدناه أن تكون دالة كتلة احتمالية حيث:

$$p(x) = \begin{cases} c\left(\frac{2}{3}\right)^x & x = 1,2,3,\dots \\ 0 & elsewhere \end{cases}$$

الحل:

دالة الكتلة الاحتمالية يجب أن تحقق الشرطين التاليين:

1. $p(x) \geq 0$ ، وهذا الشرط يتحقق في هذه الحالة عندما يكون $c \geq 0$.
2. $\sum p(x_i) = 1$.

هذه الشروط تكون محققة إذا وفقط إذا كان: $\sum_{i=1}^{\infty} c(2/3)^i = 1$ وبهذا:

$$c = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} (2/3)^i} = \frac{1}{\frac{2/3}{1-2/3}} = \frac{1}{2}$$

حيث مقام الطرف الثاني من المعادلة يمثل مجموع حدود متتالية هندسية. وبهذا تكون الدالة p دالة كتلة احتمالية إذا كان $c = 1/2$.

مثال8.5: الجدول أدناه يقدم التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X:

$X = x_i$	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0.2	0.3	0.4	0.1

والمطلوب التأكد من أن الجدول أعلاه يمثل توزيع احتمالي ثم مثله بيانيا؟

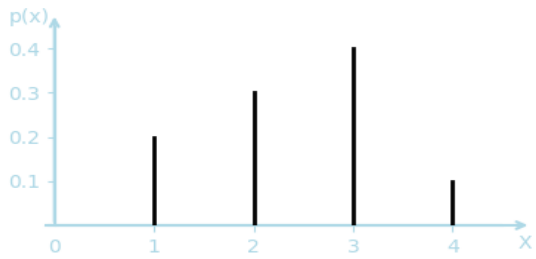
الحل:

دالة الكتلة الاحتمالية يجب أن تحقق الشرطين التاليين:

3. $p(x) \geq 0$ ، وهذا الشرط محقق لأن: $\forall x_i \in R_X: P(X = x_i) \geq 0$.
4. $\sum p(x_i) = 1$ ، وهذا الشرط أيضا محقق لأن:

$$\sum P(X = x_i) = 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.1 = 1$$

والتمثيل البياني للدالة p مقدم في الشكل الموالي:



مثال9.5: الجدول الموالي يوضح التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X:

$X = x_i$	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	k	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

والمطلوب إيجاد قيمة k حتى يكون الجدول أعلاه يمثل توزيع احتمالي ثم مثله بيانيا.

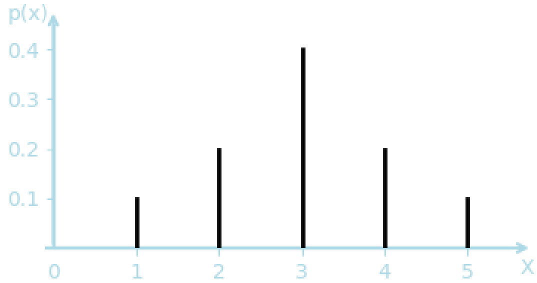
الحل:

دالة الكتلة الاحتمالية يجب أن تحقق الشرطين التاليين:

1. $p(x) \geq 0$ ، وهذا الشرط يتحقق في هذه الحالة عندما يكون $k \geq 0$.
2. $\sum p(x_i) = 1$ ، وهذا الشرط يكون محقق إذا كان:

$$\sum P(X = x_i) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + k + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = 1 \Rightarrow k = \frac{4}{10}$$

والتمثيل البياني للدالة p مقدم في الشكل الموالي:



5.1.5. دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المتقطعة

1. دالة التوزيع التراكمي $F(x)$:

تستخدم عادة المتغيرات العشوائية من أجل حساب الاحتمالات الخاصة بالحوادث. وعلى سبيل المثال، في تجربة رمي قطعة نرد مرتين. إذا كان اهتمامنا هو أن يكون مجموع النتيجتين على الأقل هو 8، نعرف متغير العشوائي X بأنه مجموع النتيجتين ونحسب الاحتمال $P(X \geq 8)$. وفيما بعض الأمثلة الأخرى:

1. إذا كانت الحافلة تصل إلى أحد المحطات في وقت عشوائي خلال الفترة الممتدة من الساعة العاشرة صباحا إلى العاشرة والنصف. وX يمثل وقت الوصول، إذن $X < 10\frac{1}{6}$ هو حادث وصول الحافلة قبل الساعة العاشرة وعشر دقائق.
2. إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الأوجه *heads* عند رمي قطعة نقدية 100 مرة. إذن $40 \leq X \leq 60$ هو حادث عدد الأوجه *heads* المحصل عليها على الأقل 40 وعلى الأكثر 60.
3. إذا كان X يمثل سعر السهم في يوم يتم اختياره بطريقة عشوائية، فإن $X \leq 400$ هو حادث سعر السهم يكون أقل من 400.

عادة عندما نتعامل مع متغير عشوائي X. فإننا نسعى إلى حساب أحد الاحتمالات التالية: $P(X = a)$، $P(X < a)$، $P(X \leq a)$، $P(X > b)$، $P(X \geq b)$، $P(b \leq X \leq a)$، $P(b \leq X < a)$، $P(b \leq X < a)$، $P(b < X < a)$. حيث a و b ثوابت و $(b < a)$. لهذا نقوم بحساب $P(X \leq t)$ من أجل $t \in]-\infty, +\infty[$.
فإذا كان الاحتمال $P(X \leq t)$ معروف من أجل $t \in \boldsymbol{R}$، فإنه من أجل أي قيمة لـ a و b كل الاحتمالات السابقة يمكن حسابها.

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي، فإن الدالة المعرفة على المجال $]-\infty, +\infty[$ بـ $F(t) = P(X \leq t)$ تسمى دالة التوزيع التراكمي لـ X.

2. خصائص مميزة للدالة $F(x)$:

1. بالتعريف، $\forall x \in R$، $0 \leq F(x) \leq 1$ (لأن $F(\cdot)$ هي احتمال)
2. $F(\cdot)$ هي دالة رتيبة غير متناقصة:

$$\forall x_1, x_2:\ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

3. $F(\cdot)$ هي دالة مستمرة على يمين كل نقطة x (غير مستمرة على يسار بعض النقاط $x \in R$):

$$\lim_{x \to a^+} F(x) = F(a)$$

4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

نظرية: كل دالة $F(x)$ التي تحقق الخصائص الأربعة السابقة هي دالة توزيع تراكمي لمتغير عشوائي حقيقي X.

تعريف: ليكن X متغير عشوائي متقطع له مجموعة القيم الممكنة $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ودالة كتلة احتمالية $p(x_i) = P(X = x_i)$. نسمي دالة التوزيع (التراكمي) للمتغير العشوائي X الدالة المعرفة كما يلي:

$$\forall x \in R, F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ x_i \in R_X}} P(X = x_i) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ x_i \in R_X}} P(x_i)$$

دالة التوزيع F للمتغير العشوائي المتقطع X، بمجموعة القيم الممكنة $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ هي دالة في شكل قفزات، فبافتراض أن $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ يكون:

إذا كان $t < x_1$: $F(t) = 0$

إذا كان $x_1 \leq t < x_2$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X = x_1) = p(x_1)$

إذا كان $x_2 \leq t < x_3$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X = x_1 \text{ or } X = x_2) = p(x_1) + p(x_2)$

وبصفة عامة إذا كان $x_{n-1} \leq t < x_n$:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n-1} p(x_i)$$

الدالة F تبقى ثابتة على المجال $[x_{n-1}, x_n[$ وتقفز عند القيم $x_1, x_2, x_3, \dots$ ومقدار القفزة عند x_i هو $p(x_i)$.

مثال10.5: في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين، ليكن X يمثل عدد الأوجه *tails* والمطلوب إيجاد الدالة $F(t)$ (دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X) وتمثيلها بيانيا.

الحل: المتغير العشوائي X يأخذ القيم 0، 1 و2 بحيث:

إذا كان $t < 0$: $F(t) = P(X \leq t) = 0$

وإذا $0 \leq t < 1$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X = 0) = P(\{HH\}) = 1/4$

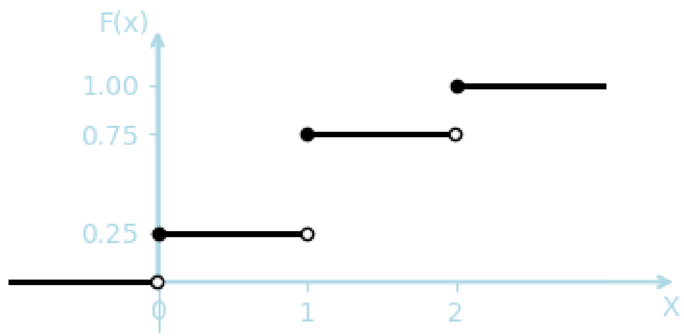
وعندما $1 \leq t < 2$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X = 0 \; or \; X = 1) = P(\{HH, HT, TH\}) = 3/4,$

وإذا $P(X \leq t) = 1$: $P(X \leq t) = 1$.

وبهذا:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/4 & 0 \leq t < 1 \\ 3/4 & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

والشكل الموالي يعرض التمثيل البياني لهذه الدالة:



مثال11.5:نعتبر تجربة رمي قطعة نرد مرتين، وليكن X يمثل أكبر قيمة للنتيجتين المتحصل عليهما، والمطلوب إيجاد دالة الكتلة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X.

الحل:

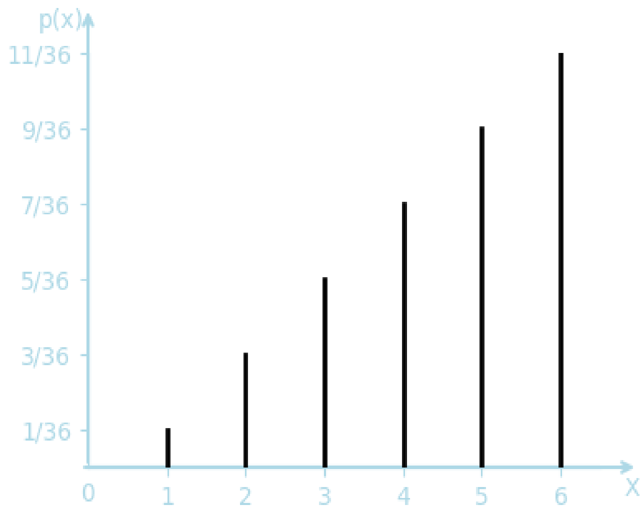
القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي 1، 2، 3، 4، 5 و6. فضاء العينة لهذه التجربة يتكون من 36 نتيجة لها نفس الفرصة في الوقوع. وبهذا احتمال وقوع أي منها هو $1/36$، إذن:

$$p(1) = P(X = 1) = P(\{(1,1)\}) = 1/36$$
$$p(2) = P(X = 2) = P(\{(1,2), (2,2), (2,1)\}) = 3/36$$
$$p(3) = P(X = 3) = P(\{(1,3), (2,3), (3,3), (3,2), (3,1)\}) = 5/36$$

وبنفس الطريقة نجد أيضا $p(4) = 7/36$ ، $p(5) = 9/36$ و $p(6) = 11/36$ ، $p(x) = 0$ من أجل $x \notin \{1,2,3,4,5,6\}$. وبهذا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يعطى في الجدول الموالي:

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

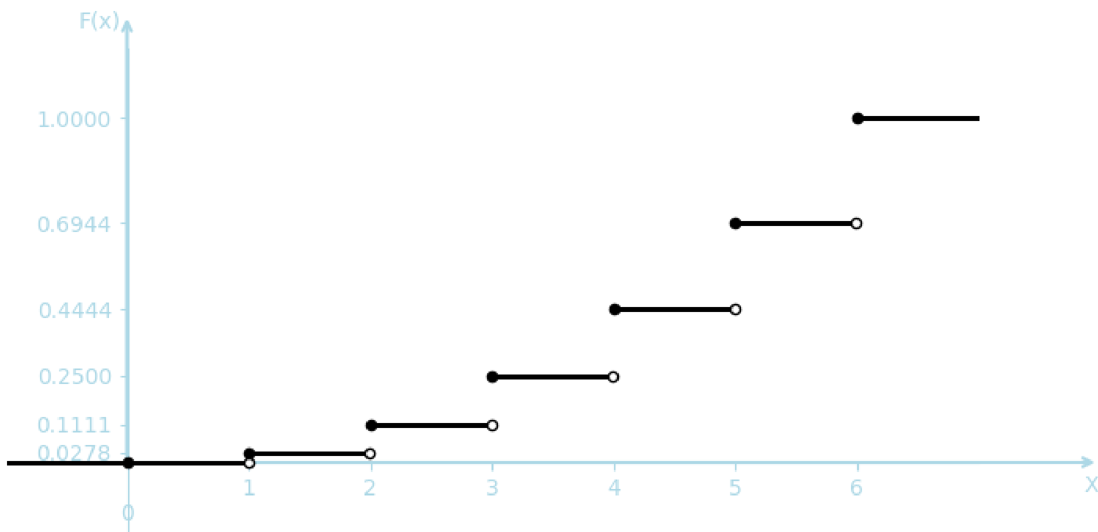
والشكل الموالي يمثل التمثيل البياني لـ p.



دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1/36 & 1 \leq x < 2 \\ 4/36 & 2 \leq x < 3 \\ 9/36 & 3 \leq x < 4 \\ 16/36 & 4 \leq x < 5 \\ 25/36 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

والتمثيل البياني لهذه الدالة يكون كما يلي:



6.1.5. بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما

1. التوزيع المنتظم:

تعريف: (حالة عامة)

إذا كان المتغير العشوائي X يأخذ القيم الحقيقية x_i ، $x_i \in R_X$، $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

نقول أن X يتبع التوزيع المنتظم (المنفصل) إذا كانت دالة كتلته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$\forall x_i \in R_X: P(X = x_i) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|R_X|}$$

تعريف: (حالة خاصة)

عندما $R_X = \{1,2,3, \dots, \mathrm{n}\}$ ، نقول أن X يتبع التوزيع المنتظم (المنفصل) ونرمز له بـ $X \sim \mathrm{U}_{\{1,2,3,\dots,\mathrm{n}\}}$.

ملاحظة: هذه التأشيرة (الرمز) يستعمل فقط للحالة الخاصة.

مثال12.5: X متغير عشوائي معرف بالرقم الظاهر عند إلقاء قطعة نرد مرة واحدة.

لدينا: $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $\forall x_i \in R_X: P(X = x_i) = \frac{1}{6}$.

ومنه المتغير العشوائي X له قانون احتمال منتظم منفصل على المجموعة: $R_X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2. توزيع برنولي:

نعتبر تجربة عشوائية لها نتيجتان ممكنتان فقط، نتيجة نسميها نجاح success ونرمز لها بـ s، ونتيجة ممكنة أخرى نسميها فشل failure ونرمز لها بـ f. هذه التجربة المعرفة بهذه الطريقة تسمى تجربة برنولي نسبة إلى العالم السويسري برنولي، والتي تعتبر من أبسط التجارب. ويمكن اعتبار تجربة إلقاء قطعة نقود كمثال عن تجربة برنولي، هذه التجربة لها نتيجتان ممكنتان هما "head" و "tail"، فإذا كان اهتمامنا هو ظهور الوجه head فإننا نسمي حادث ظهور هذه النتيجة بحادث النجاح وظهور tail نسميه حادث الفشل. وأيضا تجربة إلقاء قطعة نرد تعتبر تجربة برنولي، إذا كان على سبيل المثال اهتمامنا هو ظهور عدد فردي. في هذه الحالة حادث الحصول على عدد فردي نسميه نجاح وعند العكس نسميه فشل. وأيضا في تجربة فحص وحدة من منتج معين فمن الممكن أن تكون الوحدة سليمة أو فاسدة. إذن هذه التجربة هي تجربة برنولي ونعتبر على سبيل المثال حادث الحصول على وحدة سليمة نجاح وحادث الحصول على وحدة فاسدة فشل أو العكس.

فضاء العينة لتجربة برنولي مكون من نتيجتين ممكنتين، s و f. المتغير العشوائي المعرف بـ $X(s) = 1$ و $X(f) = 0$ يسمى متغير برنولي. وبهذا متغير برنولي يأخذ القيمة 1 عندما تكون نتيجة تجربة برنولي نجاح (success) و0 في حالة الفشل (failure). إذا كان p يمثل احتمال النجاح، فإن $1 - p$ (وفي بعض الأحيان يرمز له بـ q) هو احتمال الفشل. وبهذا دالة الكتلة الاحتمالية لـ X هي:

$$P(X = x) = \begin{cases} 1 - p \equiv q & if\, x = 0 \\ p & if\, x = 1 \\ 0 & otherwise. \end{cases} \qquad (1)$$

1. تعريف: نقول عن متغير عشوائي أنه يتبع توزيع برنولي بالمعلمة p، ونكتب $X \sim B(p)$، إذا كانت دالة كتلته الاحتمالية معرفة كما في المعادلة (1) أعلاه.

كما يمكننا أيضا كتابة دالة الكتلة الاحتمالية لمتغير برنولي كما يلي:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x} = p^x q^{1-x}; \qquad x = 0,1$$

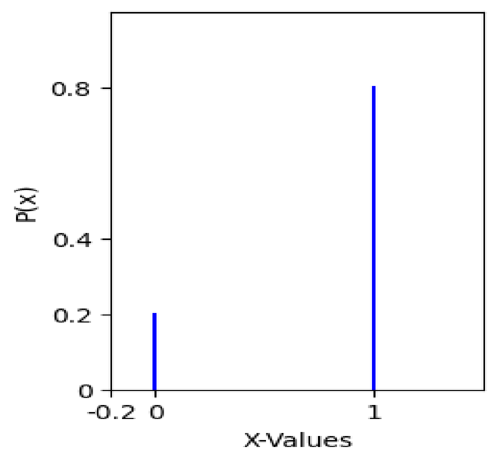
مثال13.5: إذا كان $X \sim B(0.8)$، فإن دالة كتلته الاحتمالية تعطى كما يلي:

$$P(X = x) = (0.8)^x (0.2)^{1-x} \qquad x = 0,1$$

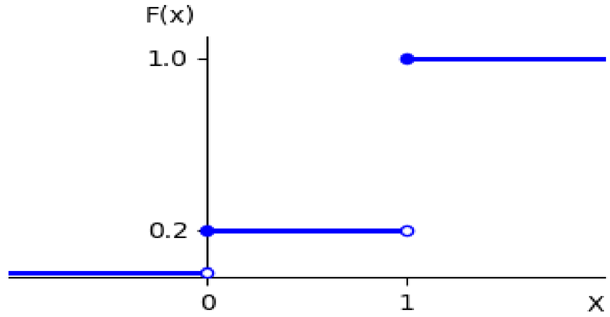
كما يمكننا كتابتها في شكل جدول احتمالي كما يلي:

$X = x$	0	1	$\sum$
$P(X = x)$	0.2	0.8	1

التمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية يعطى كما يلي:



ويمكننا أيضا تمثيل دالة التوزيع كما يلي:



2.1.1. توزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي):

إذا تم تكرار تجربة برنولي n مرة بشكل مستقل باحتمال نجاح p لكل تجربة، المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات النجاح يتبع توزيع ذي الحدين بالمعلمتين n و p وهو أحد أهم التوزيعات الاحتمالية. مجموعة القيم المكنة لـ X هي $\{0,1,2,\dots,n\}$، ودالة الكتلة الاحتمالية الخاصة به معطاة في المبرهنة الموالية.

1. تعريف: نقول عن متغير عشوائي متقطع X له مجموعة قيم ممكنة $\{0,1,2,\dots,n\}$، أنه متغير ذي الحدين بالمعلمتين n و p. ونكتب $X\sim B(n,p)$، إذا كانت دالة كتلته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$p(x)=P(X=x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} & if\ x=0,1,2,\dots,n\\ 0 & elsewhere.\end{cases}$$

البرهان: لاحظ أن عدد الطرق الممكنة لتحقق x نجاح في n تجربة برنولي، حيث $(x=0,1,2,\dots,n)$ يساوي عدد التشكيلات ذات n عنصر مع x يمثل عدد مرات النجاح (s) و $(n-x)$ يمثل عدد مرات الفشل (f). لكن عدد هذه التشكيلات هو $\binom{n}{x}$ لأن عدد التباديل المختلفة لـ n عنصر بنوعين مختلفين، حيث x عنصر متشابه، و$n-x$ عنصر متشابه هو $\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$ وباعتبار استقلالية التجارب احتمال أي تشكيلة من هذه التشكيلات هو $p^x(1-p)^{n-x}$، وبهذا يكون:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \qquad (1)$$

يرجع سبب تسمية هذا التوزيع بالتوزيع ذي الحددين إلى صيغة ذي الحدين التي تضمن أن p تمثل دالة كتلة احتمالية:

$$\sum_{x=0}^{n}p(x)=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=[p+(1-p)]^n=1^n=1$$

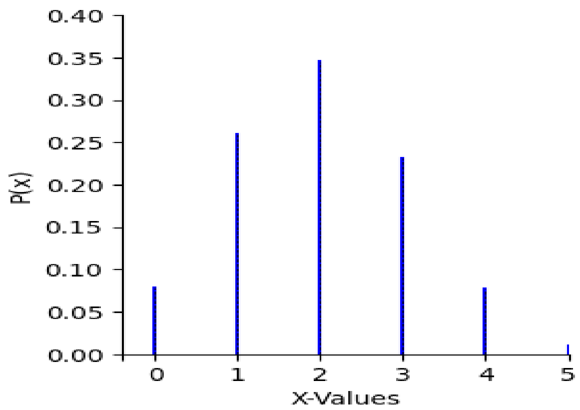
مثال14.5: إذا كان $X\sim B(6;1/3)$، فإن دالة كتلته الاحتمالية تعطى كما يلي:

$$P(X=x)=\binom{6}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$$

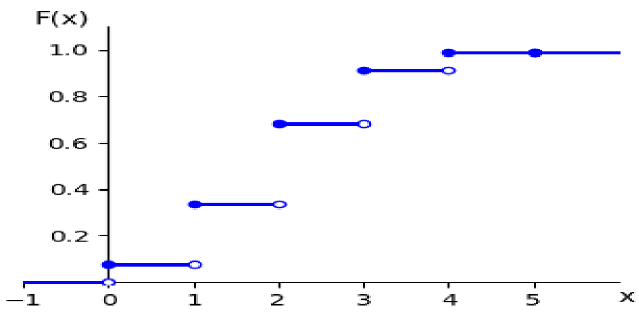
كما يمكننا كتابتها في شكل جدول احتمالي كما يلي:

$X=x$	0	1	2	3	4	5	$\sum$
$P(X=x)$	0.0778	0.2592	0.3456	0.2304	0.0768	0.0102	1

والتمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية يعطى كما يلي:



ويمكننا أيضا تمثيل دالة التوزيع كما يلي:



مثال15.5: يقدم أحد المطاعم مجموعة متنوعة من الأطباق، حيث يقدم 8 أنواع من الأطباق تحتوي على السمك، 12 نوع تحتوي على لحوم حمراء و10 أطباق تحتوي على الدجاج. بافتراض أن اختيار نوع الطبق من طرف الزبائن يكون بشكل عشوائي. ما هو احتمال اختيار زبونين لطبق السمك من بين أربعة زبائن التالية؟

الحل: ليكن X يمثل عدد الزبائن الذين يختارون طبق السمك (حادث النجاح) من طرف الزبائن الأربعة التالية.

إذن X يتبع توزيع ذي الحدين بالمعلمتين $n=4$ و $p=8/30=4/15$، وبهذا:

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{4}{15}\right)^{2}\left(\frac{11}{15}\right)^{2}=0.23$$

2.5. المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي:

1.2.5. التوزيع الاحتمالي للمتغيرة العشوائية المستمرة:

تعريف: ليكن X متغير عشوائي، بافتراض أنه يوجد دالة عددية حقيقية غير سالبة $f: \boldsymbol{R} \to [0, \infty[$. بحيث من أجل كل مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية A والتي تكون في شكل فترات (مجالات) وتحقق:

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx \qquad (01)$$

نقول عندئذ أن X متغير عشوائي مستمر مطلقا (واختصارا متغير عشوائي مستمر). والدالة f تسمى **دالة الكثافة الاحتمالية** للمتغير X.

2.2.5. خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة.

إذا كانت الدالة f تمثل دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X. فإنها تتميز بمجموعة من الخصائص نذكرها فيما يلي:

1. $\forall x \in R_X: f(x) \geq 0$ ($f(.)$ هي دالة غير سالبة).
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. من أجل ثوابت حقيقية a و b حيث $a \leq b$، $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$.

بافتراض أن $A = [a, b]$، فإنه من خلال العلاقة (01) يكون:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \in A) = \int_A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

أي احتمال أن يكون X محصور بين a و b يساوي المساحة المحصورة بين القيمتين a و b تحت منحنى الدالة f. وباعتبار أن $a = b$، نتحصل على:

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0.$$

هذا يعني أنه من أجل أي عدد حقيقي a، فإن $P(X = a) = 0$. أي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المستمر قيمة محددة يساوي 0.

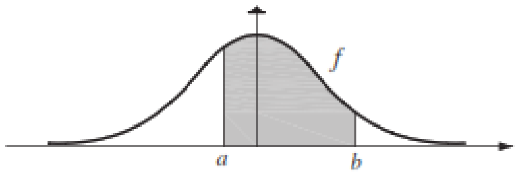
4. $P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$

هذه الخاصية محققة باعتبار أن: $\forall a \in \boldsymbol{R} : P(X = a) = 0$. وبهذا احتمال أن X يأخذ قيم داخل مجال محدد لا يتعلق بقيم أطراف هذا المجال.

أيضا من خلال الخاصية $\forall a \in \boldsymbol{R} : P(X = a) = 0$ يمكننا استنتاج أن قيمة دالة الكثافة الاحتمالية f عند نقطة محددة لا تمثل احتمال. ونذكر بأن تكامل هذه الدالة على مجال I يعطينا احتمال أن تتراوح قيم المتغير العشوائي داخل المجال I. ومن خلال هذا:

المساحة التي يحصرها منحنى دالة الكثافة الاحتمالية f على المجال I تمثل احتمال أن تتراوح قيم المتغير العشوائي داخل المجال I.

عل سبيل المثال، ليكن X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية f وتمثيلها البياني موضح في الشكل أدناه، فإن المساحة المضللة تحت منحنى الدالة f يمثل احتمال أن تتراوح قيم المتغير العشوائي X بين القيمتين a و b.



قيمة دالة الكثافة الاحتمالية عند قيمة محددة a تمثل مدى احتمالية أن تقترب X من القيمة a، لتوضيح ذلك نعتبر $\varepsilon > 0$ صغير جدا. إذن $P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon)$ يمثل احتمال أن تقترب X من القيمة a، وبهذا:

$$P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)dt$$

وهذا يمثل المساحة تحت منحنى $f(t)$ المحصورة بين $a + \varepsilon$ و $a - \varepsilon$. وهذه المساحة تساوي تقريبا مساحة المستطيل بالأبعاد $(a + \varepsilon) - (a - \varepsilon) = 2\varepsilon$ و $f(a)$، ومن خلال هذا:

$$P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)dt \approx 2\varepsilon f(a)$$

بنفس الطريقة، من أجل أي قيمة b تنتمي إلى مجال تعريف f فإن:

$$P(b - \varepsilon < X < b + \varepsilon) \approx 2\varepsilon f(b)$$

من خلال ما سبق من أجل قيمة صغيرة $\varepsilon > 0$، إذا كان $f(a) < f(b)$ فإن:

$$P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) < P(b - \varepsilon < X < b + \varepsilon).$$

هذا يعني أنه إذا كان $f(a) < f(b)$، فإن احتمال أن يقترب X من b أكبر من احتمال أن يقترب X من a.

مثال16.5: ليكن X متغير عشوائي مستمر له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; 0 \le x \le 5 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

1. تحقق من أن f هي فعلا دالة كثافة احتمالية ثم مثلها بيانيا؟
2. أحسب الاحتمال $P(2 \le X \le 3)$.

الحل:

1. التحقق من أن f هي فعلا دالة كثافة احتمالية:

f دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطين التاليين:

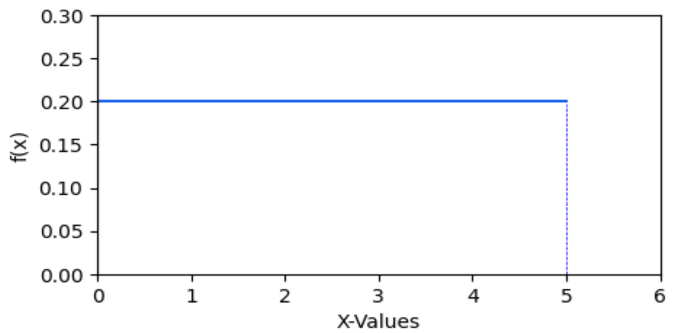
1. $\forall x \in R: f(x) \ge 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

الشرط الأول محقق لأن الدالة $f(x) = \frac{1}{5} \ge 0$ لما $x \in [0,5]$، والشرط الثاني محقق أيضا لأن:

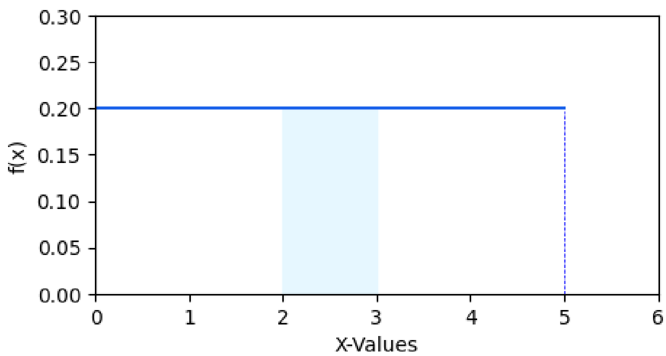
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^5 \frac{1}{5}dx = \left[\frac{x}{5}\right]_0^5 = \frac{5}{5} - \frac{0}{5} = 1$$

والتمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية يعطى كما يلي:



2. حساب الاحتمال $P(2 \le X \le 3)$:

الاحتمال $P(2 \le X \le 3)$ بيانيا يمثل المساحة المظللة التي يحصرها منحى دالة الكثافة الاحتمالية بين القيمتين 2 و3، كما هو موضح في الشكل البياني أدناه:



$$P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 \frac{1}{5}dx = \left[\frac{1}{5}t\right]_2^3 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

مثال17.5: متغير عشوائي مستمر X له دالة كثافة احتمالية f معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

1. تحقق من أن f هي فعلا دالة كثافة احتمالية ثم مثلها بيانيا؟
2. أحسب الاحتمال $P(2 \leq X \leq 3)$.

الحل:

1. التحقق من أن f هي فعلا دالة كثافة احتمالية:

f دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطين التاليين:

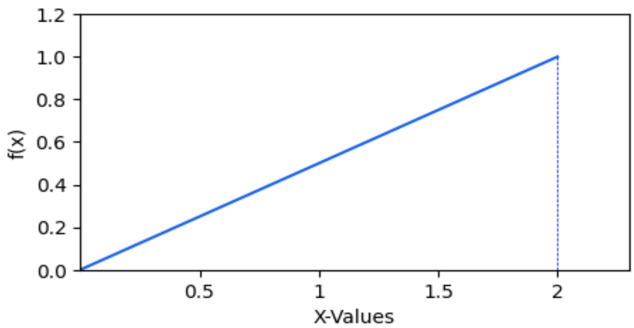
1. $\forall x \in R: f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

الشرط الأول محقق لأن الدالة $f(x) = \frac{x}{2} \geq 0$ لما $x \in [0,2]$، والشرط الثاني محقق أيضا لأن:

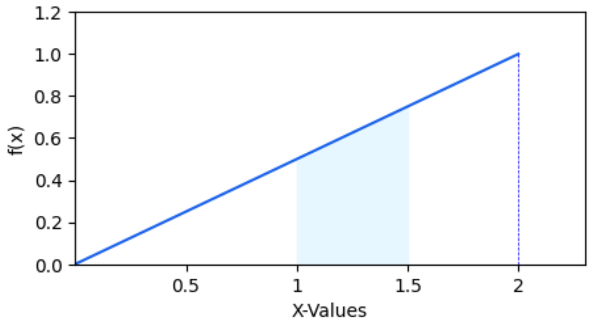
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 1$$

والتمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية يعطى كما يلي:



2. حساب الاحتمال $P(1 \le X \le 1.5)$:

الاحتمال $P(1 \le X \le 1.5)$ يمثل المساحة المظللة التي يحصرها منحى دالة الكثافة الاحتمالية بين القيمتين 1 و1.5، كما هو موضح في الشكل البياني أدناه:



$$P(1 \le X \le 1.5) = \int_1^{1.5} f(x)dx = \int_1^{1.5} \frac{1}{2}xdt = \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^{1.5} = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{(1)^2}{4} = 0.3125$$

3.2.5. دالة التوزيع للمتغيرة العشوائية المستمرة

من خلال ما سبق تطرقنا إلى دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي X وهي الدالة المعرفة بـ $F(t) = P(X \le t)$. ومن خلال هذا التعريف وجدنا أنها دالة رتيبة غير متناقصة، مستمرة على يمين كل نقطة، $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$، $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. بالإضافة إلى ذلك وجدنا أنه في حالة المتغير العشوائي المتقطع X الذي له مجموعة قيم ممكنة $\{x_1, x_2, \dots\}$ بدالة كتلة احتمالية p ودالة توزيع تراكمي F. تكون الدالة F غير مستمرة وتتميز بقفزات عند القيم $x_1, x_2, \dots$ حيث يكون مقدار القفزة عند x_i هو $p(x_i)$ ومن أجل $x_{n-1} \le t < x_n$ يكون:

$$F(t) = P(X \le t) = \sum_{i=1}^{n-1} p(x_i)$$

في حالة المتغير العشوائي المتقطع تغير صغير في قيمة t من الممكن أن يرافقه تغير كبير في قيمة الدالة F. وعلى سبيل المثال إذا تغيرت t من $x_n - \varepsilon$ إلى x_n حيث $\varepsilon > 0$ وهي قيمة صغيرة جدا، فإن الدالة $F(t)$ تقفز من $\sum_{i=1}^{n-1} p(x_i)$ إلى $\sum_{i-1}^{n} p(x_i)$ ومقدار هذه القفزة هو $p(x_n)$ والتي من الممكن أن تكون كبيرة. لكن في حالات مثل مدة اشتغال مصباح كهربائي، وقت وصول قطار إلى المحطة، وزن طفل حديث الولادة... تكون مجموعة القيم الممكنة لـ X غير قابلة للعد وغير منتهية والتغيرات الصغيرة في قيم X ينتج عنها تغيرات صغيرة في توزيع X. وبهذا من المتوقع أن تكون الدالة F مستمرة.

تعريف: ليكن X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية $f(x)$. نسمي دالة التوزيع (التراكمي) للمتغير العشوائي X الدالة المعرفة كما يلي:

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

ملاحظة: ليكن a ، b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$ ، باستخدام دالة التوزيع التراكمي يكون:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

مثال18.5: ليكن X متغير عشوائي مستمر له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

1. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ومثله بيانيا.
2. باستخدام دالة التوزيع الاحتمالي أحسب الاحتمالات التالية: $P(X \leq 1)$، $P(2 \leq X \leq 3)$، $P(X > 3.5)$.

الحل:

1. إيجاد دالة التوزيع التراكمي:

لإيجاد دالة التوزيع التراكمية لـ X نستخدم الصيغة: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

من أجل $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

من أجل $0 \leq x \leq 5$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{5}dt = \left[\frac{1}{5}t\right]_{0}^{x} = \frac{x}{5}$$

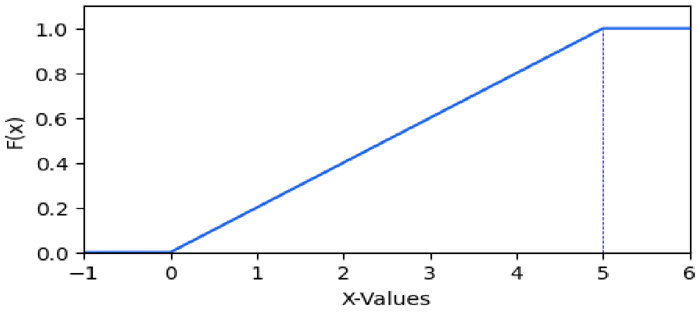
من أجل $x > 5$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{5}dt = \left[\frac{1}{5}t\right]_{0}^{5} = \frac{5}{5} = 1$$

وبهذا:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{x}{5} & ; 0 < x < 5 \\ 1 & ; x \geq 5 \end{cases}$$

والشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لمنحنى دالة التوزيع التراكمي:



2. حساب الاحتمالات:

$$P(X \leq 1) = F(3) = \frac{1}{5}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(X > 3.5) = 1 - P(X \leq 3.5) = 1 - F(3.5) = 1 - \frac{3.5}{5} = 0.30$$

مثال19.5: متغير عشوائي مستمر X له دالة كثافة احتمالية f معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

1. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ومثله بيانيا.
2. باستخدام دالة التوزيع الاحتمالي أحسب الاحتمالات التالية: $P(X \leq 1.5)$ ،$P(1 \leq X \leq 1.5)$، $P(X > 1.3)$..

الحل:

1. إيجاد دالة التوزيع التراكمي:

لإيجاد دالة التوزيع التراكمية لـ X نستخدم الصيغة: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

من أجل $x < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$$

من أجل $0 \leq x \leq 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}tdt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$$

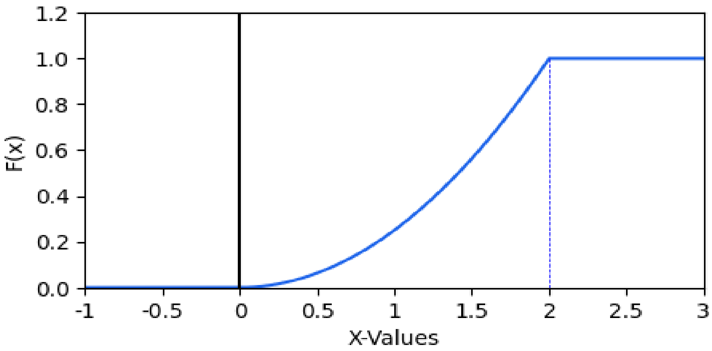
من أجل $x > 5$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}tdt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_0^x = \frac{4}{4} = 1$$

وبهذا:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & ; \quad 0 < x < 2 \\ 1 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

والشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لمنحنى دالة التوزيع التراكمي:



2. حساب الاحتمالات:

$$P(X \leq 1.5) = F(1.5) = \frac{(1.5)^2}{4} = 0.5625$$

$$P(1 \leq X \leq 1.5) = F(1.5) - F(1) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{(1)^2}{4} = 0.3125$$

$$P(X > 1.3) = 1 - P(X \leq 1.3) = 1 - F(1.3) = 1 - \frac{(1.3)^2}{4} = 1 - 0.4225 = 0.5775$$

4.2.5. قاعدة لايبنيز:

قاعدة لايبنيز (*Leibniz rule*) هي مبدأ حسابي يسمح بنقل عملية الاشتقاق داخل تكامل ذو حدود تعتمد على متغير. حيث تنص القاعدة العامة على أنّه إذا كان لدينا تكامل بالصيغة التالية:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt$$

فإن مشتقته تعطى بـ:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt = f(x,b(x)) \cdot b'(x) - f(x,a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt$$

مع افتراض أن جميع الدوال مستمرة وقابلة للاشتقاق.

في حالتنا هذه ما نحتاجه هو وضع:

- $a(x) = -\infty$ (ثابت)

- $b(x) = x,$
- $f(x,t) = f(t)$ (x مستقل عن)

تصبح قاعدة لايبنيز في شكلها المبسط التالي:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\right) = f(x)$$

وبهذا العلاقة الرياضية بين دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي تعطى كما يلي:

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F^{'}(x)$$

مثال20.5: X متغير عشوائي مستمر له دالة التوزيع التراكمي التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

حيث: $\lambda > 0$.

المطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية؟

الحل:

باشتقاق $F(x)$ من أجل $x \geq 0$:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) = \lambda e^{-\lambda x}$$

وبهذا دالة الكثافة الاحتمالية تعطى كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

مثال21.5: X متغير عشوائي مستمر له دالة التوزيع التراكمي التالية:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

المطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية؟

الحل:

- من أجل $x < 0$: $f(x) = 0$.
- من أجل $0 \leq x \leq 2$: $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{x}{2}$.
- من أجل $x > 2$: $f(x) = 0$.

وبهذا:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & otherwise\,. \end{cases}$$

5.2.5. بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة

1. التوزيع المنتظم:

أحد أبسط التوزيعات الاحتمالية المستمرة هو التوزيع المنتظم المستمر، دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي على المجال $[a, b]$ مستقلة عن قيم x. وتكون معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} k & ; \quad a \leq x \leq b \\ 0 & ; \quad otherwise \end{cases}$$

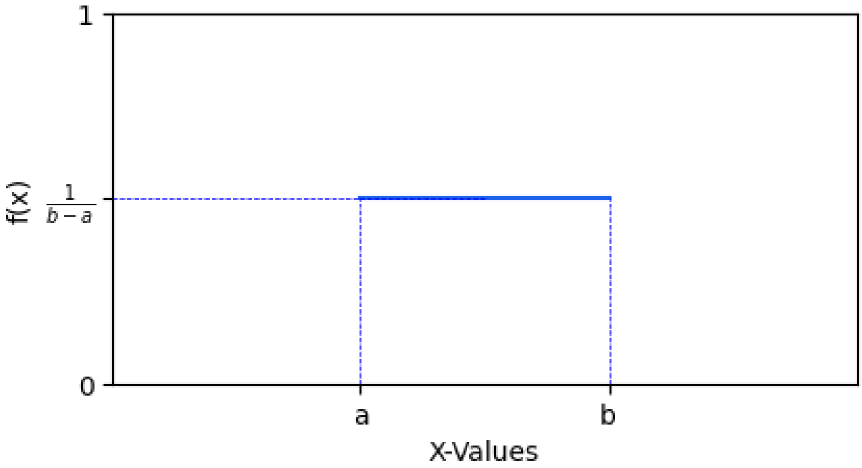
وباعتبار أن هذه الدالة المعرفة أعلاه يجب أن تكون دالة كثافة احتمالية، لذلك تكامل هذه الدالة على المجال $[a, b]$ يساوي 1. وبهذا نحصل على:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{a}^{b} k\,dx = 1 \Rightarrow kx|_a^b = 1 \Rightarrow k(b-a) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{b-a}$$

1.1. تعريف: نقول إن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع المنتظم المستمر على المجال $[a, b]$، ونكتب $X \sim U_{[a,b]}$، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; a \leq x \leq b \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

الشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر المنتظم بالمعلمتين a و b.



بافتراض أن $[u,v]$ مجال طوله l بحيث $a<u<v<b$، وبهذا يكون لدينا:

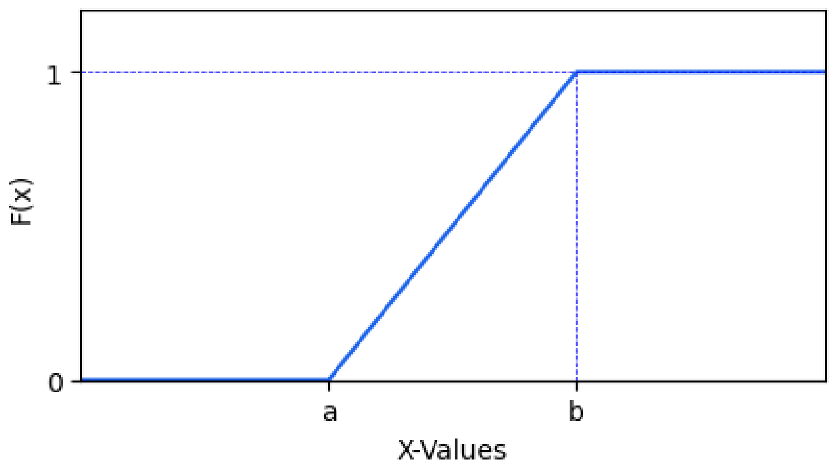
$$P(u<X<v)=\int_u^v \frac{1}{b-a}dx=\left[\frac{x}{b-a}\right]_u^v=\frac{v-u}{b-a}=\frac{l}{b-a}$$

2.1. دالة التوزيع التراكمي:

دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المستمر المنتظم تعطى كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x\le a\\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}dt=\left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x=\frac{x-a}{b-a} & ; \quad a<x<b\\ 1 & ; \quad x\ge b\end{cases}$$

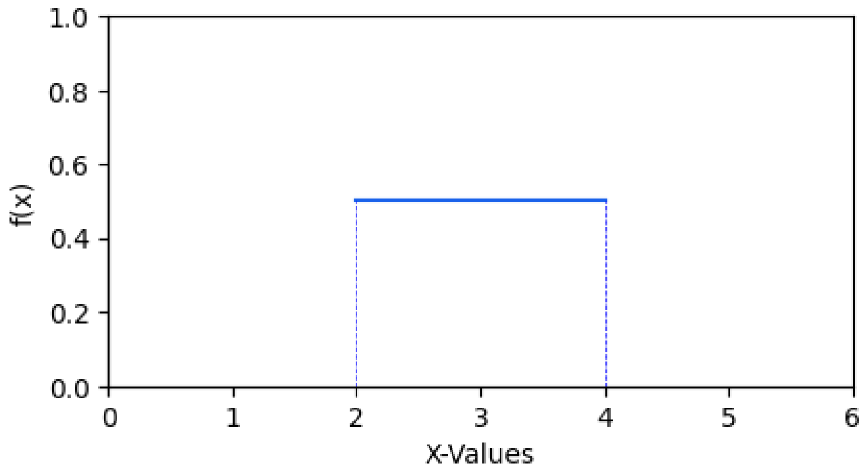
والتمثيل البياني لهذه الدالة يعطى كما يلي:



مثال22.5: ليكن $X \sim U_{[2,4]}$، وبذلك دالة كثافته الاحتمالية تكتب كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

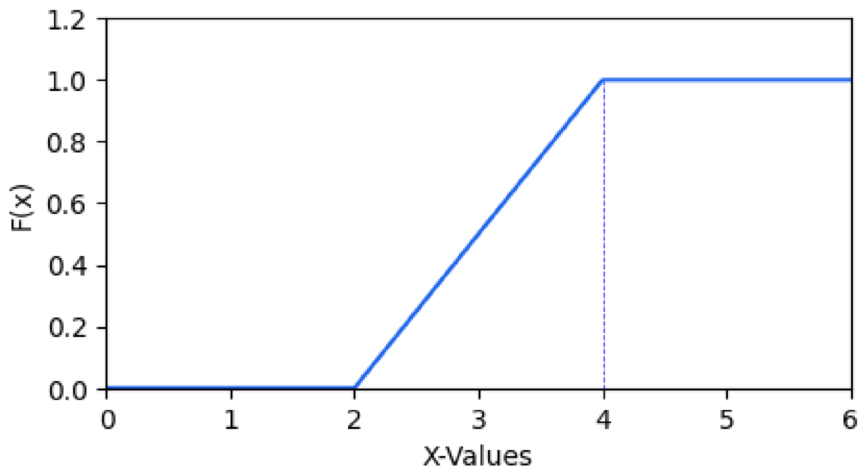
الشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع على المجال [2,4].



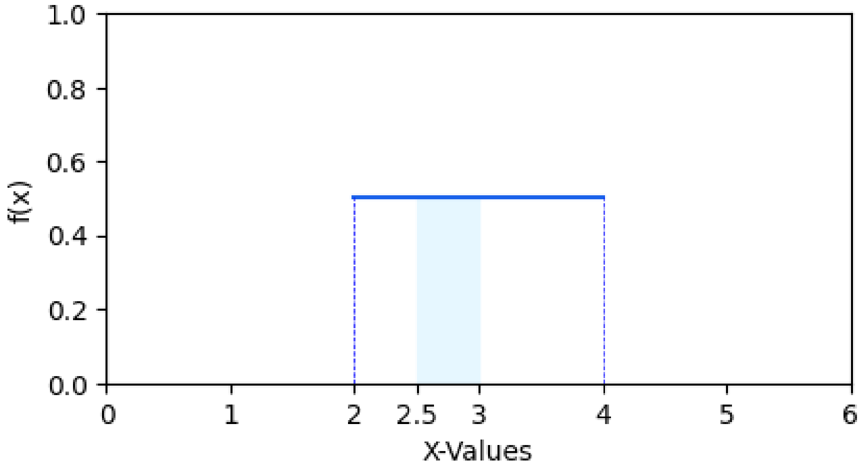
دالة التوزيع التراكمي تعطى كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 2 \\ \frac{x-2}{2} & ; \quad 2 < x < 4 \\ 1 & ; \quad x \geq 4 \end{cases}$$

والشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لمنحنى دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المنتظم على المجال[2,4].



الاحتمال $P(2.5 \leq X \leq 3)$ يمثل المساحة المظللة التي يحصرها منحنى دالة الكثافة الاحتمالية بين القيمتين 2.5 و3، كما هو موضح في الشكل البياني أدناه:



$$P(2.5 \leq X \leq 3) = \int_{2.5}^{3} \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_{2.5}^{3} = \frac{1}{2}(3) - \frac{1}{2}(2.5) = \frac{1}{4}$$

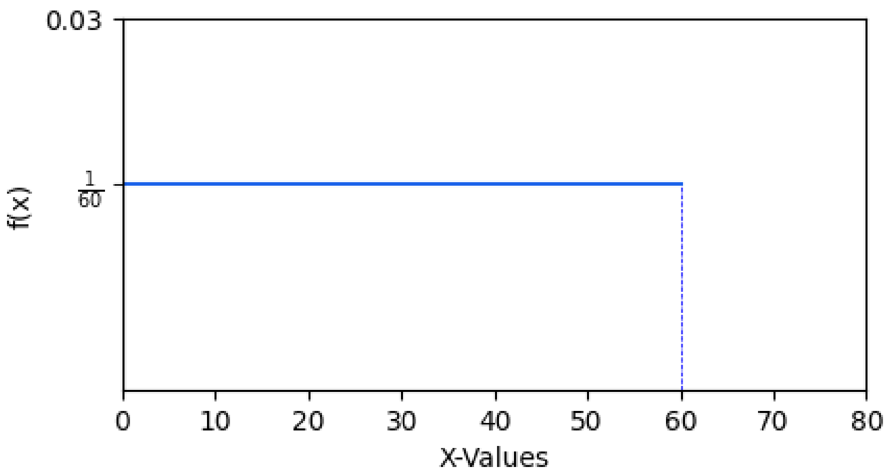
مثال23.5:بافتراض أنه في أحد محطات النقل البري، ابتداءا من الساعة الخامسة صباحا، تنطلق كل نصف ساعة حافلة من المدينة A إلى المدينة B. كما نفترض أيضا أن يوجد أماكن شاغرة في جميع الحافلات عند وقت الانطلاق، بافتراض أن أحد المسافرين سيصل إلى المحطة في وقت عشوائي خلال الفترة 8:45 صباحا و 9:45 صباحا. المطلوب إيجاد احتمال أن يكون وقت الانتظار لهذا المسافر:

1. على الأكثر 10 دقائق.
2. على الأقل 15 دقيقة.

الحل: ليكن X يمثل وقت وصول المسافر بالدقائق بعد الساعة 8:45 صباحا. وبهذا X متغير عشوائي له توزيع منتظم على المجال [0,60]. وبهذا دالة الكثافة الاحتمالية لـ X معطاة بـ:

$$f(x) = \begin{cases} 1/60 & \text{if } 0 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

والتمثيل البياني لهذه الدالة يعطى كما يلي:

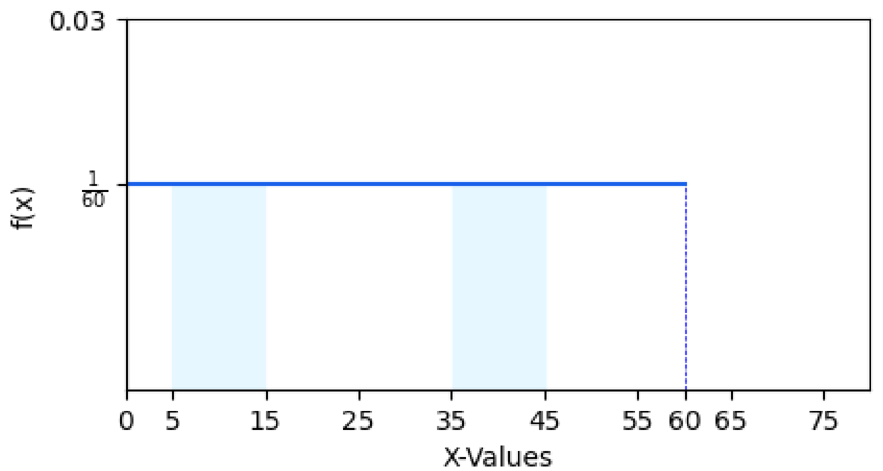


ينتظر المسافر على الأكثر 10 دقائق إذا كان وقت وصوله إلى المحطة بين 8:50 و 9:00 أو 9:20 و 9:30.

ومنه $5 < X < 15$ أو $35 < X < 45$. وبهذا الإجابة على (1) تكون كما يلي:

$$P(5 < X < 15) + P(35 < X < 45) = \int_{5}^{15} \frac{1}{60} dx + \int_{35}^{45} \frac{1}{60} dx = \frac{1}{3}$$

وهذا الاحتمال هو المساحة المضللة في الشكل أدناه:

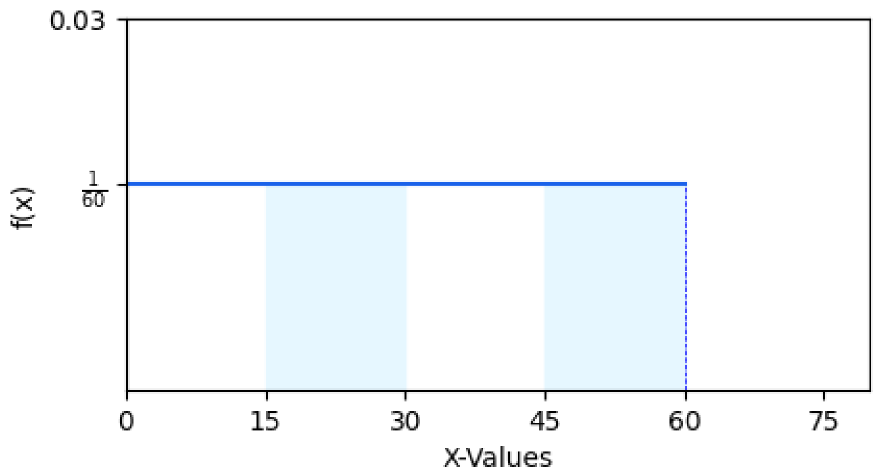


وينتظر المسافر على الأقل 15 دقيقة إذا كان وقت وصوله إلى المحطة بين 9:00 و 9:15 أو 9:30 و 9:45.

ومنه $15 < X < 30$ أو $45 < X < 60$. وبهذا الإجابة على (2) هي:

$$P(15 < X < 30) + P(45 < X < 60) = \int_{15}^{30} \frac{1}{60} dx + \int_{45}^{60} \frac{1}{60} dx = \frac{1}{2}$$

وهذا الاحتمال هو المساحة المضللة في الشكل أدناه:



2. التوزيع الطبيعي:

1.2. تعريف 01: نقول إن X يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ، ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma^2)$، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < x < +\infty$$

للتحقق من أن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية:

1. نلاحظ أن $\forall\, x \in R$ يكون:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \geq 0$$

2. لبرهان أن $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$، نقوم بتبديل المتغير $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ نتحصل على:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

ونضع:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$$

وبهذا:

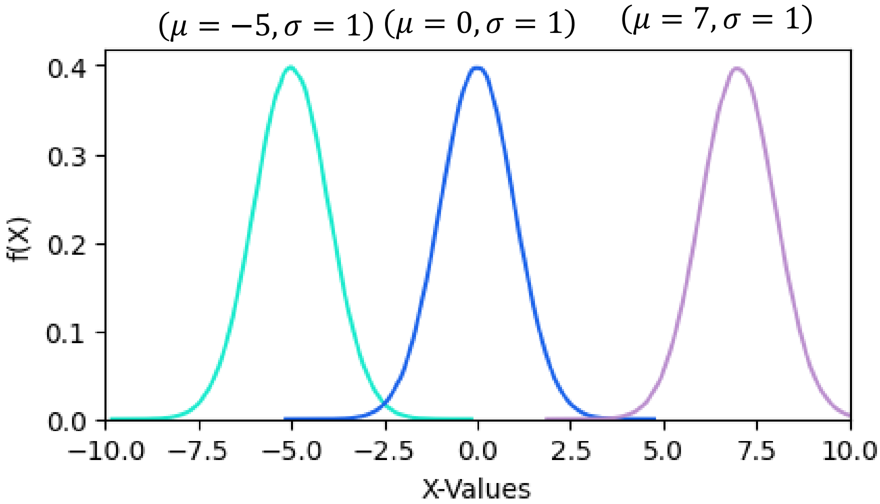
$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dydx$$

لحساب هذا التكامل المضاعف نقوم بتبديل المتغير كما يلي: $x = rcos\theta$ ، $y = rsin\theta$ ومنه نجد:

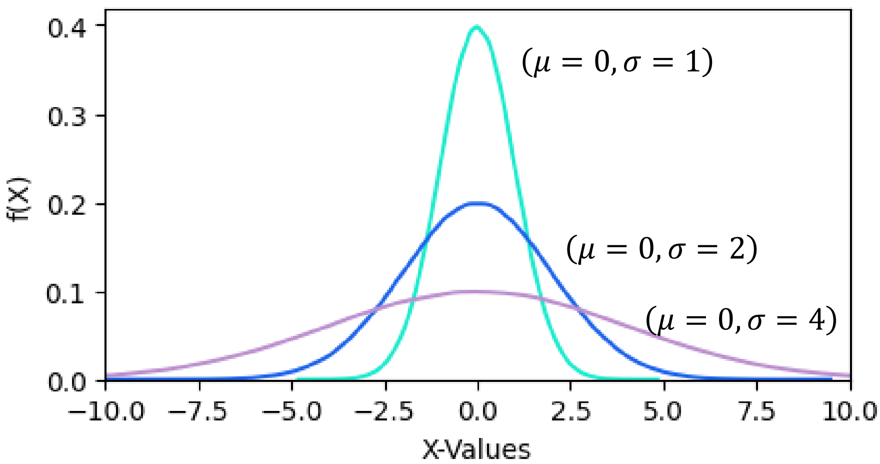
$$dxdy = rd\theta dr \quad \Rightarrow I^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{\frac{-r^2}{2}} rd\theta dr = \int_0^{\infty} re^{\frac{-r^2}{2}} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{\infty} re^{\frac{-r^2}{2}} dr$$

$$= -2\pi e^{\frac{-r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2\pi \Rightarrow I = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1$$

الشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي عندما $\sigma = 1$ وقيمة μ تتغير.



أما الشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي عندما $\mu = 0$ وقيمة σ تتغير.

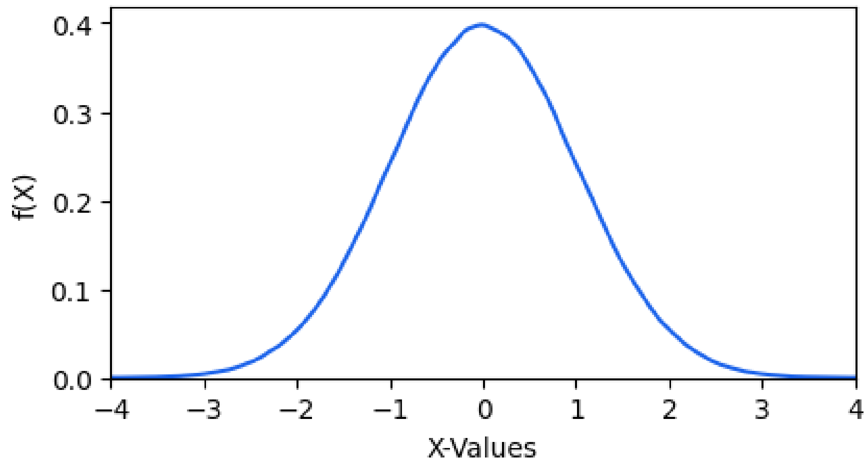


خاصية 01: إذا كان X يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ، فإن $Y = aX + b$ يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين $a\mu + b$ و $a^2\sigma^2$.

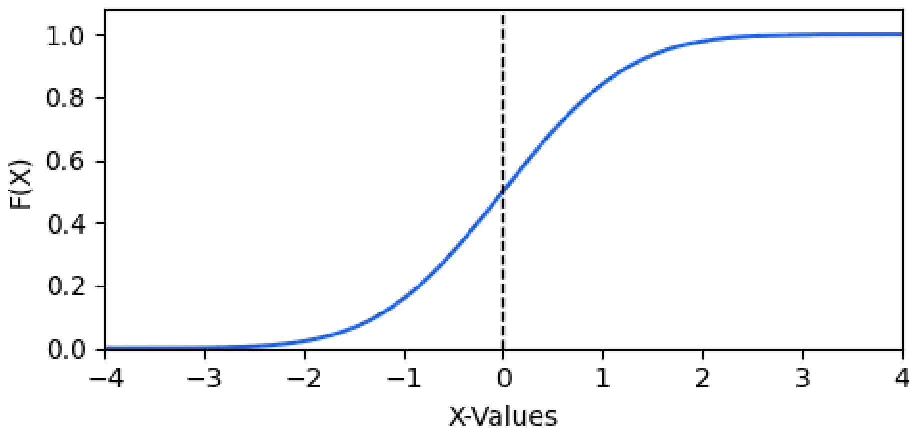
3.2. تعريف 02: نقول إن المتغير العشوائي Z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري، ونكتب $Z \sim N(0,1)$، إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

الشكل أدناه يعرض التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري



ودالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع تعطى كما يلي:



مبرهنة 01: إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ فإن المتغير $Z = (X-\mu)/\sigma$ له توزيع طبيعي معياري $N(0,1)$.

البرهان: من خلال ما سبق دالة التوزيع التراكمي للمتغير Z هي: $\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{z} e^{-y^2/2}\,dy$. لا حظ أن:

$$P(Z \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq x\right) = P(X \leq \sigma x + \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma x+\mu} exp\left[\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt.$$

نضع $y = (t-\mu)/\sigma$ وبهذا: $dt = \sigma dy$، نتحصل على:

$$P(Z \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,\sigma dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy.$$

4.2. دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي المعياري:

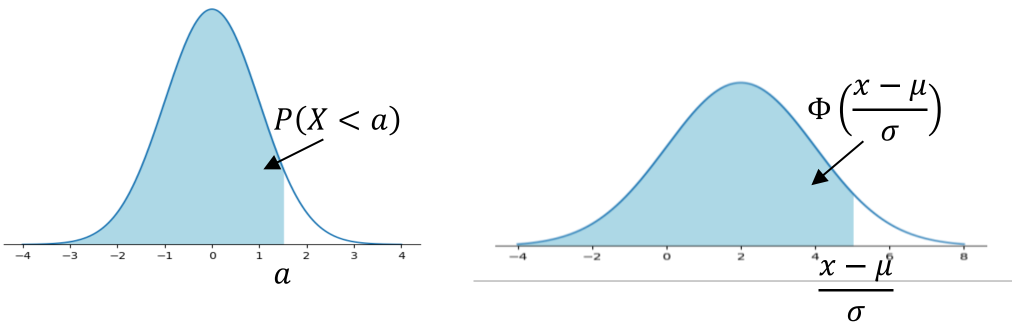
دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي المعياري يرمز لها بالرمز $\Phi(\cdot)$، وهي معرفة كما يلي:

$$P(X \leq t) = \Phi(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\,dx$$

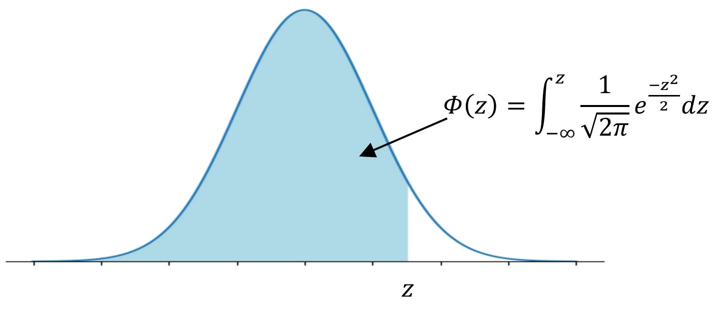
تستخدم عادة دالة التوزيع التراكمي لحساب الاحتمالات في التوزيع الطبيعي، فإذا كان X يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ، فإننا نقوم باستخدام المتغيرة المعيارية $Z = (X-\mu)/\sigma$ لحساب الاحتمالات الخاصة بالمتغير العشوائي X، وبهذا من خلال دالة التوزيع التراكمي لـ X نحصل على:

$$F_X(a) = P(X \le a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

والشكل البياني أدناه يوضح آلية تحويل المتغير لحساب الاحتمال $P(X \le a)$، حيث X يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ، كما يجب ملاحظة قيم دالة التوزيع التراكمي معرفة فقط على القيم الموجبة في هذا الجدول 1.1 أدناه.



وبهذا من خلال استخدام الجدول 1.1 الموالي الخاص بدالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي المعياري يمكننا حساب جميع الحوادث الخاصة بالمتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ. كما ننوه إلى أن الشكل أدناه يمثل مفتاح لقراءة الجدول 1.1.

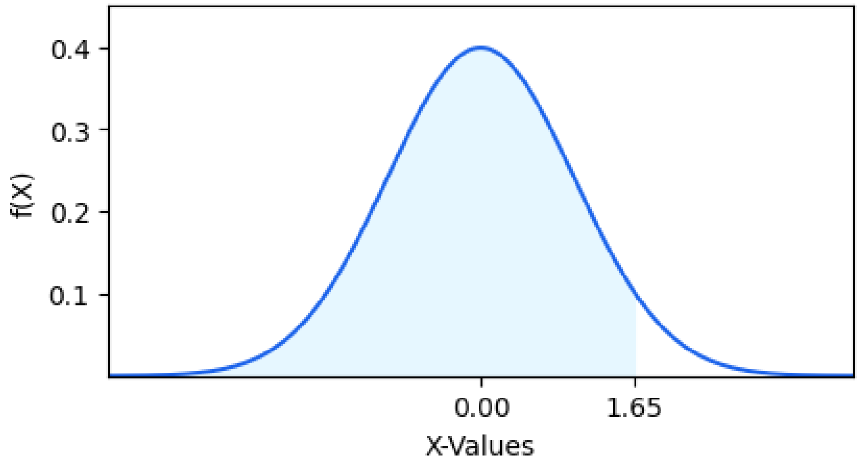


الجدول 1.1 $\Phi(z)$ المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في الجهة اليسرى لـ z.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

في الجدول أعلاه الأرقام في العمود الجانبي الأيسر والصف العلوي منه متعلقة بقيم المتغير العشوائي الطبيعي المعياري. والأرقام داخل الجدول هي قيم دالة التوزيع التراكمي لهذا المتغير العشوائي. وعلى سبيل المثال، تقاطع الرقم 1.6 من العمود الجانبي الأيسر والرقم 0.05 من الصف العلوي للجدول هو 0.9505، وهذا يعني أن المتغير العشوائي الطبيعي المعياري يأخذ قيم تقل عن أو تساوي 1.65 باحتمال 0.9505. بمعنى آخر:

$$\Phi(1.65) = 0.9505$$



في الجدول 1.1 السابق، قيم دالة التوزيع التراكمي لقيم z السالبة غير معروضة لأنه من خلال خاصية التناظر للتوزيع الطبيعي المعياري يمكننا استنتاج هذه القيم كما يلي:

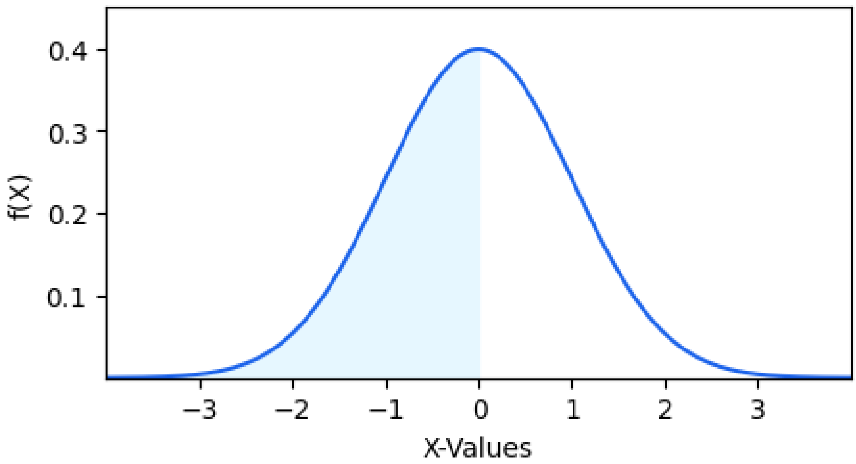
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

يمكننا برهان هذه الخاصية كما يلي:

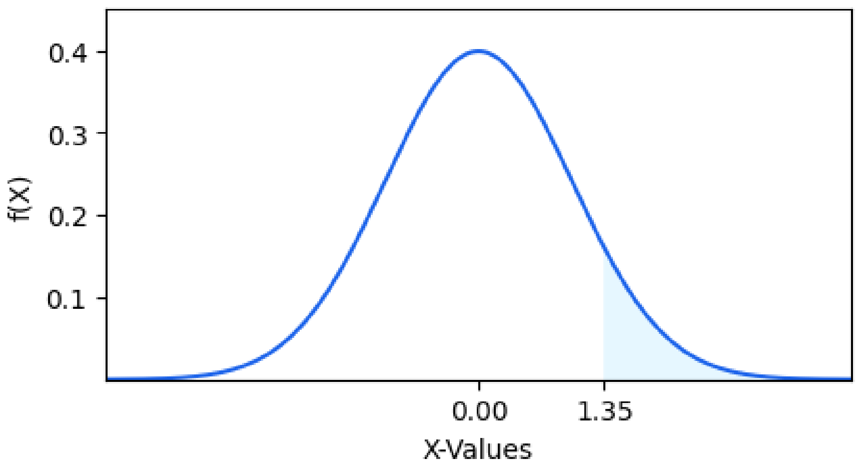
$$P(X \leq -z) = 1 - P(X \geq z) = 1 - P(Z < z) \Rightarrow \Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

ولاستخدام الجدول بطريقة سهلة نعتبر الأمثلة التالية:

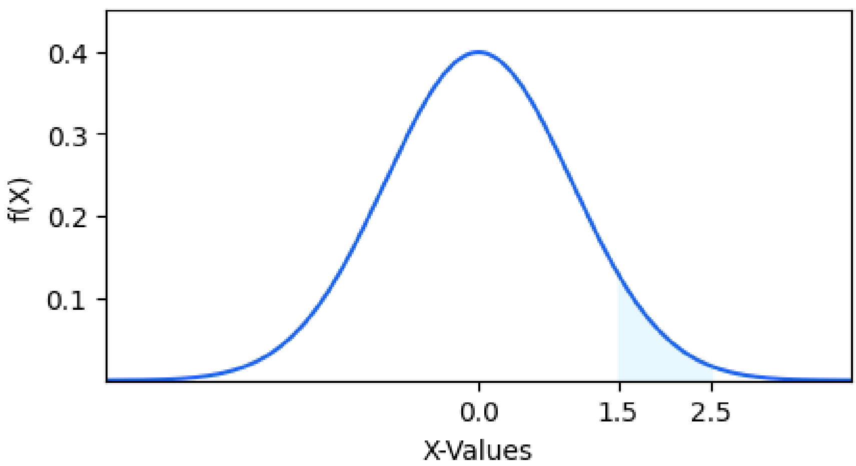
$$P(Z \leq 0) = \Phi(0) = 0.5$$



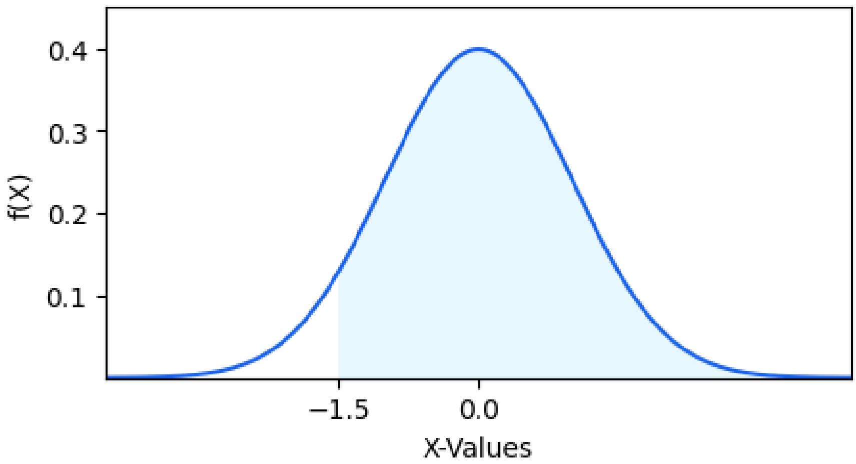
$P(Z > 1.35) = 1 - \Phi(1.35)$



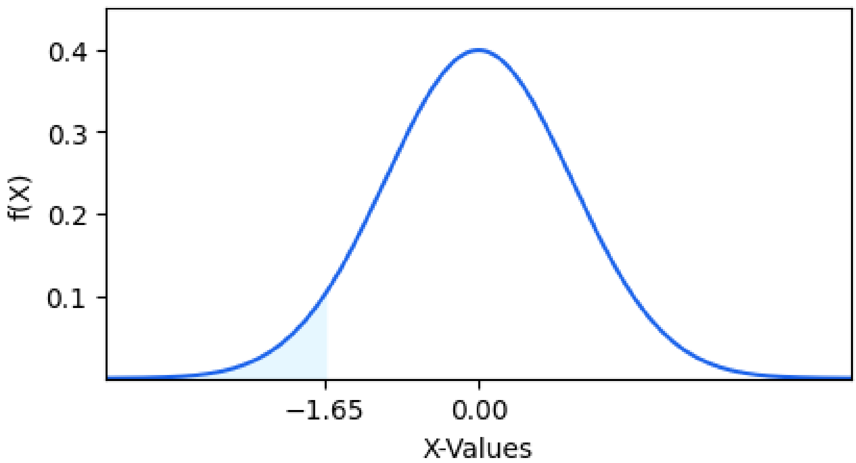
$P(1.5 \leq Z \leq 2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(1.5)$



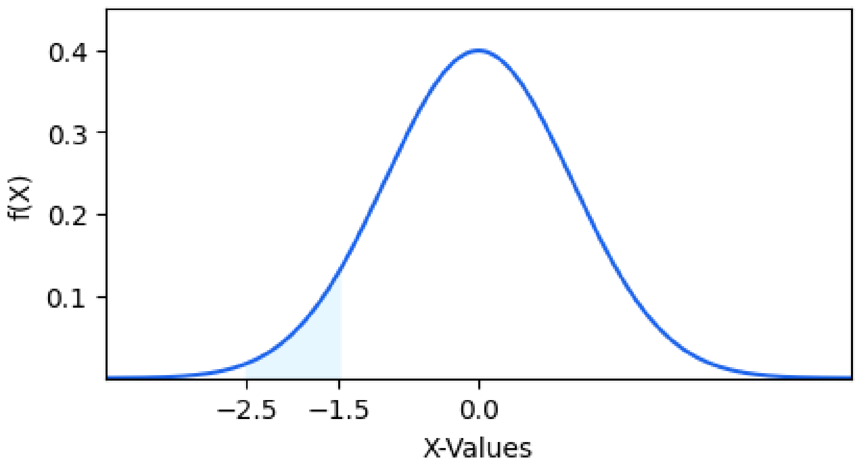
$P(Z \geq -1.5) = P(Z \leq 1.5) = \Phi(1.5)$



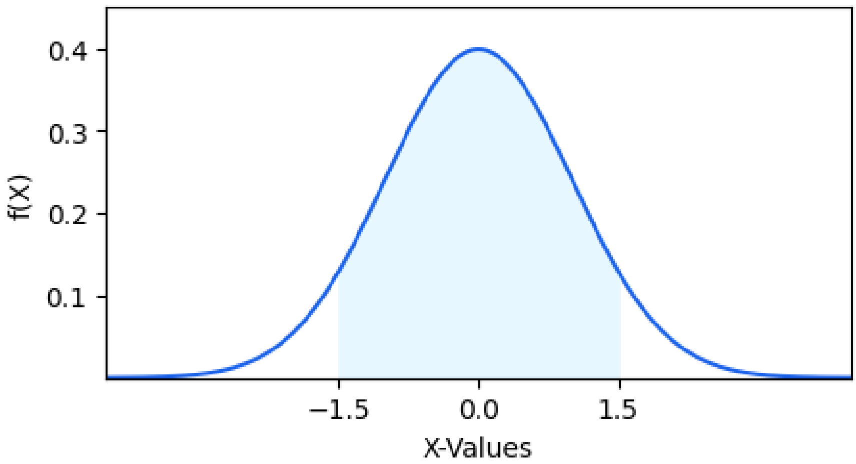
$P(Z \leq -1.65) = P(Z \geq 1.65) = 1 - \Phi(1.65)$



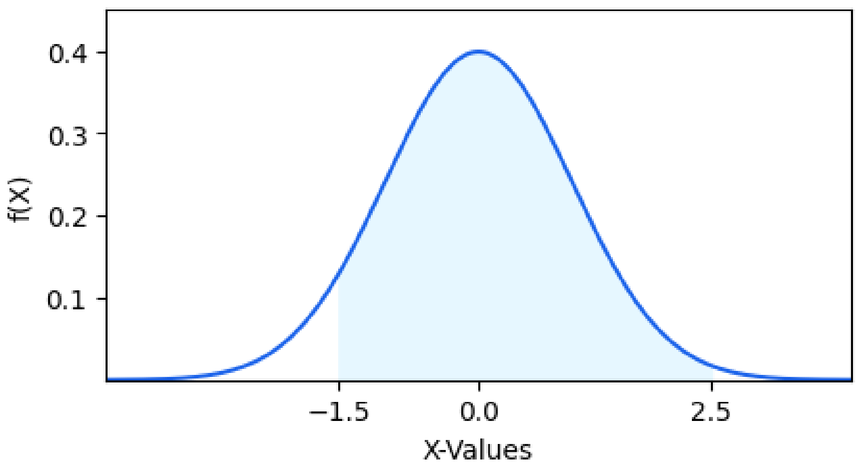
$P(-2.5 \leq Z \leq -1.5) = P(1.5 \leq Z \leq 2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(1.5)$



$P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(1.5) - \big(1 - \Phi(1.5)\big) = 2\Phi(1.5) - 1$



$$P(-1.5 \leq Z \leq 2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(2.5) - \left(1 - \Phi(1.5)\right)$$
$$= \Phi(2.5) + \Phi(1.5) - 1$$



وبصفة عامة، إذا كان a و b ثوابت حقيقة، يمكننا أن نتحصل على:

$$P(-a \leq Z \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1$$

$$P(-a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(-a) = \Phi(b) - (1 - \Phi(a)) = \Phi(a) + \Phi(b) - 1$$

مثال24.5: بافتراض أن أطوال مجتمع إحصائي من الطلبة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 176سم وانحراف معياري 5سم. والمطلوب:

1. ما هي نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة أقل من 182سم؟
2. ما هي نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة أكبر من 178سم؟
3. ما هي نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة يتراوح بين 178سم و182 سم؟
4. ما هي نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة يتراوح بين 170سم و186 سم؟

الحل: نفترض أن X متغير عشوائي يمثل طول الطالب بالسنتيمتر.

1. نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة أقل من 182سم:

$$P(X<182)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{182-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{182-176}{5}\right)=P(Z<1.2)=\Phi(1.2)$$
$$=0.8849$$

2. نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة أكبر من 178سم:

$$P(X>178)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{178-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-176}{5}>\frac{178-176}{5}\right)$$
$$=P(Z>0.4)=1-P(Z\leq 0.4)=1-\Phi(0.4)=1-0.6554=0.3446$$

3. نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة يتراوح بين 178سم و182 سم:

$$P(178<X<182)=P\left(\frac{178-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{182-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(\frac{178-176}{5}<Z<\frac{182-176}{5}\right)=P(0.4<Z<1.2)$$
$$=\Phi(1.2)-\Phi(0.4)=0.8849-0.6554=0.2295$$

4. نسبة الطلبة الذين لديهم طول قامة يتراوح بين 170سم و186 سم:

$$P(170<X<186)=P\left(\frac{170-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{186-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(\frac{170-176}{5}<Z<\frac{186-176}{5}\right)=P(-1.2<Z<2)=\Phi(2)-\Phi(-1.2)$$

$$=\Phi(2)-\left(1-\Phi(1.2)\right)=\Phi(2)+\Phi(1.2)-1$$

$$=0.9772+0.8849-1=0.8621$$

مثال25.5: في سباق للجري للمسافات الطويلة، يتبع الزمن الذي يقطعه المشاركون توزيعاً طبيعياً بمتوسط 90 دقيقة وانحراف معياري 5 دقائق.

1. ما هي نسبة المشاركين الذين يعبرون خط النهاية قبل 80 دقيقة؟
2. إذا أراد شخص أن يكون ضمن 5% الأوائل في هذا السباق، ما هو الوقت الأقصى المسموح به لعبور خط النهاية؟

الحل: نفترض أن المتغير العشوائي X يمثل الوقت الذي يستغرقه المشاركون في السباق.

1. نسبة المشاركين الذين يعبرون خط النهاية قبل 80 دقيقة:

$$P(X<80)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{80-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z<\frac{80-90}{5}\right)=P(Z<-2)=\Phi(-2)$$
$$=1-\Phi(2)=1-0.977=0.023$$

2. الوقت الأقصى المسموح به لعبور خط النهاية:

$$P(X < a) = 0.05 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = 0.05 \Rightarrow P\left(Z < \frac{a-90}{5}\right) = 0.05$$
$$\Rightarrow \frac{a-90}{5} = -1.65 \Rightarrow a = 90 - 1.65 \times 5 = 81.75$$

إذن الوقت الأقصى المسموح به لعبور خط النهاية هو 81.75 دقيقة.

مثال26.5: ينتج أحد المصانع قطع أسطوانية الشكل، نفترض أن القطر الخارجي للقطع الأسطوانية المنتجة (مقاس بالمليمترات) يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 12 مليمتر وانحراف معياري 0.1 مليمتر. إذا كان الحد المسموح به للقطر الخارجي للقطعة يساوي 12±0.2، حيث تعتبر القطعة التي لا يكون قطرها الخارجي ضمن الحدود المسموحة معيبة،

1. ما هي نسبة القطع السليمة؟
2. ما هي نسبة القطع المعيبة؟
3. ما قيمة σ المسموح بها بحيث لا يكون عندنا أكثر من 1% من القطع المعيبة؟

الحل: نفترض أن المتغير العشوائي X يعبر عن القطر الخارجي للقطع (بالمليمتر).

1. نسبة القطع السليمة:

$$P(11.8 \leq X \leq 12.2) = P\left(\frac{11.8-12}{0.1} \leq Z \leq \frac{12.2-12}{0.1}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2)$$
$$= 1 - 2\Phi(2) - 1 = 0.954$$

2. نسبة القطع المعيبة:

$$1 - P(11.8 < X < 12.2) = 1 - 0.954 = 0.046$$

3. قيمة σ المسموح بها بحيث لا يكون عندنا أكثر من 1% من القطع المعيبة:

$$P\left(\frac{11.8-12}{\sigma} < Z < \frac{12.2-12}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-0.2}{\sigma} < Z < \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.99$$
$$\Rightarrow 2P\left(Z < \frac{0.2}{\sigma}\right) - 1 = 0.99 \Rightarrow P\left(Z < \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.995 \Rightarrow \frac{0.2}{\sigma} = 2.575$$
$$\Rightarrow \sigma \approx 0.0777$$

المحـــــور الســـــادس

التوقــع الريـــــاضي والتبايــن

6. المحور السادس: التوقع الرياضي والتباين

1.6. التوقع الرياضي والتباين في حالة متغير عشوائي متقطع

1.1.6. التوقع الرياضي:

لتوضيح مفهوم التوقع الرياضي نعتبر اللعبة التالية: يخسر اللاعب 100 دج في كل لعبة يلعبها باحتمال 0.6، والأرباح الخاصة بهذه اللعبة هي 100 دج، 200 دج و300 دج بالاحتمالات 0.3، 0.08 و0.02 على التوالي. ربح أو خسارة اللاعب الذي يلعب هذه اللعبة عدد قليل من المرات يعتمد على الحظ أكثر من أي شيء أخر. فعلى سبيل المثال، في لعبة واحدة اللاعب المحظوظ يمكن أن يربح 300دج، لكن له احتمال 60% لخسارة 100دج. وإذا قرر اللاعب تكرار اللعبة عدد كبير من المرات. في هذه الحالة ربح أو خسارة اللاعب يعتمد على عدد مرات اللعب أكثر من الحظ. وبهذا إذا قام اللاعب بتكرار اللعبة عدد من المرات قدره n، فإن عدد المرات التي يخسر فيها 100 دج تقريبا هو $n(0.6)$، وعدد المرات التي سوف يربح فيها هو $n(0.3)$، $n(0.08)$ و $n(0.02)$ ومقدار الربح هو 100 دج، 200 دج و300 دج على التوالي. وبهذا مجموع المكاسب تكون:

$$(0.6)n \cdot (-100) + (0.3)n \cdot 100 + (0.08)n \cdot 200 + (0.02)n \cdot 300 = (-8)n \qquad (1)$$

هذا يعطينا متوسط قدره 8 دج كخسار في كل لعبة. أي كلما زاد عدد مرات اللعب انخفض تأثير عامل الحظ وتقترب خسارة اللاعب إلى 8 دج لكل لعبة. إذا كان X متغير عشوائي يمثل مكسب اللاعب في لعبة واحدة. فإن القيمة (-8) نقول عنها أنها القيمة المتوقعة لـ X. ونكتب $E(X) = -8$. بمعنى إذا قمنا بتكرار هذه اللعبة n مرة وقمنا بإيجاد متوسط قيم المتغير X، عندما يكون $n \to \infty$ فإننا نتحصل على $E(X)$. كما أنه في هذه اللعبة $E(X) < 0$، هذا يعني أنه في المتوسط كلما لعبنا كلما زادت الخسارة. وإذا كان على سبيل المثال $E(X) = 0$ فإن تكرار اللعب عدد كبير من المرات يقابله في المتوسط عدم وجود ربح أو خسارة، وهذا النوع من الألعاب تسمى ألعاب متوازنة. في هذا المثال، X هو متغير عشوائي متقطع بمجموعة قيم ممكنة $\{-100,100,200,300\}$، ودالة الكتلة الاحتمالية لـ X معطاة في الجدول الموالي:

x_i	-100	100	200	300
$p(x_i) = P(X = x_i)$	0.6	0.3	0.08	0.02

مع $p(x) = 0$ عندما $x \notin \{-100,100,200,300\}$ ، وبقسمة طرفي المعادلة (1) أعلاه على n، نحصل على:

$$(0.6) \cdot (-100) + (0.3) \cdot 100 + (0.08) \cdot 200 + (0.02) \cdot 300 = 8$$

ومن خلال الجدول نجد:

$$-100 \cdot p(-100) + 100 \cdot p(100) + 200 \cdot p(200) + 300 \cdot p(300) = 8$$

من خلال هذه العلاقة يمكننا حساب القيمة المتوقعة لـ X من خلال جمع جداء القيم الممكنة لـX واحتمالاتها.

تعريف: القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المتقطع X بمجموعة قيم ممكنة A ودالة كتلة احتمالية $p(x)$ معرف كما يلي (إن وجد):

$$E(X) = \sum_{x \in A} xp(x)$$

القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X تسمى أيضا المتوسط، أو الأمل الرياضي، ويرمز لها بـ $E(X)$، EX، μ_X أو μ.

لاحظ أن أي قيمة x_i من قيم X بأوزان $p(x_i) = P(X = x_i)$، إذن $\sum_{x \in A} x_i p(x_i)$ هي عبارة عن المتوسط الحسابي المرجح لـ X.

مثال 1.6: نرمي قطعة نقدية مرتين متتاليتين، وليكن X يمثل عدد الأوجه *heads* المتحصل عليها. ماهي القيمة المتوقعة لـ X ؟

الحل: القيم الممكنة لـ X هي 0، 1 و2، ودالة الكتلة الاحتمالية لـ X معطاة كما يلي: $p(0) = P(X = 0) = 1/4$، $p(1) = P(X = 1) = 1/2$، $p(2) = P(X = 2) = 1/4$ و $p(x) = 0$ عندما $x \notin \{0,1,2\}$. إذن:

$$E(X) = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

وبهذا من المتوقع أنه في المتوسط يمكن الحصول على الوجه *head* مرة واحدة في كل رميتين.

خواص التوقع الرياضي:

1. إذا كان X متغير عشوائي يأخذ قيمة واحدة ثابتة، وبهذا $P(X = c) = 1$ من أجل الثابت c، فإن: $E[X] = c$.

البرهان: بافتراض أنه يوجد قيمة ممكنة وحيدة لـ X ولتكن c وبهذا:

$E[X] = c \cdot P(X = c) = c \cdot 1 = c$

2. ليكن X متغير عشوائي منفصل له مجموعة قيم ممكنة A ودالة كتلة احتمالية $p(x)$. ولتكن g دالة عددية، وبهذا $g(X)$ هي متغير عشوائي حيث:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in A} g\,(x) p(x)$$

من خلال هذه الخاصية يكون:

$E(X^2) = \sum_{x \in A} x^2\, p(x),$

$$E(X^2-2X+4)=\sum_{x\in A}(x^2-2x+4)\,p(x),$$
$$E(e^X)=\sum_{x\in A}e^x\,p(x).$$

3. ليكن X متغير عشوائي منفصل و$g_1,g_2,\dots,g_n$ دوال عددية حقيقية، ولتكن $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ أعداد حقيقية. إذن:

$$E[\alpha_1g_1(X)+\alpha_2g_2(X)+\dots+\alpha_ng_n(X)]$$
$$=\alpha_1E[g_1(X)]+\alpha_2E[g_2(X)]+\dots+\alpha_nE[g_n(X)].$$

من خلال هذه الخاصية يمكن أن نستنتج أن:

$$E(2X^3+5X^2+7X+4)=2E(X^3)+5E(X^2)+7E(X)+4$$
$$E(e^X+2sinX+logX)=E(e^X)+2E(sinX)+E(logX).$$

بالإضافة إلى ذلك يتضح من خلال هذه الخاصية أن $E(X)$ خطية، وبهذا إذا كان $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$ فإن:

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta.$$

مثال 2.6: دالة الكتلة الاحتمالية لمتغير عشوائي منفصل معطاة كما يلي:

$$p(x)=\begin{cases}x/15 & x=1,2,3,4,5\\ 0 & otherwise.\end{cases}$$

والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة لـ $X(6-X)$.

الحل: من خلال الخاصية السابقة:

$$E[X(6-X)]=5\cdot\frac{1}{15}+8\cdot\frac{2}{15}+9\cdot\frac{3}{15}+8\cdot\frac{4}{15}+5\cdot\frac{5}{15}=7$$

2.1.6. التباين والانحراف المعياري:

تعريف: ليكن X متغير عشوائي متقطع له مجموعة قيم ممكنة A، دالة كتلة احتمالية $p(x)$ و $E(X)=\mu$.
نسمي σ_X و $Var\ (X)$ الانحراف المعياري والتباين على التوالي وهما معرفين كما يلي:

$$\sigma_X=\sqrt{E[(X-\mu)^2]}\ و\ Var\ (X)=E[(X-\mu)^2]$$

مبرهنة 01: $Var\ (X)=E(X^2)-[E(X)]^2$.

البرهان: من خلال تعريف التباين:

$$Var(X)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2-2\mu X+\mu^2)=E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2$$
$$=E(X^2)-2\mu^2+\mu^2=E(X^2)-\mu^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

بما أن $Var\ (X) \geq 0$ من أجل أي قيمة للمتغير العشوائي X فإن ما يمكن استنتاجه من خلال هذه العلاقة أعلاه هو: $[E(X)]^2 \leq E(X^2)$.

العلاقة $Var\ (X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ تعتبر أحسن خيار لحساب التباين، والمثال الموالي يوضح كيفية استخدام هذه العلاقة في حساب التباين.

مثال 3.6: المطلوب إيجاد التباين للمتغير العشوائي X، الذي يمثل نتائج رمي قطعة نرد.

الحل: دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X هي $p(x) = 1/6; x = 1,2,3,4,5,6$ و $p(x) = 0$ عندما $x \neq$ 1,2,3,4,5,6، وبهذا:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} xp(x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}$$
$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2p(x) = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x^2 = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}$$

إذن:

$$Var\ (X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

بافتراض أن المتغير العشوائي X ثابت، وبهذا $E(X) = X$ وانحراف X عن $E(X)$ هو 0. وأيضا متوسط انحراف X عن $E(X)$ هو أيضا 0. وبهذا يكون لدينا المبرهنة التالية.

مبرهنة 02: ليكن X متغير عشوائي متقطع له مجموعة قيم ممكنة A، ومتوسط μ. يكون $Var\ (X) = 0$ إذا وفقط إذا كان X ثابت باحتمال 1.

البرهان: نبين أن $Var\ (X) = 0$ يستلزم أن $X = \mu$ باحتمال 1. في البداية نفترض هذا خاطئ، أي نفترض أن X يساوي ثابت k بحيث $k \neq \mu$ وبهذا يستلزم $p(k) = P(X = k) > 0$، إذن:

$$Var\ (X) = (k-\mu)^2p(k) + \sum_{x\in A-\{k\}} (x-\mu)^2p(x) > 0$$

وهذا يتعارض مع $Var\ (X) = 0$، بخلاف هذا إذا كان X ثابت ويساوي c باحتمال 1، فإن $X = E(X) = c = \mu$ باحتمال 1. هذا يستلزم أن: $Var\ (X) = E[(X-\mu)^2] = 0$.

مبرهنة 03: ليكن X متغير عشوائي متقطع، من أجل الثوابت a و b يكون:

$$\begin{aligned} Var\,(aX+b) &= a^2 Var\,(X) \\ \sigma_{aX+b} &= |a|\sigma_X \end{aligned}$$

البرهان:

$$Var\,(aX+b) = E[(aX+b)-E(aX+b)]^2 == E[(aX+b)-(aE(X)+b)]^2$$

$$= E[a(X-E(X))]^2 = E[a^2(X-E(X))^2] = a^2E[(X-E(X))^2]$$
$$= a^2 Var\,(X)$$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفي هذه المعادلة نجد: $\sigma_{ax+h} = |a|\sigma_X$.

مثال 4.6: بافتراض أن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع X هو $E(X)=2$ و $E[X(X-4)]=5$. والمطلوب إيجاد التباين والانحراف المعياري لـ $-4X+12$.

الحل:

$$E(X^2-4X)=5 \quad \Rightarrow \; E(X^2)-4E(X)=5$$

بتعويض قيمة $E(X)$ في المعادلة أعلاه نجد $E(X^2)=13$، وبهذا:

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= E(X^2)-[E(X)]^2 = 13-4 = 9 \\ \sigma_X &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var\,(-4X+12) &= 16Var\,(X) = 16\times 9 = 144 \\ \sigma_{-4x+12} &= |-4|\sigma_x = 4\times 3 = 12 \end{aligned}$$

2.6.التوقع الرياضي والتباين في حالة متغيرعشوائي مستمر:

1.2.6. التوقع الرياضي:

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية f، فإن التوقع الرياضي لـ X معرف بـ:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

القيمة المتوقعة لـ X تسمى أيضا المتوسط، الأمل الرياضي، التوقع الرياضي، وكما في حالة المتغير المتقطع، يرمز له في بعض الأحيان EX ، $E[X]$، μ أو μ_X.

مثال 5.6: نعتبر متغير عشوائي X له دالة كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{27}{490}(3x^2 - 2x) & if\, 2/3 < x < 3 \\ 0 & elsewhere. \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X.

الحل: من خلال التعريف:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{2/3}^{3} \frac{27}{490}(3x^3 - 2x^2)dx \\ &= \frac{27}{490}\left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_{2/3}^{3} = \frac{283}{120} = 2.36 \end{aligned}$$

مثال 6.6: نعتبر متغير عشوائي X له دالة كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X.

الحل:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\, 2e^{-2x} dx$$

وباستخدام التكامل بالتجزئة نتحصل على:

$$E(X) = -xe^{-2x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-2x}\, dx = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

النتيجة أعلاه تحصلنا عليها من خلال تطبيق *Hôpital's rule* :

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{-2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{-2x}} = 0$$

مثال 7.6: نعتبر متغير عشوائي X له دالة كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & -1 < x < 2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X.

الحل:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^{2} c\,x^2 dx = 1 \Rightarrow c\frac{x^3}{3}|_{-1}^{2} = 1 \Rightarrow c\frac{8-(-1)}{3} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$E(X) = \int_{-1}^{2} x\,f(x)dx = \int_{-1}^{2} x\frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{16-1}{4} = \frac{5}{4}$$

ملاحظة 01: إذا كان X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية f، نقول عن X أن له قيمة متوقعة منتهية إذا كان:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$$

هذا يعني أن X له قيمة متوقعة منتهية إذا كان التكامل $xf(x)$ متقارب مطلقا، وإذا كان شرط التقارب المطلق غير محقق تكون القيمة المتوقعة لـ X غير منتهية. وفيما يلي سوف نبين لماذا يعتبر التقارب المطلق للتكامل كشرط ضروري وكافي لوجود القيمة المتوقعة للمتغير X. لاحظ أن:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} (-x)f(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx \end{aligned}$$

بحيث $\int_{-\infty}^{0}(-x)f(x)dx \geq 0$ و $\int_{0}^{\infty} xf(x)dx \geq 0$. وبهذا $E(X)$ موجود إذا كان كلا التكاملين $\int_{-\infty}^{0}(-x)f(x)dx$ و $\int_{0}^{\infty} xf(x)dx$ يختلفان عن ∞. وبعبارة أخرى يكون $E(X) < \infty$ إذا كان كلا التكاملين يختلفان عن $+\infty$. وبهذا الشرط الضروري والكافي من أجل أن يكون $E(X)$ موجود ومنته هو $\int_{-\infty}^{0}(-x)f(x)dx < \infty$ و $\int_{0}^{\infty} xf(x)dx < \infty$. إذن كلا التكاملين منتهيين إذا وفقط إذا كان:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} (-x)f(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx$$

منته، وبهذا يكون $E(X)$ موجود ومنته إذا وفقط إذا كان التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ متقارب مطلقا.

مثال 8.6: متغير عشوائي X له دالة كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad -\infty < x < \infty,$$

أثبت أن $E(X)$ غير موجود؟

الحل:

لتبيين أن $E(X)$ غير موجود، لاحظ أن:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x|dx}{\pi(1+x^2)} = 2\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\pi(1+x^2)}\\ &= \frac{1}{\pi}[ln\,(1+x^2)]_0^{\infty} = \infty\end{aligned}$$

المبرهنة الموالية تعطي علاقة مباشرة بين دالة التوزيع التراكمية لمتغير عشوائي وقيمته المتوقعة. حيث تمكننا من إيجاد القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي مستمر دون استخدام دالة الكثافة الاحتمالية.

مبرهنة 04: إذا كان X متغير عشوائي مستمر له دالة توزيع تراكمية F ودالة كثافة احتمالية f فإن:

$$E(X) = \int_0^{\infty}[1-F(t)]dt - \int_0^{\infty}F(-t)dt$$

البرهان: لاحظ أن:

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0}xf(x)dx + \int_0^{\infty}xf(x)dx\\ &= -\int_{-\infty}^{0}\left(\int_0^{-x}dt\right)f(x)dx + \int_0^{\infty}\left(\int_0^{x}dt\right)f(x)dx\\ &= -\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{-t}f(x)dx\right)dt + \int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty}f(x)dx\right)dt\end{aligned}$$

وباعتبار أن $\int_{-\infty}^{-t}f(x)dx = F(-t)$ و $\int_t^{\infty}f(x)dx = P(X>t) = 1-F(t)$ نتحصل على:

$$E(X) = \int_0^{\infty}[1-F(t)]dt - \int_0^{\infty}F(-t)dt$$

مبرهنة 05: ليكن X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية $f(x)$، ولتكن $h(X)$ دالة عددية، إذن:

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty}h(x)f(x)dx.$$

البرهان: ليكن X متغير عشوائي منفصل و $h_1, h_2, \dots, h_n$ دوال عددية حقيقية، ولتكن $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ أعداد حقيقية. إذن:

$$\begin{aligned}&E[\alpha_1h_1(X) + \alpha_2h_2(X) + \cdots + \alpha_nh_n(X)]\\ &\qquad = \alpha_1E[h_1(X)] + \alpha_2E[h_2(X)] + \cdots + \alpha_nE[h_m(X)]\end{aligned}$$

ومن خلال هذه المعادلة يكون مثلا:

$$E(3X^4 + cos\ X + 3e^x + 7) = 3E(X^4) + E(cos\ X) + 3E(e^x) + 7.$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كان $\alpha,\beta \in \boldsymbol{R}$ فإن:

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta.$$

مثال 9.6: نعتبر متغير عشوائي X له دالة كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

والمطلوب إيجاد $E(X^n)$.

الحل:

$$E(X^n)=\int_0^1 x^n\,f_X(x)dx=\int_0^1 x^n\times\frac{1}{1-0}dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

2.2.6. التباين والانحراف المعياري:

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي مستمر بتوقع رياضي $E(X)=\mu$، نسمي $Var\,(X)$ و σ_X التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X على التوالي، ومعرفين كما يلي:

$$Var\,(X)=E[(X-\mu)^2]$$

$$\sigma_X=\sqrt{E[(X-\mu)^2]}$$

وبهذا، إذا كانت f تمثل دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X، فإن:

$$Var\,(X)=E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$

أيضا، يمكننا الحصول على العلاقتين التاليتين والبرهان الخاص بهما مماثل لما هو في حالة المتغير المتقطع:

$$Var\,(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$Var\,(aX+b)=a^2\,Var(X)\,,\ \sigma_aX+b=|a|\sigma_X$$

بحيث a و b ثوابت.

المحور السابع

العزوم والدالة المولدة للعزوم

7. المحور السابع: العزوم والدالة المولدة للعزوم

1.7. العزوم -المفهوم -العزوم الابتدائية- العزوم المركزية

1.1.7. العزوم: لكن X متغير عشوائي و r عدد طبيعي. نسمي العزم من الرتبة r لـ X بالنسبة للعدد الثابت c ، العدد الحقيقي (إن وجد): $E((X-c)^r)$.

2.1.7. العزوم الابتدائية: نسمي القيمة $E(X^r)$ العزم الابتدائي (غير المتمركز) من الرتبة r لـ X والذي نرمز له بـ m_r، أي أن: $m_r = E(X^r)$، ويتم حساب هذا العزم كما يلي:

$$m_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum x^r P(X=x) & \text{في حالة } X \text{ منفصل} \\ \int x^r f(x)dx & \text{في حالة } X \text{ متصل} \end{cases}$$

بشرط أن: $E(|X|^r) < \infty$ (المجموع أو التكامل تقاربي).

لاحظ أن:

1. $m_1 = 1$
2. $m_1 = E(X) = \mu$
3. $m_2 = E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = m_2 - \mu^2$

3.1.7. العزوم المركزية: نسمي القيمة $E((X-\mu)^r)$ العزم المركزي من الرتبة r لـ X والذي نرمز له بـ μ_r، أي أن: $\mu_r = E((X-\mu)^r)$، ويتم حساب هذا العزم كما يلي:

$$\mu_r = E((X-\mu)^r) = \begin{cases} \sum (X-\mu)^r P(X=x) & \text{في حالة } X \\ \int (X-\mu)^r f(x)dx & \text{في حالة } X \text{متصل} \end{cases}$$

لاحظ أن:

1. $\mu_0 = 1$

لأن: $\mu_0 = E((X-\mu)^0) = E(1) = 1$

2. $\mu_1 = 0$

لأن: $\mu_1 = E((X-\mu)^1) = E(X-\mu) = \mu - \mu = 0$

3. $\mu_2 = \sigma^2$

لأن: $\mu_2 = E((X-\mu)^2) = \sigma^2$

العلاقة بين μ_r و $\mathbf{m}_r$:

1. $\mu = m_1$

2. $\mu_2 = m_2 - \mu^2 = \sigma^2$
3. $\mu_3 = m_3 - 3\mu m_2 + 2\mu^3$
4. $\mu_4 = m_4 - 4\mu m_3 + 6\mu^2 m_2 - 3\mu^4$

ملاحظة: إذا وجد العزم $E(X^r)$ فإن كل العزوم $E(X^k)$ موجودة إذا كان $k \le r$.

مثال 1.7: إذا كان المتغير العشوائي X له دالة الكتلة الاحتمالية التالية:

$$P(X = x_i) = \frac{x_i}{10} \quad , x_i = 1,2,3,4$$

المطلوب إيجاد العزوم الثلاثة الأولى والعزم الثالث المركزي.

الحل:

$$m_r = \sum x^r P(X = x_i)$$

$$m_1 = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{10}[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2] = \frac{30}{10} = 3$$

$$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(X = x_i) = \frac{1}{10}[1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3] = \frac{100}{10} = 10$$

$$m_3 = E(X^3) = \sum_{i=1}^{4} x_i^3 P(X = x_i) = \frac{1}{10}[1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4] = \frac{354}{10} = 35.4$$

$$\mu_r = E((X - \mu)^r) = \sum (x - \mu)^r P(X = x_i)$$

$$\mu_3 = E((X - \mu)^3) = E(X^3) - 3(E(X) \cdot E(X^2) + 2(E(x))^3$$

$$= m_3 - 3\mu m_2 + 2\mu^3$$

$$\mu_3 = E((X - \mu)^3) = 35.4 - (3 \times 3 \times 10) + (2 \times 3^3) \; = 35.4 - 90 + 54 = -0.6$$

مثال 2.7: إذا كان المتغير العشوائي X له دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; otherwise \end{cases}$$

المطلوب إيجاد العزوم الثلاثة الأولى والعزم الثالث المركزي.

الحل:

$$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$$

$$m_1 = E(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 2x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$m_2 = E(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$m_3 = E(X^3) = \int_0^1 2x^4 dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

ولإيجاد العزم الثالث المتمركز يمكن إتباع إحدى الطريقتين:

.

الطريقة الأولى (مباشرة):

من العلاقة:

$$\mu_r = E((X-\mu)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx$$

$$\mu_3 = E((X-\mu)^3) = \int_0^1 (x-2/3)^3 2xdx$$

$$= 2\int_0^1 x\left(x^3 - 3\cdot\frac{2}{3}x^2 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)dx = 2\int_0^1 \left[x^4 - 2x^3 + \frac{16}{27}x\right]dx$$

$$= 2\left[\frac{x^5}{5} - 2\times\frac{x^4}{4} + \frac{16}{27}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\cdot\left[\frac{-1}{270}\right] = \frac{-1}{135}$$

الطريقة الثانية:

من العلاقة:

$$\mu_3 = E((X-\mu)^3) = m_3 - 3\mu m_2 + 2\mu^3$$

$$\mu_3 = E((X-2/3)^3) = 2/5 - (3\times 2/3\times 1/2) + 2(2/3)^3 = \frac{-1}{135}$$

2.7. الدالة المتجددة للعزوم

تعريف: نسمي الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X، الدالة:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

من أجل كل قيمة حقيقية t تجعل من الكمية $E(e^{tX})$ موجودة ومنتهية.

وبهذا إذا كان X متغير عشوائي متقطع مجموعة القيم الممكنة له هي A ودالة كتلته الاحتمالية $p(x)$، فإن الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير معرفة كما يلي:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x\in A} e^{tx}p(x)$$

وإذا كان X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية $f(x)$، فإن الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير معرفة كما يلي:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx$$

مبرهنة: إذا كان X متغير عشوائي له دالة مولدة للعزوم $M_X(t)$ موجودة ومنتهية حيث t ينتمي إلى مجال يحتوي على 0 و r عدد طبيعي غير معدوم، فإن كل عزوم المتغير العشوائي X موجودة ومعطاة كما يلي:

$$E(X^r) = M^{(r)}(0)$$

مع $M^{(r)}(0)$ هي الدالة المشتقة من الرتبة r للدالة $M(t)$ عند القيمة 0.

البرهان: نقوم ببرهان هذه الخاصية في حالة المتغير العشوائي المستمر، وفي حالة المتغير العشوائي يكون البرهان بطريقة مماثلة. إذا كان X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية $f(x)$، فإن:

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f(x)dx$$

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f(x)dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{tx} f(x)dx$$

$$\vdots$$

$$M_X^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{tx} f(x)dx$$

بوضع $t = 0$، نتحصل على:

$$M'_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = E(\mathrm{X})$$

$$M''_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = E(X^2)$$

$$\vdots$$

$$M_X^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{tx} f(x)dx = E(X^n)$$

مثال 3.7: بافتراض أن X متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة التالية و، والمطلوب إيجاد الدالة المولدة للعزوم واستنتاج العزم من الدرجة الأولى والثانية.

$$P(x) = \frac{e^{-1}}{x!}; x = 0,1,2,\ldots$$

الحل: تبعا لتعريف الدالة المولدة للعزوم لدينا:

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-1}}{x!} = e^{-1}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t)^x}{x!} = e^{-1}\times e^{e^t} = e^{(e^t-1)}$$

وبهذا:

$$M'_X(t) = e^t e^{(e^t-1)} \Rightarrow E(X) = M'_x(t)|_{t=0} = 1$$

$$M''_X(t) = e^t e^{(e^t-1)} + (e^t)^2 e^{(e^t-1)} \Rightarrow E(X^2) = M''_x(t)|_{t=0} = 1 + 1 = 2$$

مثال 4.7: بافتراض أن X متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة التالية و، والمطلوب إيجاد الدالة المولدة للعزوم واستنتاج العزم من الدرجة الأولى والثانية.

$$P(x) = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}; x = 0,1,2, \dots, n$$

الحل: تبعا لتعريف الدالة المولدة للعزوم لدينا:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\frac{\binom{n}{x}}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}e^{tx} = \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}e^{tx}1^{n-x} = \frac{1}{2^n}(e^t+1)^n$$

بحيث المعادلة الأخير تحصلنا عليها من خلال تطبيق صيغة ثنائي الحد:

$$\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x} = (a+b)^n.$$

وبهذا:

$$M_X'(t) = \frac{1}{2^n}ne^t(e^t+1)^{n-1} \Rightarrow E(X) = M_X'(t)|_{t=0} = \frac{n}{2}$$

$$M_X''(t) = \frac{1}{2^n}ne^t(e^t+1)^{n-1} + \frac{1}{2^n}ne^t(n-1)e^t(e^t+1)^{n-2}$$

$$\Rightarrow E(X^2) = M_X''(t)|_{t=0} = \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4}$$

مثال 5.7: بافتراض أن X متغير عشوائي مستمر له دالة الكثافة الاحتمالية التالية، والمطلوب إيجاد الدالة المولدة للعزوم واستنتاج العزم من الدرجة k.

$$f(x) = 2e^{-2x}; x > 0$$

الحل: تبعا لتعريف الدالة المولدة للعزوم لدينا:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}2e^{-2x}dx = 2\int_0^\infty e^{-(2-t)x}dx = \frac{2}{2-t}; \qquad t < 2$$

$$M_X'(t) = \frac{2}{(2-t)^2} \Rightarrow E(X) = M_X'(t)|_{t=0} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$M_X''(t) = \frac{2\times 2}{(2-t)^3} \Rightarrow E(X^2) = M_X''(t)|_{t=0} = \frac{2\times 2}{2^3} = \frac{2}{2^2}$$

$$M_X'''(t) = \frac{3\times 2\times 2}{(2-t)^4} \Rightarrow E(X^3) = M_X''(t)|_{t=0} = \frac{3!\times 2}{2^4} = \frac{3!}{2^3}$$

وبطريقة مماثل نتحصل على:

$$E(X^k) = \frac{d^k M_x(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0} = \frac{k!\times 2}{(2-t)^{k+1}}\bigg|_{t=0} = \frac{k!}{2^k}$$

خاصية 01: ليكن X متغير عشوائي له دالة مولدة للعزوم $M_X(t)$. وليكن $Y = aX + b$ حيث a و b ثوابت حقيقية، إذن الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي Y معرفة كما يلي:

$$M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$$

البرهان: باستعمال تعريف الدالة المولدة للعزوم نتحصل على:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left[e^{t(aX+b)}\right] = e^{bt}E(e^{atX}) = e^{bt}M_X(at)$$

مثال 6.7:إذا كانت الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي X هي: $M_X(t) = \frac{2}{2-t}\,;\, t < 2$، المطلوب إيجاد الدالة المولدة للعزوم للمتغير Y المعرف كما يلي $Y = X - 1$.

الحل:

$$Y = X - 1 \Rightarrow M_Y(t) = M_x(t)e^{-t} = \frac{e^t}{2 - e^t}e^{-t} = \frac{1}{2 - e^t}$$

3.7. العزوم والدالة المولدة للعزوم لبعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة

1.3.7. العزوم والدالة المولدة للعزوم لبعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

1. توزيع برنولي: إذا كان X متغير عشوائي متقطع له توزيع برنولي بالمعلمة p أي $X \sim B(p)$، فإن دالة كتلته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$p(x) = \begin{cases} 1 - p & \text{if } x = 0 \\ p & \text{if } x = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

الدالة المولدة للعزوم معرفة كما يلي:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx}\,P(X = x) = qe^0 + pe^t = pe^t + q$$

باستخدام الدالة المولدة للعزوم نتحصل على التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

$$E(X) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = pe^t|_{t=0} = p$$

$$E(X^2) = \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = pe^t|_{t=0} = p$$

$$\Rightarrow Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p(1 - p)$$

2. التوزيع ثنائي الحد: إذا كان X متغير عشوائي متقطع له توزيع ثنائي الحد بالمعلمتين n و p أي $X\sim B(n,p)$، فإن دالة كتلته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$p(x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x},\quad x=0,1,2,\dots,n,\ q=1-p$$

الدالة المولدة للعزوم معرفة كما يلي:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}=(pe^t+q)^n$$

باستخدام الدالة المولدة للعزوم نتحصل على التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

$$E(X)=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=npe^t(pe^t+1-p)^{n-1}|_{t=0}=np$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}\\&=(n(n-1)(pe^t)^2(pe^t+1-p)^{n-2}+npe^t(pe^t+1-p)^{n-1})|_{t=0}\\&=n(n-1)p^2+np\\&\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=np(1-p)\end{aligned}$$

3. توزيع بواسون: إذا كان X متغير عشوائي متقطع له توزيع بواسون بالمعلمة λ أي $X\sim P(\lambda)$، فإن دالة كتلته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$P(X=x_i)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}\qquad x_i=0,1,2,3,\dots$$

الدالة المولدة للعزوم معرفة كما يلي:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^t}=e^{\lambda(e^t-1)}$$

باستخدام الدالة المولدة للعزوم نتحصل على التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

$$E(X)=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0}=\lambda$$

$$E(X^2)=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left(\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}+\lambda^2e^{2t}e^{\lambda(e^t-1)}\right)\Big|_{t=0}=\lambda+\lambda^2$$

$$Var(X)=(\lambda+\lambda^2)-\lambda^2=\lambda,\qquad \sigma_X=\sqrt{\lambda}$$

4. التوزيع الهندسي: إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي بالمعلمة p، أي $X\sim G(p)$، فإن دالة كتلته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$p(x)=\begin{cases}(1-p)^{x-1}p & 0<p<1,\ x=1,2,3,\dots.\\0 & elsewhere\end{cases}$$

الدالة المولدة للعزوم معرفة كما يلي:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}q^{x-1}p=\frac{p}{q}\sum_{x=1}^{\infty}(qe^t)^x=\frac{p}{q}\frac{qe^t}{1-qe^t}=\frac{pe^t}{1-qe^t}\quad ;qe^t<1$$

باستخدام الدالة المولدة للعزوم نتحصل على التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

$$E(X)=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}\right|_{t=0}=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{pe^t-pe^{3t}+2p^2e^{3t}-p^3e^{3t}}{(1-qe^t)^4}\right|_{t=0}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1-p}{p^2}$$

2.3.7. العزوم والدالة المولدة للعزوم لبعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة:

1. التوزيع الأسي: إذا كان X متغير عشوائي مستمر له التوزيع الأسي بالمعلمة λ ، فإن دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0$$

الدالة المولدة للعزوم معرفة كما يلي:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int_0^{\infty}e^{tx}\,\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{\infty}e^{-(\lambda-t)x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda-t};\quad t<\lambda$$

باستخدام الدالة المولدة للعزوم نتحصل على التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

$$E(X)=\left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\right|_{t=0}=\frac{\lambda}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\right|_{t=0}=\frac{2\lambda}{\lambda^3}=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$Var\,(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\lambda^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

2. التوزيع الطبيعي: إذا كان Z متغير عشوائي مستمر له توزيع طبيعي معياري أي $Z\sim N(0,1)$ ، فإدالة الكثافة الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\,,z\in\,]-\infty,+\infty[$$

الدالة المولدة للعزوم معرفة كما يلي:

$$M_Z(t) = E(e^{tz}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} f(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(z^2-2tz)}{2}} dz$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(z-t)^2}{2}+\frac{t^2}{2}} dz = e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z-t)^2}{2}} dz = e^{\frac{t^2}{2}}$$

كما يمكننا أيضا استنتاج الدالة المولدة للعزوم لمتغير عشوائي X الذي يتبع التوزيع الطبيعي بالمعلمتين μ و σ. كما يلي:

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = Z \Rightarrow X = \sigma Z + \mu \Rightarrow M_X(t) = M_{\sigma Z+\mu}(t) = e^{t\mu} M_Z(\sigma t) = e^{t\mu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{t\mu+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

باستخدام الدالة المولدة للعزوم نتحصل على التوقع الرياضي والتباين كما يلي:

$$E(X) = \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left[(\mu+\sigma^2 t)\exp\left(t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right]\Bigg|_{t=0} = \mu$$
$$E(X^2) = \left.\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left[(\mu+\sigma^2 t)^2 \exp\left(t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) + \sigma^2 \exp\left(t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right)\right]\Bigg|_{t=0}$$
$$= \mu^2 + \sigma^2$$
$$Var(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

المحور الثامن

نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة

8. المحور الثامن: نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة

1.8. متراجحة ماركوف (Markov's Inequality):

مبرهنة (Markov's Inequality) : إذا كان X متغير عشوائي موجب، فإنه من أجل أي قيمة $t > 0$:

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

البرهان:

أ. حالة المتغير العشوائي المتقطع: إذا كان X متغير عشوائي متقطع له دالة كتلة احتمالية $p(x)$، ولتكن A تمثل مجموعة القيم الممكنة لـ X و $B = \{x \in A: x \geq t\}$.

إذن:

$$E(X) = \sum_{x \in A} xp(x) \geq \sum_{x \in B} xp(x) \geq t \sum_{x \in B} p(x) = tP(X \geq t)$$

ومنه:

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

ب. حالة المتغير العشوائي المستمر: إذا كان X متغير عشوائي مستمر موجب له دالة كثافة احتمالية $f(x)$،

إذن:

$$E[X] = \int_0^\infty x\, f(x)dx = \int_0^t x\, f(x)dx + \int_t^\infty x\, f(x)dx \geq \int_t^\infty x\, f(x)dx \geq \int_t^\infty t\, f(x)dx$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\int_t^\infty t\, f(x)dx = t \int_t^\infty f\,(x)dx = tP\{X \geq t\}$$

ومنه:

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

مثال 1.8: مركز بريدي يستقبل في المتوسط يوميا 10000 رسالة بريدية. ما الذي يمكن قوله حول احتمال استقبال:

1- على الأقل 15000 رسالة غدا؟

2- أقل من 15000 رسالة غدا؟

الحل: ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الرسائل التي يستقبلها هذا المركز البريدي غدا. إذن: $E(X) =$ .10,000

1- باستخدام Markov's inequality نجد:

$$P(X \geq 15{,}000) \leq \frac{E(X)}{15.000} = \frac{10{,}000}{15{,}000} = \frac{2}{3}$$

2- باستخدام المتراجحة المتحصل عليها في السؤال الأول نجد:

$$P(X < 15{,}000) = 1 - P(X \geq 15{,}000) \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2.8. متراجحة شيبيشيف (Chebyshev's Inequality):

مبرهنة (Chebyshev's Inequality): إذا كان X متغير عشوائي له قيمة متوقعة μ وتباين σ^2، إذن من أجل أي قيمة $\varepsilon > 0$ ،

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

البرهان:

باعتبار أن $(X - \mu)^2$ متغير عشوائي موجب، إذن يمكننا تطبيق Markov's inequality مع $(t = \varepsilon^2)$ نجد:

$$P((X - \mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E[(X - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

لكن يكون $(X - \mu)^2 \geq \varepsilon^2$ إذا وفقط إذا كان: $|X - \mu| \geq \varepsilon$ ، وبهذا:

$$P(|X - \mu| \geq t\ ) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

ملاحظة 01: يمكن الحصول على صيغة مكافئة لمتراجحة شيبيشيف من الصيغة السابقة كما يلي:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow 1 - P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

ومنه:

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \sigma^2/\varepsilon^2$$

ملاحظة 02: بوضع $\varepsilon = k\sigma$ ، من خلال متراجحة شيبيشيف نتحصل على:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$$

إذن احتمال أن ينحرف X عن قيمته المتوقعة بعلى الأقل k إنحراف معياري هو أقل من $1/k^2$.

ومنه يمكن أن نكتب:

$$1 - P(|X-\mu| < k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \;\Rightarrow\; P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$
$$\Rightarrow\; P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

أي أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيما في المجال $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ لا يقل عن $1 - \frac{1}{k^2}$. وبهذا على سبيل المثال:

$$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq 1/4.$$
$$P(|X-\mu| \geq 4\sigma) \leq 1/16.$$
$$P(|X-\mu| \geq 10\sigma) \leq 1/100.$$

مثال 2.8: بافتراض أن عدد الوحدات المنتجة من منتوج معين في أحد الشركات خلال أسبوع هو متغير عشوائي بمتوسط 500 وحدة.

1. ما الذي يمكن قوله حول احتمال أن تكون عدد الوحدات المنتجة خلال أسبوع على الأقل 1000 وحدة؟
2. إذا كان تباين الوحدات المنتجة خلال أسبوع معلوم ويساوي 100، إذن ما الذي يمكن قوله حول احتمال أن تكون عدد الوحدات المنتجة خلال أسبوع تتراوح بين 400 و600 وحدة؟

الحل: ليكن X يمثل عدد الوحدات المنتجة خلال أسبوع.

1. من خلال Markow's inequality:

$$P(X \geq 1000) \leq \frac{E[X]}{1000} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$$

2. من خلال متراجحة شيبيشيف:

$$P(|X-500| \geq 100) \leq \frac{\sigma^2}{(100)^2} = \frac{1}{100}$$

وبهذا:

$$P(|X-500| < 100) \geq 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

إذا احتمال أن يكون عدد الوحدات المنتجة خلال أسبوع يتراوح بين 400 و600 هو على الأقل 0.99.

مثال 3.8: بافتراض أنه، في المتوسط، يستقبل مركز بريدي 10000 رسالة يوميا بتباين قدره 2000. ما الذي يمكن قوله حول احتمال استقبال عدد من الرسائل يتراوح بين 8000 و12000 غدا؟

الحل: ليكن X يمثل عدد الرسائل التي يستقبلها هذا المركز البريدي غدا. ونريد حساب $P(8000 < X < 12{,}000)$، لاحظ أن $\mu = E(X) = 10{,}000$ ، $\sigma^2 = \text{Var}(X) = 2000$ ، وبهذا:

$$\begin{aligned} P(8000 < X < 12{,}000) &= P(-2000 < X - 10{,}000 < 2000) \\ &= P(|X - 10{,}000| < 2000) \\ &= 1 - P(|X - 10{,}000| \geq 2000) \end{aligned}$$

باستخدام Chebyshev's inequality نتحصل على:

$$P(|X - 10{,}000| > 2000) < \frac{2000}{(2000)^2} = 0.0005.$$

ومنه:

$$P(8000 < X < 12{,}000) = P(|X - 10{,}000| < 2000) > 1 - 0.0005 = 0.9995.$$

كما تجدر الإشارة إلى أن حدود مجالات الاحتمالات المتحصل عليها من خلال Markov's inequality و Chebyshev's inequalities لا تكون قريبة من الاحتمالات الحقيقة، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 4.8: نرمي قطعة نرد، وليكن X يمثل النتيجة المحصل عليها من هذه التجربة. من الواضح أن:

$$E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6}$$
$$E(X^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$$

ومنه $\text{Var}\,(X) = 91/6 - 441/36 = 35/12$، ومن خلال Markov's inequality:

$$P(X \geq 6) \leq \frac{21/6}{6} \approx 0.583.$$

وباستخدام Chebyshev's inequality نحصل على:

$$P\left(\left|X - \frac{21}{6}\right| \geq \frac{3}{2}\right) \leq \frac{35/12}{9/4} \approx 1.296,$$

وهذا يعتبر غير منطقي لأننا نعلم أن $P(|X - 21/6| \geq 3/2) \leq 1$، ومع ذلك القيمة الحقيقية لهذا الاحتمالات أقل بكثير من هذه الحدود: $P(\mathrm{X} \geq 6) = 1/6 \approx 0.167$ وبهذا:

$$P\left(\left|X - \frac{21}{6}\right| \geq \frac{3}{2}\right) = P(X \leq 2 \text{ or } X \geq 5) = \frac{4}{6} \approx 0.667$$

مثال 5.8: بافتراض أن X متغير عشوائي له توزيع أسي بالمعلمة $\lambda = 2$، المطلوب باستخدام متراجحة شيبيشيف ما الذي يمكن قوله حول احتمال الحدث التالي: $\{|X - \mu| > 1\}$، ثم قارن هذه النتيجة مع القيمة الفعلية لهذا الاحتمال.

الحل: بما أن المتغير العشوائي X له توزيع أسي بالمعلمة $\lambda = 2$، فإن:

$$V(X)=\frac{1}{4}\,, E(X)=\frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$P(|X-\mu|>1)\le\frac{\sigma^2}{1}=\frac{1}{4}\Longrightarrow P(|X-\mu|>1)\le 0.25$$

أي أعلى قيمة للاحتمال لن تزيد عن 0.25.

لكن من أجل حساب القيمة الفعلية للاحتمال يمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu|>1) \quad &= 1-P(|X-\mu|\le 1)\\
&= 1-P\left(-1\le X-\frac{1}{2}\le 1\right)\\
&= 1-P\left(-\frac{1}{2}< X\le\frac{3}{2}\right)\\
&= 1-P(0\le X\le 1.5)\\
&= 1-(\mathrm{F}(1.5)-\mathrm{F}(0))\\
&= 1-\left(1-e^{-2(1.5)}-(1-e^{0})\right)\\
&= 1-(1-e^{-3})=e^{-3}=\frac{1}{e^3}=0.0498
\end{aligned}$$

وبمقارنة قيمة هذا الاحتمال مع النتيجة السابقة نجد أن المتراجحة محققة.

مثال 6.8: بافتراض أن $X\sim N(20,9)$، المطلوب باستخدام متراجحة شيبيشيف ما الذي يمكن قوله حول احتمال الحدث التالي: $\{|X-\mu|\ge 6\}$، ثم قارن هذه النتيجة مع القيمة الفعلية لهذا الاحتمال.

الحل: بما ان المتغير العشوائي طبيعي له توقع $E(X)=20$ و $V(X)=9$ فإن:

$$P(|X-\mu|\ge\varepsilon)\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Longrightarrow P(|X-20|\ge 6)\le\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0.25$$

أي الحد الأعلى لاحتمال الحدث $\{|X-\mu|\ge 6\}$ هو 0.25.

$$\begin{aligned}
P(|X-20|\ge 6) \quad &= 1-P(|X-20|<6)\\
&= 1-P(-6<X-20<6)\\
&= 1-P(14<X<26)\\
&= 1-P\left(\frac{14-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{26-\mu}{\sigma}\right)\\
&= 1-P\left(\frac{14-20}{3}<Z<\frac{26-20}{3}\right)\\
&= 1-P(-2<Z<2)\\
&= 1-(F(2)-F(-2))\\
&= 1-(2F(2)-1) \qquad ;F(2)+F(-2)=1\\
&= 2-2F(2)=2-2(0.9772)\\
&= 2-1.9544=0.0556
\end{aligned}$$

مثال 7.8: بافتراض أن $X\sim N(\mu,0)$، أثبت أن: $P(X-\mu)=1$.

الحل:

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) = 0$$

وهذا يعني أن احتمال الحدث $\{|X-\mu| \geq \varepsilon\}$ مساو للصفر. أي أنه يجب لأن يكون: $P(X-\mu) = 1$.

3.8. نظرية الأعداد الكبيرة

نظرية 01: (القانون الضعيف للأعداد الكبيرة) لتكن X_1، X_2، X_3، ... متتالية متغيرات مستقلة ومتماثلة التوزيع بمتوسط $\mu = E(X_i)$ و $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X_i) < \infty$ مع $i = 1,2, \dots$، وبهذا $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

بحيث: $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

لاحظ أن $\bar{X} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ ويمثل المتوسط الحسابي لمتتالية المتغيرات X_1، X_2، X_3، ....

لتكن $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ عينة عشوائية من مجتمع، القانون الضعيف للأعداد الكبيرة يستلزم أنه إذا كان حجم العينة كبير بما فيه الكفاية $(n \to \infty)$، فإن متوسط المجتمع μ يقترب من $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$. وبهذا إذا كان حجم العينة كبير بما فيه الكفاية n، من المحتمل أن يكون البعد $|\bar{X} - \mu|$ صغير جدا.

البرهان: باعتبار أن:

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) &= \mathrm{Var}\,\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}[\mathrm{Var}\,(X_1) + \mathrm{Var}\,(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}\,(X_n)] \\ &= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

وباستخدام متراجحة شيبيشيف نتحصل على:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2/n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

وبأخذ نهاية الطرفين لهذه المتراجحة عندما $n \to \infty$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}\right) = 0$$

وبما أن الاحتمال غير سالب فإن:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) = 0$$

ملاحظة: يوجد شكل مكافئ لقانون الأعداد الكبير نحصل عليه من الشكل السابق وهو:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}-\mu|<\varepsilon)=1$$

والذي يدل على أنه باحتمال قدره واحد، $\bar{X}$ يقترب من μ عندما $n\to\infty$، ويمكن أن نرمز لذلك بالشكل:

$$\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$$

نظرية 02: (القانون القوي للأعداد الكبيرة) لتكن X_1، X_2، X_3، ... متتالية متغيرات مستقلة ومتماثلة التوزيع بمتوسط $\mu=E(X_i)$ مع $i=1,2,\dots$ وبهذا:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right)=1$$

مثال 8.8: بافتراض أننا نقوم باختيار n عدد بطريقة عشوائية من المجال $[0,1]$ بتوزيع منتظم، إذا كان X_i يمثل الاختيار رقم i، يكون:

$$\mu=E(X_i)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

$$\sigma^2=V(X_i)=\int_0^1 x^2dx-\mu^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

وبهذا:

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{12n}$$

بحيث: $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

إذن من أجل $\varepsilon>0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{12n\varepsilon^2}$$

هذا يعني أنه إذا اخترنا n عددا عشوائيا من المجال $[0,1]$، فإن احتمال أن يكون الفرق $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|$ أقل من ε هو أكبر من $\left[1-\frac{1}{12n\varepsilon^2}\right]$ ، وعلى سبيل المثال إذا اخترنا $\varepsilon=0.1$، فإن احتمال أن يكون الفرق $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|$ أقل من 0.1 هو أكبر من $\left[1-\frac{100}{12n}\right]$. وبهذا:

- من أجل $n=100$ يكون احتمال الفرق $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|$ أكبر من 0.92.
- من أجل $n=1000$ يكون احتمال الفرق $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|$ أكبر من 0.99.
- من أجل $n=1000$ يكون احتمال الفرق $\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|$ أكبر من 0.999.

مثال 9.8: أوجد حجم العينة n التي يمكن أخذها للمتغير العشوائي X بحيث تكون المتراجحة التالية محققة:

$$P\left(|\bar{X}-\mu|\leq\frac{\sigma}{10}\right)\geq 0.95$$

الحل:

باعتبار أن $\varepsilon = \frac{\sigma}{10}$ فإن:

$$P\left(|\bar{X} - \mu| \le \frac{\sigma}{10}\right) \ge 1 - \frac{V(\bar{X})}{n\varepsilon^2} \quad = 1 - \frac{\sigma^2}{n\frac{\sigma^2}{100}}$$
$$= 1 - \frac{100}{n}$$

ومنه:

$$0.95 = 1 - \frac{100}{n} \Rightarrow \frac{100}{n} = 0.05$$
$$n = \frac{100}{0.05} = \frac{10000}{5} = 2000$$

أي يجب أن يكون حجم العينة أكبر أو يساوي 2000 مشاهدة.

مثال 10.8: أوجد حجم العينة n التي يمكن أخذها للمتغير العشوائي X الذي يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين $\sigma^2 = 6$، بحيث تكون المتراجحة التالية محققة:

$$P(|\bar{X} - \mu| < 0.8) \ge 0.98$$

الحل:

$$P(|\bar{X} - \mu| < 0.8) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{n(0.8)^2} = 0.98$$
$$1 - \frac{6}{n(0.64)} = 0.98 \Rightarrow \frac{6}{n(0.64)} = 0.02$$
$$\Rightarrow n = \frac{6}{(0.02)(0.64)} = \frac{6}{0.0128} \approx 469$$

أي حجم العينة اللازم أخذه يجب أن يكون أكبر أو يساوي 469 مشاهدة.

المراجع:

1. Anderson, D. F., Seppäläinen, T., & Valkó, B. (2017). *Introduction to probability*. Cambridge University Press .
2. Balakrishnan, N., Koutras, M. V., & Politis, K. G. (2019). *Introduction to probability: models and applications*. John Wiley & Sons .
3. Biagini, F & ,.Campanino, M. (2016). *Elements of probability and statistics*. Springer .
4. Blitzstein, J. K., & Hwang, J. (2019). *Introduction to probability*. Chapman and Hall/CRC .
5. Chung, K. L. (2000). *A course in probability theory*. Elsevier .
6. DasGupta, A. (2010). *Fundamentals of probability: A first course*. Springer Science & Business Media .
7. Florescu, I., & Tudor, C. A. (2013). *Handbook of probability*. John Wiley & Sons .
8. Gazi, O. (2023). *Introduction to Probability and Random Variables*. Springer Nature .
9. Grami, A .(2019) .*Probability, random variables, statistics, and random processes: Fundamentals & applications*. John Wiley & Sons .
10. Gut, A., & Gut, A. (2006). *Probability: a graduate course* (Vol. 200). Springer .
11. Jones, A. (2018). *Probability, statistics and other frightening stuff*. Routledge .
12. Klenke, A. (2008). *Probability theory: a comprehensive course*. Springer .
13. Mavrakakis, M. C., & Penzer, J. (2021). *Probability and statistical inference: from basic principles to advanced models*. Chapman and Hall/CRC .
14. Mittelhammer, R. C., & Mittelhammer, R. C. (2013). *Mathematical statistics for economics and business*. Springer .
15. Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2019). *Applied statistics and probability for engineers*. John wiley & sons .
16. Rohatgi, V. K., & Saleh, A. M. E .(2015) .*An introduction to probability and statistics*. John Wiley & Sons .
17. Ross, S. M. (2020). *A first course in probability*. Pearson Harlow, UK .
18. Siegel, A. F. (2016). *Practical business statistics*. Academic Press .
19. Ubøe, J. (2017). *Introductory statistics for Business and Economics*. Springer .
20. Wackerly, D. D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. L. (2008). *Mathematical statistics with applications* (Vol. 7). Thomson Brooks/Cole Belmont, CA .
21. Wegner, T. (2010). *Applied business statistics: Methods and Excel-based applications*. Juta and Company ltd .