وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة ابن خلدون - تيارت

كلّية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

محاضرات وأعمال موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير

المقياس:

الإحصاء 03

من إعداد: الدكتور دحو عبد الكريم

السنة الجامعية: 2024 – 2025

الحمد لله رب العالمين

وبعد

إن مفهوم الاحتمال بصورة أو بأخرى كثير الاستخدام في حياتنا اليومية، ونظراً لأهميته صار محل اهتمام العديد من الباحثين فتمخض عنه ما يسمى بنظرية الاحتمالات، وأصبحت هذه الأخيرة تتبوأ مكانة بارزة بين الدراسات الكمّية لما لها من أهمية في اتخاذ القرارات في ظروف عدم التأكد.

توفر نظرية الاحتمال رؤى قيمة في عملية صنع القرار وتتحدى افتراض العقلانية في النماذج الاقتصادية التقليدية من خلال التعرف على التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة مع التطرق إلى نظرية التقدير واختبار الفرضيات الاحصائية التي تعبر عن محاور أساسية في مقياس الإحصاء 03.

ونظراً لأهمية هذا الموضوع ارتأيت أن أضع بين طلبتنا الأعزاء هذه المطبوعة لتتناسب مع المتطلبات المبدئية للدراسة في مجال السنة الثانية ليسانس نظام جديد؛ علوم اقتصادية، علوم تجارية وعلوم التسيير.

وعلى ذلك فقد حاولت جاهداً التبسيط والإلمام بالمفاهيم وأسلوب العرض ما أمكن ليسهل للطالب الذي يدرس مقياس الإحصاء 03 لأول مرة التعامل معها.

وقد ركزت هذه المطبوعة على المقرر الخاص بمادة الإحصاء 03 المتعلق بالدروس مع تمارين وحلولها وكذا عرض مختلف الامتحانات التي قدمت للطلبة خلال سنوات متتالية سابقة.

واتساقاً مع الهدف من إعداد هذه المطبوعة فقد قسمت المادة العلمية الواردة فيها إلى أربعة محاور أساسية كالتالي:

المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

المحور الثاني: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

المحور الثالث: تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

المحور الرابع: المتغيرات العشوائية الثنائية

المحور الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1- تعريف المتغيرات العشوائية Variables aléatoires

المتغير العشوائي x هو اقتران حقيقي (دالة حقيقية) يُعرف على فضاء العينة Ω، أي أن مجال تعريفه Ω ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال: إذا رُميت قطعة نقود متزنة ذات الوجهين (H و T) ثلاث مرات، يكون فضاء العينة كالآتي:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HHT\}$$

نفرض أن المتغير العشوائي x يُقترن بعدد ظهور H .

بالنظر إلى فضاء العينة، نرى أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي x يُقترن بعدد ظهور H هي 0، 1، 2 و3 وبهذا، فإن x متغير عشوائي مجال تعريفه Ω ومداه المجموعة: {0, 1, 2, 3}

جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 0 تحت تأثير المتغير x:

$$Pr(x = 0) = Pr\{TTT\} = \frac{1}{8}$$

جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 1 تحت تأثير المتغير x:

$$Pr(x = 1) = Pr\{HTT, TTH, THT\} = \frac{3}{8}$$

جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 2 تحت تأثير المتغير x:

$$Pr(x = 2) = Pr\{HHT, HTH, THH\} = \frac{3}{8}$$

جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 3 تحت تأثير المتغير x:

$$Pr(x = 2) = Pr\{HHH\} = \frac{1}{8}$$

2- قانون الاحتمال لمتغير عشوائي منفصل (منقطع)

Loi de probabilité d'une variable aléatoire discontinue (discrète)

إذا كان مدى المتغير العشوائي x مجموعة ذات عدد محدود من القيم، نقول أن x متغير العشوائي منفصل.

ليكن X متغير عشوائي يأخذ القيم: $X : x_1, x_2, \dots x_i, \dots x_n$

حيث تكون قيم المتغير العشوائي X مرتبة ترتيباً تصاعدياً.

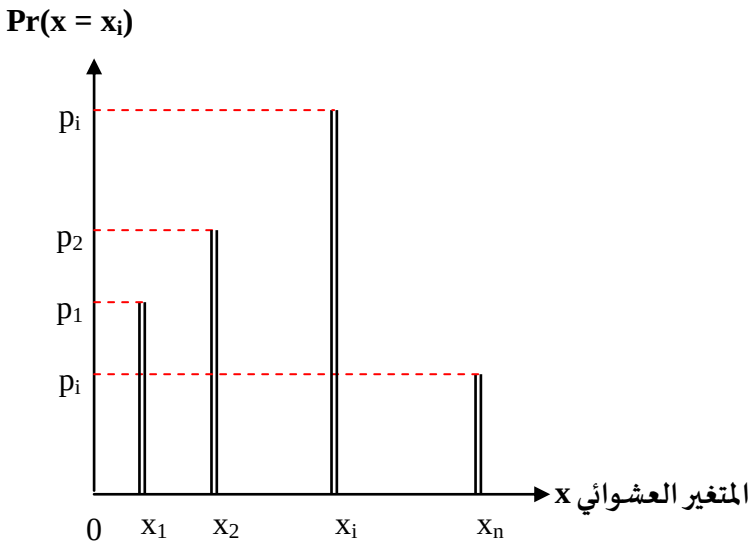
الاحتمالات المقابلة تكون: $p_i = Pr(x = x_i) = p_1, p_2, \dots p_i, \dots p_n$

بما أن مدى المتغير العشوائي X مجموعة ذات عدد محدود من القيم، يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي له بجدول كالتالي:

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
Pr(x = xi)	p_1	P_2	…	p_i	…	p_n

كما يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بأعمدة بيانيةDiagrammes en bâtons،

حيث تُمثل قيم المتغير العشوائي X على المحور الأفقي وتُمثل الاحتمالات على المحور العمودي كالتالي:



مثال: رُمي حجر نرد غير متحيز مرتين؛

أ- أوجد الاقتران الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور الرقم 6.

ب- مثل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X بواسطة جدول وأعمدة بيانية.

الحل:

أ- إيجاد الاقتران الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يُقترن بعدد ظهور الرقم 6:

إذا رُمي حجر النرد غير المتحيز مرتين، يكون فضاء العينة كالآتي:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6) \\ (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6) \\ (3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6) \\ (4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6) \\ (5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6) \\ (6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6) \end{Bmatrix}$$

بالنظر إلى فضاء العينة، نرى أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي x يُقترن بعدد ظهور الرقم 6 هي 0، 1 و2 وبهذا، فإن x متغير عشوائي مجال تعريفه Ω ومداه المجموعة: $\{0, 1, 2\}$

جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 0 تحت تأثير المتغير x:

$$Pr(x = 0) = Pr\begin{Bmatrix} (1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5) \\ (2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5) \\ (3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5) \\ (4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5) \\ (5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5) \end{Bmatrix} = \frac{25}{36}$$

جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 1 تحت تأثير المتغير x:

$$Pr(x = 1) = Pr\begin{Bmatrix} (1;6),(2;6),(3;6),(4;6),(5;6) \\ (6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5) \end{Bmatrix} = \frac{10}{36}$$

جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 2 تحت تأثير المتغير x:

$$Pr(x = 2) = Pr\{(6;6)\} = \frac{1}{36}$$

ملاحظة: يمكن إيجاد الاحتمالات باستعمال الصيغة التالية:

$$Pr(x = x_i) = C_2^{x_i}(0{,}85)^{x_i}(0{,}15)^{2-x_i} \qquad x_i = 0, 1, 2.$$

$$Pr(x = 0) = C_2^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^{2-0} = (\frac{5}{6})^2 = \frac{25}{36}$$

$$Pr(x = 1) = C_2^1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{2-1} = 2(\frac{1}{6})(\frac{5}{6}) = \frac{10}{36}$$

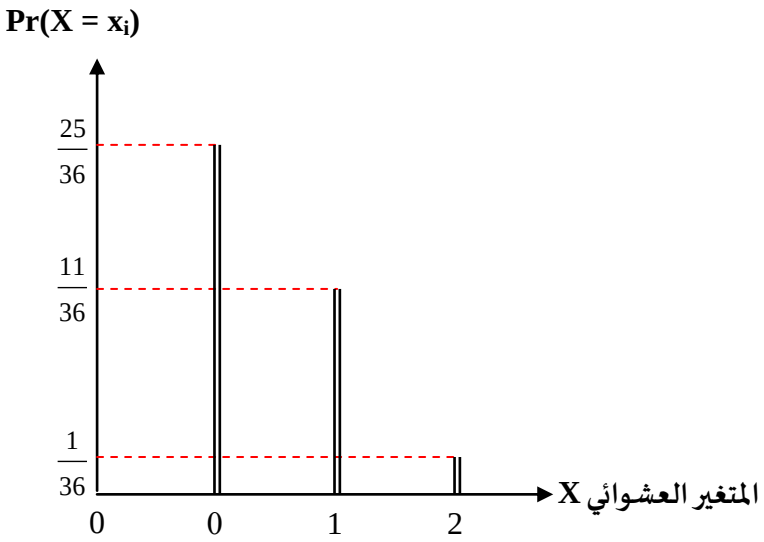
$$Pr(x = 2) = C_2^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{2-2} = (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}$$

ب- تمثيل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x بواسطة جدول وأعمدة بيانية:

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يُقترن بعدد ظهور الرقم 6 **بجدول** كالتالي:

X	0	1	2
$Pr(X = x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

كما يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X **بأعمدة بيانية** كالتالي:



3- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي منقطع

Espérance Mathématique d'une variable aléatoire discontinue (discrète)

يُعرف التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المنفصلة كالتالي:

$$\mathbf{m = E(X) = \sum_{i=1}^{n} Pr(X = x_i)x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$$

مثال: أوجد التوقع الرياضي من التوزيع الاحتمالي لمتغير العشوائي x التالي:

x	0	1	2	3
Pr(x = xi)	0,2	0,3	0,1	0,4

الحل: - إيجاد التوقع الرياضي من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x:

x	0	1	2	3	المجموع
$p_i = Pr(x = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,4	
$p_i x_i$	0	0,3	0,2	1,2	**1,7**

التوقع الرياضي m لهذا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو:

$$m = E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\mathbf{m = E(x) = 1,7}$$

3- التباين لمتغير عشوائي منقطع

Variance d'une variable aléatoire discontinue (discrète)

يُعرف التباين للمتغيرات العشوائية المنفصلة كالتالي:

$$\mathbf{\sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[x_i - E(x)\right]^2}$$

مثال: أوجد التباين من التوزيع الاحتمالي السابق.

الحل: - إيجاد التباين من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x:

x	0	1	2	3	المجموع
$p_i = Pr(x = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,4	
$x_i - E(x)$	–1,7	–0,7	0,3	1,3	
$[x_i - E(x)]^2$	2,89	0,49	0,09	0,69	
$p_i[x_i - E(x)]^2$	0,578	0,147	0,009	0,676	**1,41**

التباين σ^2 لهذا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو:

$$\sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[x_i - E(x)\right]^2$$

$$\mathbf{\sigma^2 = V(x) = 1,41}$$

ملاحظة: يمكن إيجاد التباين σ^2 باستعمال الصيغة أخرى كالتالي:

لدينا: $$\sum_{i=1}^{n} p_i \left[x_i - E(x)\right]^2 \sigma^2 = V(x) =$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[x_i^2 - 2E(x)x_i + E^2(x)\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2\,E(x)\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + E^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2E(x)E(x) + E^2(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - 2E^2(x) + E^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma^2 = V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E^2(x) = E(x^2) - E^2(x)}$$

مثال: أوجد التباين من التوزيع الاحتمالي السابق باستخدام الصيغة الأخيرة.

X	0	1	2	3	
$p_i = Pr(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,4	المجموع
$p_i x_i$	0	0,3	0,2	1,2	
$p_i x_i^2$	0	0,3	0,4	3,6	**4,3**

التباين σ^2 لهذا التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x هو:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\sigma^2 = V(x) = 4,3 - (1,7)^2 = 4,3 - 2,89$$

$$\boldsymbol{\sigma^2 = V(X) = 1,41}$$

5- أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة:

5- 1- توزيع بينوميال La distribution Binomiale

5- 1- 1- تعريف توزيع بينوميال

ليكن p احتمال تحقق حادث ما، مُعرف على تجربة معينة (p يُمثل احتمال الإصابة)؛

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم تحقق نفس الحادث في نفس التجربة (q يُمثل احتمال عدم الإصابة).

في نفس التجربة يمكن لهذا الحادث أن لا يتحقق أو يتحقق مرة واحدة، أو مرتين، ... أو k مرة، ... أو n مرة.

إن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد مرات التحقق هي:

$$X : 0, 1, 2, \dots k, \dots n$$

احتمال تحقق k مرة الحادث من بين n مرة من التحققات المستقلة المعرفة على نفس التجربة يتبع قانون الاحتمالات بينوميال Loi Binomiale المُعرف كما يلي:

$$\mathbf{Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots , n}$$

نُلخص هذا القانون باستعمال الرمز: $\boldsymbol{\beta(n ; p)}$.

للتذكير:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{k}{n}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 \qquad \text{(باعتماد)}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 \qquad \text{(باعتماد)}$$

مثال1: رُمي حجر نرد غير متحيز مرتين؛

أ- ما هو احتمال ظهور الرقم 6 مرة واحدة؟

ب- ما هو احتمال ظهور الرقم 6 مرتين؟

الحل:

إذا رُمي حجر النرد غير المتحيز مرة واحدة، يكون فضاء العينة كالآتي:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ليكن p احتمال ظهور الرقم 6 (p يُمثل احتمال الإصابة)؛ $p = \frac{1}{6}$

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم ظهور الرقم 6 (q يُمثل احتمال عدم الإصابة)؛ $q = \frac{5}{6}$.

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد مرات ظهور الرقم 6؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(2 ; \frac{1}{6})$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_2^k (\frac{1}{6})^k (\frac{5}{6})^{2-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

أ- احتمال ظهور الرقم 6 مرة واحدة:

$$Pr(X = 1) = C_2^1 (\frac{1}{6})^1 (\frac{5}{6})^{2-1} = 2(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})$$

$$\mathbf{Pr(X = 1) = \frac{10}{36}}$$

ب- احتمال ظهور الرقم 6 مرة مرتين:

$$Pr(X = 2) = C_2^2 (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{2-2} = (\frac{1}{6})^2$$

$$\mathbf{Pr(X = 2) = \frac{1}{36}}$$

مثال2: ما هو احتمال الحصول على ثلاث مرات الوجه H عند رمي قطعة نقود متزنة ذات الوجهين (H و T) عشر مرات؟

الحل:

إذا رُميت قطعة النقود المتزنة ذات الوجهين (H و T) مرة واحدة، يكون فضاء العينة كالآتي:

$$\Omega = \{H, T\}$$

ليكن p احتمال الحصول على الوجه H (p يُمثل احتمال الإصابة): $p = \frac{1}{2}$

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم الحصول على الوجه H (q يُمثل احتمال عدم الإصابة): $q = \frac{1}{2}$.

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد مرات الحصول على الوجه H؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(10 ; \frac{1}{2})$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_{10}^k (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{10-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 10$$

- احتمال الحصول على ثلاث مرات الوجه H عند رمي قطعة نقود متزنة ذات الوجهين (H و T) عشر مرات:

$$Pr(X = 3) = C_{10}^{3}(\frac{1}{2})^{3}(\frac{1}{2})^{10-3}$$

$$Pr(X = 3) = \frac{10!}{(10-3)!3!}(\frac{1}{2})^{3}(\frac{1}{2})^{7} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}(\frac{1}{8})(\frac{1}{1024})$$

$$Pr(X = 3) = \frac{720}{6144} = \frac{15}{128}$$

$$\mathbf{Pr(X = 3) \approx 0,1172}$$

مثال3: إذا علمنا أن احتمال قبول أحد المترشحين للتوظيف في إحدى المؤسسات يساوي 0,2؛ أحسب بالنسبة لخمسة مترشحين احتمال أن:

أ- ولا واحد منهم يُقبل للتوظيف. **ب-** واحد فقط منهم يُقبل للتوظيف.

جـ- اثنين منهم يُقبلان للتوظيف. **د-** على الأقل اثنين منهم يُقبلان للتوظيف.

هـ- على الأكثر واحد منهم يُقبل للتوظيف. **و-** الخمسة كلهم يُقبلون للتوظيف.

الحل:

ليكن p احتمال القبول في التوظيف (p يُمثل احتمال الإصابة)؛ $p = 0,2$

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم القبول في التوظيف (q يُمثل احتمال عدم الإصابة)؛ $q = 0,8$.

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين المقبولين في التوظيف؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(5 ; 0,2)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_{5}^{k}(0,2)^{k}(0,8)^{5-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

أ- احتمال أن ولا واحد من المترشحين يُقبل للتوظيف:

$$Pr(X = 0) = C_{5}^{0}(0,2)^{0}(0,8)^{5-0} = (0,8)^{5}$$

$$\mathbf{Pr(X = 0) = 0,32768}$$

ب- احتمال أن واحد فقط من المترشحين يُقبل للتوظيف:

$$Pr(X = 1) = C_{5}^{1}(0,2)^{1}(0,8)^{5-1} = 5(0,2)(0,8)^{4} = 5(0,2)(0,4096)$$

Pr(X = 1) = 0,4096

ج- احتمال أن اثنين من المترشحين يُقبلان للتوظيف:

$$Pr(X = 2) = C_5^2 (0,2)^2 (0,8)^{5-2} = 10(0,2)^2 (0,8)^3 = 10(0,04)(0,512)$$

Pr(X = 2) = 0,2048

د- احتمال أن الخمسة مترشحين كلهم يُقبلون للتوظيف:

$$Pr(X \geq 2) = Pr(X = 2) + Pr(X = 3) + Pr(X = 4) + Pr(X = 5)$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [Pr(X = 0) + Pr(X = 1)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [C_5^0 (0,2)^0 (0,8)^{5-0} + C_5^1 (0,2)^1 (0,8)^{5-1}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [(0,8)^5 + 5(0,2)(0,8)^4]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [0,32768 + 5(0,2)(0,4096)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - (0,32768 + 0,4096)$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - 0,73728$$

Pr(X = 2) = 0,26272

هـ- احتمال أن على الأكثر واحد من المترشحين يُقبل للتوظيف:

$$Pr(X \leq 1) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1)$$

$$Pr(X \leq 1) = C_5^0 (0,2)^0 (0,8)^{5-0} + C_5^1 (0,2)^1 (0,8)^{5-1}$$

$$Pr(X \leq 1) = (0,8)^5 + 5(0,2)(0,8)^4$$

$$Pr(X \leq 1) = 0,32768 + 5(0,2)(0,4096)$$

$$Pr(X \leq 1) = 0,32768 + 0,4096$$

Pr(X ≤ 1) = 0,73728

و- احتمال أن على الأكثر واحد من المترشحين يُقبل للتوظيف:

$$Pr(X = 5) = C_5^5 (0,2)^5 (0,8)^{5-5} = (0,5)^5$$

Pr(X = 5) = 0,00032

5- 1- 2- التوزيع الاحتمالي لقانون بينوميال Distribution de probabilité de loi Binomiale

ليكن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(n ; p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

بما أن مدى المتغير العشوائي X الذي يخضع لتوزيع بينوميال مجموعة ذات عدد محدود من القيم، يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي له بجدول كالتالي:

X	0	1	…	k	…	n
$p_i = Pr(X = k)$	$C_n^0 p^0 q^{n-o} = q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^n p^n q^{n-n} = p^n$

يعد هذا القانون من قوانين الاحتمالات للمتغيرات العشوائية المنفصلة ويأخذ اسم توزيع بينوميال لأنه من أجل $k = 0, 1, 2, \ldots, n$، فإن هذا القانون تقابله حدود منشور ثنائي ذي الحدين لنيوتن Binôme de Newton:

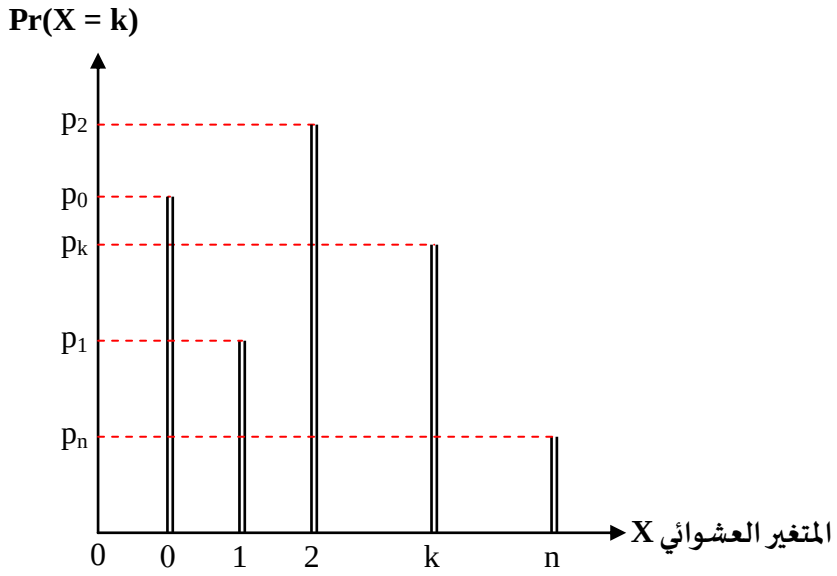
$$(q + p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1}p^n + \ldots + C_n^k q^{n-k}p^k + \ldots + p^n,$$

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$(1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbf{Pr(X = k) = 1}$$

كما يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يخضع لتوزيع بينوميال **بأعمدة بيانية** كالتالي:



مثال: نقوم برمي قطعة نقود متزنة ذات الوجهين (H و T) مرتين؛

أ- أوجد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد مرات الحصول على الوجه H.

ب- مثل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X بواسطة جدول وأعمدة بيانية.

الحل:

إذا رُميت قطعة النقود المتزنة ذات الوجهين (H و T) مرة واحدة، يكون فضاء العينة كالآتي:

$$\Omega = \{H, T\}$$

ليكن p احتمال الحصول على الوجه H (p يُمثل احتمال الإصابة)؛ $p = \frac{1}{2}$

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم الحصول على الوجه H (q يُمثل احتمال عدم الإصابة)؛ $q = \frac{1}{2}$.

أ- إيجاد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد مرات الحصول على الوجه H:

المتغير عشوائي X يُقترن بعدد مرات الحصول على الوجه H؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(2 ; \frac{1}{2})$ (الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_2^k (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{2-k} \qquad k = 0, 1, 2$$

$$Pr(X = 0) = C_2^0 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^{2-0} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

$$Pr(X = 1) = C_2^1 (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{2})^{2-1} = 2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{2}{4}$$

$$Pr(X = 2) = C_2^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^{2-2} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

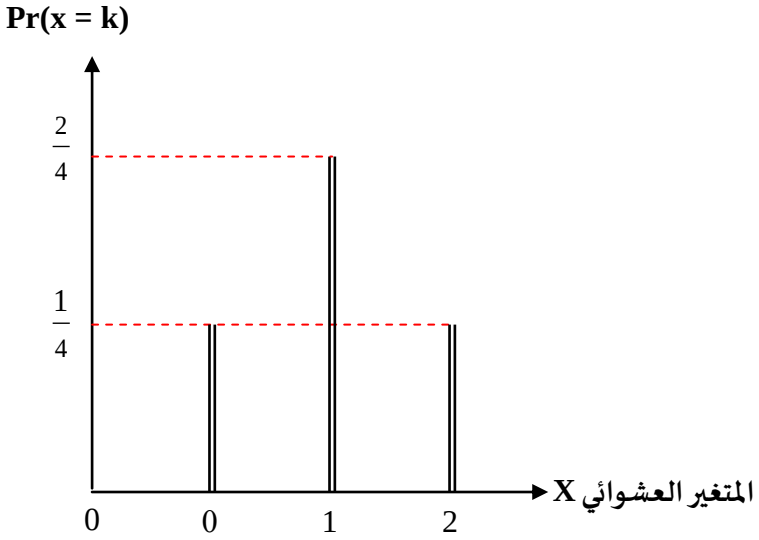
ب- تمثيل قانون الاحتمال للمتغير العشوائي x بواسطة جدول وأعمدة بيانية:

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد مرات الحصول على الوجه H **بجدول** كالتالي:

x	0	1	2
$P_i = Pr(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\sum_{k=0}^{n} Pr(X=k) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

كما يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X **بأعمدة بيانية** كالتالي:



5- 1- 3- التوقع الرياضي لقانون بينوميال Espérance Mathématique de la loi Binomiale

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التوقع الرياضي له يُعرف كما يلي:

$$E(X) \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k$$

=

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} k = \sum_{k=o}^{n} \frac{kn!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = \sum_{k=o}^{n} \frac{kn(n-1)!}{(n-k)!k(k-1)!} p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = \sum_{k=o}^{n} \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} p^k q^{n-k} \text{ ---------①}$$

نضع: $y = k - 1$

$$\Rightarrow \quad k = y + 1$$

بالتعويض في المعادلة ①، فنحصل على:

$$E(X) = \sum_{y=o}^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(n-1-y)!(1+y-1)!} p^{y+1} q^{n-1-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = np\sum_{y=o}^{n-1}\frac{(n-1)!}{[(n-1)-y]!y!}p^y q^{(n-1)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = np\sum_{y=0}^{n-1}C_{n-1}^{y}p^y q^{(n-1)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = np(1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{E(X) = np}$$

5- 1- 4- التباين لقانون بينوميال Variance de la loi Binomiale

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التوقع الرياضي لـ: $k(k-1)$ يُعرف كما يلي:

$$E[k(k-1)]\sum_{k=0}^{n}Pr(X=k)k(k-1)$$

=

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}\,k(k-1) = \sum_{k=o}^{n}\frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k!}p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n}\frac{k(k-1)n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!}p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}p^k q^{n-k} \text{ ---------①}$$

نضع: $y = k-2$

$$\Rightarrow \quad k = y+2$$

بالتعويض في المعادلة ①، فنحصل على:

$$E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2-y)!(2+y-2)!}p^{y+2}q^{n-2-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2\sum_{y=o}^{n-2}\frac{(n-2)!}{[(n-2)-y]!y!}p^y q^{(n-2)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2\sum_{y=0}^{n-2}C_{n-2}^{y}p^y q^{(n-2)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2(1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2 - k) = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2) - E(k) = n^2p^2 - np^2$$

بما أنه في قانون بينوميال يكون: $E(K) = np$، فإن:

$$E(k^2) - np = n^2p^2 - np^2$$

$$\Rightarrow \quad E(k^2) = np + n^2p^2 - np^2$$

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التباين له يُعرف كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

بالتعويض:

$$V(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$V(X) = np - np^2$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

$$\mathbf{V(X) = npq}$$

مثال: نقوم برمي قطعة نقود متزنة ذات الوجهين (H و T) مرتين؛

- أوجد التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد مرات الحصول على الوجه H باستخدام قانون بينوميال.

الحل:

إذا رُميت قطعة النقود المتزنة ذات الوجهين (H و T) مرة واحدة، يكون فضاء العينة كالآتي:

$$\Omega = \{H, T\}$$

ليكن p احتمال الحصول على الوجه H (p يُمثل احتمال الإصابة)؛ $p = \frac{1}{2}$

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم الحصول على الوجه H (q يُمثل احتمال عدم الإصابة)؛ $q = \frac{1}{2}$.

- إيجاد التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد مرات الحصول على الوجه H باستخدام قانون بينوميال:

يُعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X في توزيع بينوميال كالتالي:

$$E(X) = np$$

بالتعويض: $E(X) = 2(\frac{1}{2})$

$$\mathbf{E(X) = 1}$$

ويُعرف التباين للمتغير العشوائي X في توزيع بينوميال كالتالي:

$$V(X) = npq$$

بالتعويض: $V(X) = 2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$

$$\mathbf{V(X) = \frac{1}{2}}$$

5- 2- قانون بواسون Loi de Poisson

5- 2- 1- تعريف قانون بواسون

يعتبر قانون بواسون كنهاية أو حالة حدِّية من توزيع بينوميال عندما تكون n كبيرة جداً مع قيمة ثابتة لـ: k صغيرة جداً بالنسبة لـ: n.

لدينا احتمال تحقق k مرة الحادث من بين n مرة من التحققات المستقلة المعرفة على نفس التجربة والذي يتبع قانون الاحتمالات بينوميال Loi Binomiale المُعرف كما يلي:

$$Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$Pr(X = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$Pr(X = k) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$Pr(X = k) = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-k+1)\frac{p^k(1-p)^{n-k}}{k!}$$

نضع المتوسط: $\lambda = np$

$$\Rightarrow \qquad p = \frac{\lambda}{n}$$

وعليه، فإن:

$$Pr(X = k) = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\ldots\ldots\frac{n-k+1}{n}\frac{\lambda^k(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}}{k!}$$

عندما تكون n كبيرة جداً مع قيمة ثابتة لـ k، تكون كل من المقادير: $\frac{n-1}{n}$ ، $\frac{n-2}{n}$، ..... ، $\frac{n-k+1}{n}$ و $(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$ قريبة جداً من الواحد الصحيح.

ومنه، يمكن كتابة:

$$Pr(X = k) \approx \frac{\lambda^k(1-\frac{\lambda}{n})^n}{k!} \quad \text{---------- ①}$$

للوصول إلى الصيغة النهائية، نبحث عن: $\lim_{\lambda\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n$

نضع المتوسط: $x = -\frac{\lambda}{n}$

$$\Rightarrow \quad n = -\frac{\lambda}{x}$$

عندما: $n \to \infty$، فإن: $x \to 0$

وعليه، فإن:

$$\lim_{\lambda\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$\mathbf{Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} \qquad \mathbf{k = 0, 1, 2, \ldots..}$$

ملاحظة: يُستخدم توزيع بواسون كتقريب جيّد لتوزيع بينوميال، عندما تكون: $n \geq 30$ و $np < 5$.

مثال:

تشير الخبرة الماضية بأن صياد يصيب الهدف باحتمال 0,1%، فإذا أطلق 4000 طلقة على هدف معين؛

أ- ما هو احتمال عدم إصابته للهدف؟ ب- ما هو احتمال إصابته للهدف مرة واحدة؟

جـ- ما هو احتمال إصابته للهدف مرتين؟ **د-** ما هو احتمال إصابته للهدف مرتين على الأقل؟

أُعطي: $e^{-4} = 0,0185$

الحل:

ليكن p احتمال إصابة الصياد للهدف (p يُمثل احتمال الإصابة)؛ $p = 0,001$

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم إصابة الصياد للهدف (q يُمثل احتمال عدم الإصابة)؛ $q = 0,999$.

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد مرات إصابة الصياد للهدف؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(4000 ; 0,001)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_{4000}^{k}(0,001)^{k}(0,999)^{4000-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 4000$$

وحيث أن: $n = 4000 > 30$ كبيرة و$p = 0,001$ صغيرة و $np = 4000\ (0,001) = 4 < 5$،

فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 4000$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 4$، فإن:

$$Pr(X = k) = e^{-4}\frac{4^{k}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 4000$$

أ- احتمال عدم إصابة الصياد للهدف:

$$Pr(X = 0) = e^{-4}\frac{4^{0}}{0!} = e^{-4}$$

$$\mathbf{Pr(X = 0) = 0,0185}$$

ب- احتمال إصابة الصياد للهدف مرة واحدة:

$$Pr(X = 1) = e^{-4}\frac{4^{1}}{1!} = 4e^{-4} = 4(0,0185)$$

$$\mathbf{Pr(X = 1) = 0,0740}$$

جـ- احتمال إصابة الصياد للهدف مرتين:

$$Pr(X = 2) = e^{-4}\frac{4^{2}}{2!} = \frac{16}{2}e^{-4} = 8(0,0185)$$

Pr(X = 2) = 0,0148

د- احتمال إصابة الصياد للهدف مرتين على الأقل:

$$Pr(X \geq 2) = Pr(X = 2) + Pr(X = 3) + Pr(X = 4) + \ldots + Pr(X = 300)$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [Pr(X = 0) + Pr(X = 1)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-4}\frac{4^0}{0!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-4} + 4e^{-4}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [0,0185 + 4(0,0185)]$$

$Pr(X \geq 2) = 0,9075$

5- 2- 2- التوقع الرياضي لقانون بواسون Espérance Mathématique de la loi de Poisson

بما أن قانون بواسون من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التوقع الرياضي له يُعرف كما يلي:

$$E(X) \sum_{k=0}^{\infty} Pr(X = k)k$$

=

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k k}{k(k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} \quad \text{---------①}$$

نضع: $y = k - 1$

$$\Rightarrow \quad k = y + 1$$

بالتعويض في المعادلة ①، فنحصل على:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(y+1-1)!}$$

$$E(X) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{y+1}}{y!} = \lambda\sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = \lambda(1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{E(X) = \lambda}$$

5- 2- 2- التباين لقانون بواسون Variance de la loi de Poisson

بما أن قانون بواسون من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التوقع الرياضي لـ: $k(k-1)$ يُعرف كما يلي:

$$E[k(k-1)] \sum_{k=0}^{\infty} Pr(X=k)k(k-1)$$

=

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} k(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k(k-1)(k-2)!} k(k-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \text{ ----------①}$$

نضع: $y = k - 2$

$$\Rightarrow \quad k = y + 2$$

بالتعويض في المعادلة ①، فنحصل على:

$$E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y+2}}{(y+2-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{y+2}}{y!} = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda^2 (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2 - k) = \lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2) - E(k) = \lambda^2$$

بما أنه في قانون بينوميال يكون: $E(K) = \lambda$، فإن:

$$E(k^2) - \lambda = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad E(k^2) = \lambda^2 + \lambda$$

بما أن قانون بواسون من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التباين له يُعرف كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

بالتعويض:

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$\mathbf{V(X) = \lambda}$$

مثال:

التوزيع الإحصائي أدناه يعطي توزيع عدد الأيام f_i بدون حادث، بحادث واحد، بحادثين، .... بـ 6 حوادث، لمدة n مساوية لـ: 80 يوم، في مدينة ما:

عدد الحوادث x_i	0	1	2	3	4	5	6
عدد الأيام f_i	52	13	4	5	3	2	1

المطلوب:

أ- احسب العدد المتوسط عدد λ للحوادث يومياً خلال فترة 80 يوم.

ب- أضبط التوزيع السابق باستخدام قانون بواسون مع المعلمة λ وأحسب احتمال وقوع صفر حوادث، حادث واحد،... وقوع ستة حوادث .

أُعطي: $e^{-0,8} = 0,449329$

الحل:

أ- العدد المتوسط λ للحوادث يومياً خلال فترة 50 يوم:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=6}^{4} f_i x_i}{\sum_{i=6}^{4} f_i}$$

x_i	f_i	$f_i x_i$
0	52	0
1	13	13
2	4	8
3	5	15
4	3	12
5	2	10
6	1	6
	80	64

$$\lambda = \frac{64}{80}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 0,8}$$

ب- ضبط التوزيع السابق باستخدام قانون بواسون $\rho(\lambda = 0,8)$ وحساب احتمال وقوع صفر حوادث، حادث واحد،... وقوع ستة حوادث:

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد الحوادث خلال 80 يوم؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = 8$، فإن:

$$Pr(X = k) = e^{-0,8}\frac{0,8^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$Pr(X = 0) = e^{-0,8}\frac{(0,8)^0}{0!} = e^{-0,8} = \mathbf{0,449329}$$

$$Pr(X = 1) = e^{-0,8}\frac{(0,8)^1}{1!} = 0,8e^{-0,8} = 0,8(0,449329) = \mathbf{0,3594632}$$

$$Pr(X = 2) = e^{-0,8}\frac{(0,8)^2}{2!} = \frac{0,64}{2}e^{-0,8} = 0,32(0,449329) = \mathbf{0,1437853}$$

$$\Pr(X = 3) = e^{-0,8}\frac{(0,8)^3}{3!} = \frac{0,512}{3\times 2}e^{-0,8} = \frac{0,512}{6}(0,449329) = \mathbf{0,0383427}$$

$$\Pr(X = 4) = e^{-0,8}\frac{(0,8)^4}{4!} = \frac{0,4096}{4\times 3\times 2}e^{-0,8} = \frac{0,4096}{24}(0,449329) = \mathbf{0,0076685}$$

$$\Pr(X = 5) = e^{-0,8}\frac{(0,8)^5}{5!} = \frac{0,32768}{5\times 4\times 3\times 2}e^{-0,8} = \frac{0,32768}{120}(0,449329) = \mathbf{0,0012270}$$

$$\Pr(X = 6) = e^{-0,8}\frac{(0,8)^6}{6!} = \frac{0,262144}{6\times 5\times 4\times 3\times 2}e^{-0,8} = \frac{0,262144}{720}(0,449329) = \mathbf{0,0001636}$$

يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد الحوادث خلال 80 يوم بجدول كالتالي:

k	0	1	2	3	4	5	6	**المجموع**
Pr(X = k)	0,449329	0,3594632	0,1437853	0,0383427	0,0076685	0,0012270	0,0001636	1

المحور الثاني: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

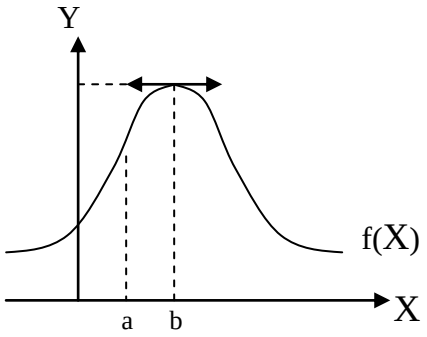
1- قانون الاحتمال لمتغير عشوائي متصل

Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

سبق وأن عرفنا المتغيرات العشوائية المنفصلة التي تأخذ قيماً محدودة وهناك متغيرات عشوائية تأخذ قيماً غير محدودة وهي متغيرات عشوائية متصلة.

مثال: عدد الطلبة فوق عمر 18 سنة الذين تتراوح أطوالهم بين 160 ستم و170ستم.

هناك مالا نهاية من أعداد هؤلاء الطلبة، لهذا لا يمكن تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي يُقترن بعدد هؤلاء الطلبة بجدول ولكن نمثله بدالة f(X)، حيث يكون الاحتمال عبارة عن المساحة تحت منحنى اقتران تلك الدالة.



2- حساب الاحتمالات – Calcul de probabilités

$$Pr(a < x < b) = \int_a^b f(X)dX \qquad (b > a)$$

3- التوقع الرياضي لمتغير عشوائي متصل

Espérance Mathématique d'une variable aléatoire continue

يُعرف التوقع الرياضي للمتغيرات العشوائية المتصلة كالتالي:

$$\mathbf{m = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dX}$$

4- التباين لمتغير عشوائي متصل

Variance d'une variable aléatoire continue

يُعرف التباين للمتغيرات العشوائية المتصلة كالتالي:

$$\sigma^2 = V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(X)dX - E^2(X)$$

5- أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

4- 1- التوزيع الطبيعي – توزيع لابلاص قوص

Distribution Normale – Distribution de LAPLACE-Gauss

نقول عن متغير X بأنه يخضع لقانون التوزيع الطبيعي (توزيع قوص) إذا كان توزيعه الاحتمالي مُعرف كما يلي:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-m}{\sigma})^2}$$

حيث: π عدد ثابت يساوي تقريباً 3,1416، e عدد ثابت يساوي تقريباً 2,7183، m التوقع الرياضي للتوزيع و σ الانحراف المعياري للتوزيع.

نلخص هذا التوزيع بالرمز: $N(m ; \sigma)$.

4- 1- 1- إيجاد منحنى التوزيع الطبيعي:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-m}{\sigma})^2} \qquad -\infty < X < +\infty$$

$$\lim_{X\to-\infty} f(X) = \lim_{X\to-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-m}{\sigma})^2} = 0^+$$

$$\lim_{X\to+\infty} f(X) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-m}{\sigma})^2} = 0^+$$

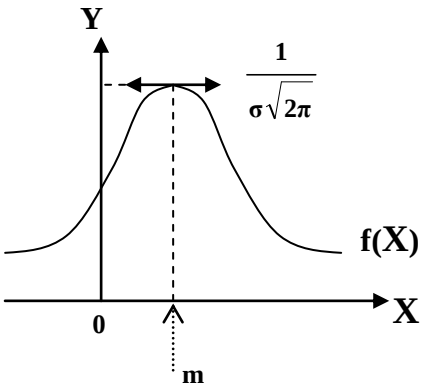
$$f'(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (-\frac{2}{2} \frac{X-m}{\sigma} \frac{1}{\sigma}) e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

$$f'(X) = \frac{-(X-m)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

$$f'(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X - m = 0 \quad \Rightarrow \quad X = m$$

X	$-\infty$	m	$+\infty$
$f'(X)$	+	0	−
f(X)	0^+ ↗	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$	↘ 0^+

$$f(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{m-m}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



4- 1- 2- التوزيع الطبيعي المعياري – Distribution Normale, centrée, réduite

التوزيع الطبيعي المعياري هو حالة من التوزيع الطبيعي يكون فيها المتوسط: $m = 0$ والانحراف المعياري: $\sigma = 1$، حيث يُعرف توزيعه الاحتمالي كما يلي:

$$f(Z) = \frac{1}{(1)\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(\frac{Z-0}{1})^2}$$

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

نلخص هذا التوزيع بالرمز: $N(0\ ;\ 1)$.

4- 1- 3- إيجاد منحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \qquad -\infty < z < +\infty$$

$$\lim_{Z \to -\infty} f(Z) = \lim_{Z \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} = 0^+$$

$$\lim_{Z \to +\infty} f(Z) = \lim_{Z \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} = 0^+$$

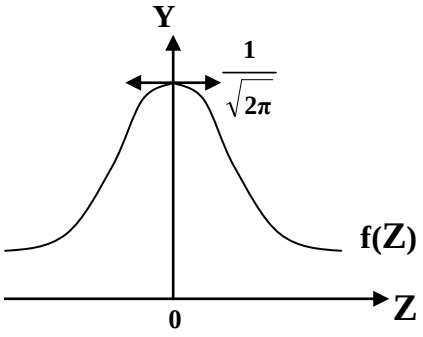
$$f'(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{2}{2} \frac{X - m}{\sigma} \frac{1}{\sigma}\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2}$$

$$f'(X) = \frac{-Z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$$

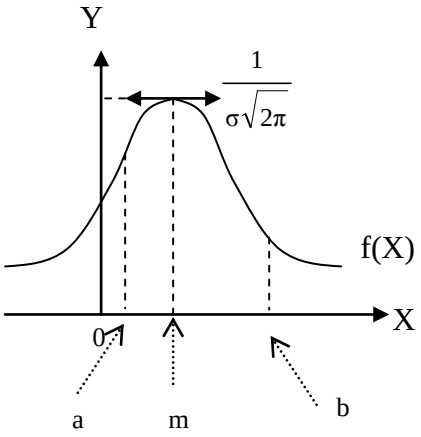
$$f'(Z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z = 0$$

Z	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(Z)$	$+$	0	$-$
$f(Z)$	0^+ ↗	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	↘ 0^+

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$



$$Pr(a < x < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2} dx \qquad (b > a)$$



نضع: $Z = \frac{X-m}{\sigma}$

$$\Leftrightarrow \qquad dZ = \frac{1}{\sigma} dX \quad \Rightarrow dX = \sigma dZ$$

عندما: $X_1 = a$ و: $X_2 = b$

فإن: $Z_1 = \frac{a-m}{\sigma}$ و: $Z_2 = \frac{b-m}{\sigma}$

إذن: $Pr(a < X < b) = \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$

ويمكن حساب هذا التكامل المحدود أو هذه المساحة باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\Phi(Z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

مثال: متغير عشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي (توزيع لابلاص قوص) بمتوسط 6 وتباين 4.

أحسب احتمالات الحوادث التالية:

أ- X أقل من 5. ب- X أكبر من 1.

جـ- X محصور بين 1 – و10. د- X خارج المجال (4 –، 12).

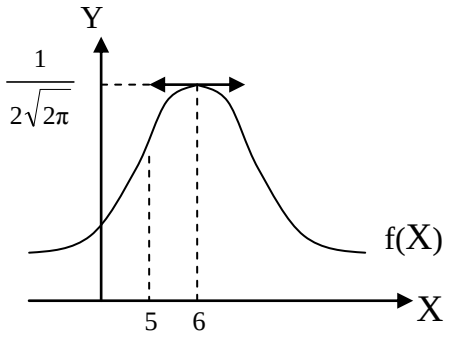
الحل:

المتغير العشوائي X يخضع للتوزيع الطبيعي $N(6\ ;\ 2)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(b > x > a) = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-6}{2})^2} dx$$

أ- احتمال أن يكون المتغير العشوائي X أقل من 5:

$$Pr(X < 5) = \int_{-\infty}^{5} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-6}{2})^2} dX$$



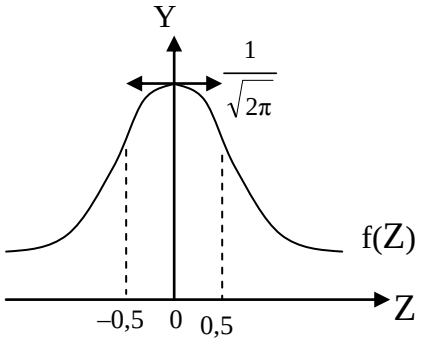
نضع: $Z = \frac{X-6}{2}$

$$\Leftrightarrow \qquad dZ = \frac{1}{2} dX \quad \Rightarrow dX = 2dZ$$

عندما: $X_1 \to -\infty$ و: $X_2 = 5$

فإن: $Z_1 = \lim_{X \to +\infty} \frac{X-6}{2} = -\infty$ و: $Z_2 = \frac{5-6}{2} = -0,5$

إذن: $Pr(X < 5) = \int_{-\infty}^{-0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(X < 5) = \int_{0,5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \int_{-\infty}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \Phi(0,5)$$

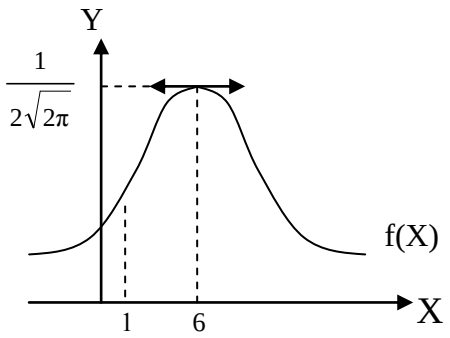
وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dZ$، نجد:

$$Pr(X < 5) = 1 - 0,6915$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X < 5) = 0,3085}}$$

ب- احتمال أن يكون المتغير العشوائي X أكبر من 1:

$$Pr(X > 1) = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-6}{2})^2} dX$$



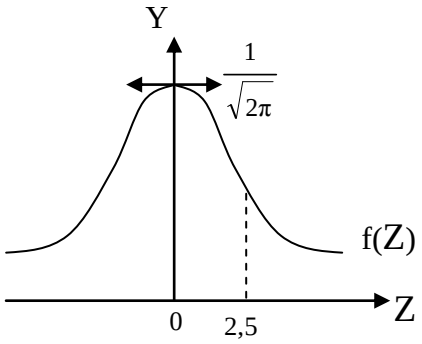
نضع: $Z = \frac{X-6}{2}$

$$\Leftrightarrow \qquad dZ = \frac{1}{2} dX \quad \Rightarrow dX = 2dZ$$

عندما: $X_1 = 1$ و: $X_2 \to +\infty$

فإن: $Z_1 = \frac{1-6}{2} = 2,5$ و: $Z_2 = \lim_{X \to +\infty} \frac{X-6}{2} = +\infty$

إذن: $\Pr(X > 1) = \int_{2,5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$\Pr(X > 1) = 1 - \int_{-\infty}^{2,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dz = 1 - \Phi(2,5)$$

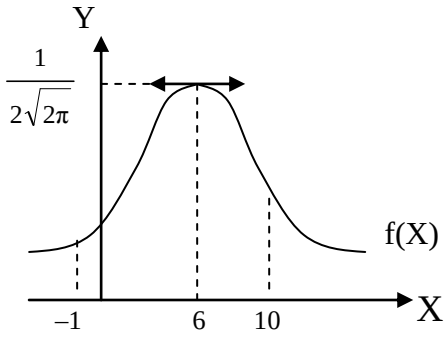
وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$، نجد:

$$\Pr(X > 1) = 1 - 0,9938$$

$$\boxed{\textbf{Pr(X > 1) = 0,0062}}$$

جـ- احتمال أن يكون المتغير العشوائي X محصور بين 1 – و10:

$$\Pr(-1 < X < 10) = \int_{-2}^{10} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-6}{2})^2} dX$$



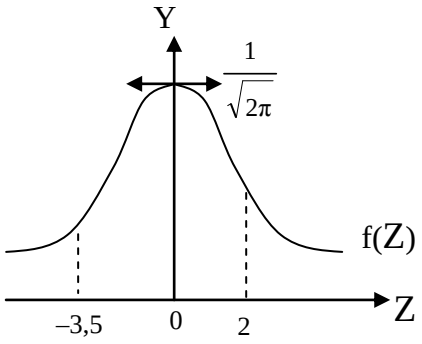
نضع: $Z = \frac{X-6}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad dZ = \frac{1}{2} dX \quad \Rightarrow dX = 2dZ$$

عندما: $X_1 = -2$ و: $X_2 = 10$

فإن: $Z_1 = \frac{-1-6}{2} = -3,5$ و: $Z_2 = \frac{10-6}{2} = 2$

إذن: $\Pr(-1 < X < 10) = \int_{-3,5}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$\Pr(-1 < X < 10) = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - \int_{-\infty}^{-3,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$\Pr(-1 < X < 10) = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - \int_{3,5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$\Pr(-1 < X < 10) = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - [1 - \int_{-\infty}^{3,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ]$$

$$\Pr(-1 < X < 10) = \Phi(2) - 1 + \Phi(3,5)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$، نجد:

$$\Pr(-1 < X < 10) = 0,9772 - 1 + 0,99976$$

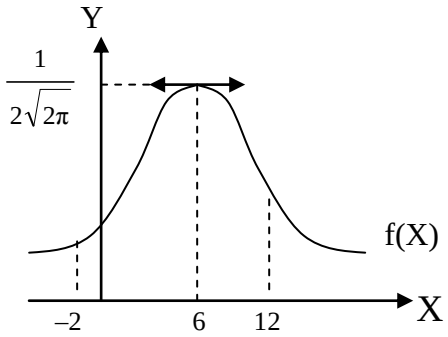
$$\boxed{\Pr(-1 < X < 10) = 0,97696}$$

د- احتمال أن يكون المتغير العشوائي X خارج المجال (2 –، 12):

$$\Pr[X \notin (-2, 12)] = 1 - \Pr[X \in (-2, 12)]$$

$$\Pr[X \notin (-2, 12)] = 1 - \Pr(-2 \leq X \leq 12)$$

$$\Pr[X \notin (-2, 12)] = 1 - \int_{-2}^{12} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-6}{2})^2} dX$$



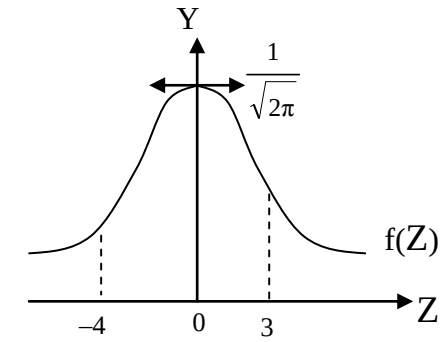
نضع: $Z = \frac{X-6}{2}$

$$\Leftrightarrow \qquad dZ = \frac{1}{2}dX \quad \Rightarrow dX = 2dZ$$

عندما: $X_1 = -2$ و: $X_2 = 12$

فإن: $Z_1 = \frac{-2-6}{2} = -4$ و: $Z_2 = \frac{12-6}{2} = 3$

إذن: $\Pr[X \notin (-2, 12)] = 1 - \int_{-4}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$\Pr[X \notin (-2, 12)] = 1 - [\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - \int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ]$$

$$\Pr[X \notin (-2, 12)] = 1 - [\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ]$$

$$\Pr[X \notin (-2, 12)] = 1 - \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ + 1 - \int_{-\infty}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$\Pr[X \notin (-2, 12)] = 2 - \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - \int_{-\infty}^{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr[X \notin (-2, 12)] = 2 - \Phi(3) - \Phi(4)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$، نجد:

$$Pr[X \notin (-2, 12)] = 2 - 0{,}99865 - 0{,}999968$$

$$\boxed{\mathbf{Pr[X \notin (-2, 12)] = 0{,}001382}}$$

المحور الثالث: تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

1- تقريب قانون بينوميال بواسطة قانون التوزيع الطبيعي

Approximation d'une loi Binomiale par une loi normale

قانون بينوميال $\beta(n, p)$ يمكن أن يكون مقرب بواسطة قانون التوزيع الطبيعي، أي أن:

$$Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2}$$

المقدار $t_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ يخضع لقانون التوزيع الطبيعي المعياري $N(0 , 1)$.

يمكن أيضاً كتابة:

$$Pr(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(t_k)$$

حيث $f(t_k)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لقانون التوزيع الطبيعي المعياري $N(0 , 1)$.

هذه الكثافة يمكن البحث عنها في جدول التوزيع الطبيعي $\Pi(t_k) = \int_{-\infty}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} dt_k$.

يمكن تقريب توزيع بينوميال بواسطة التوزيع الطبيعي، إذا كان:

n كبير $(n \geq 10)$ و p لا يكون قريب جداً من الصفر (0) أو من الواحد الصحيح (1).

وتطبيقياً لا بد أن يكون $npq \geq 3$.

مثال:

نعتبر عدداً كبيراً من السكان، حيث يحمل كل فرد الحرف A باحتمال $p = 0,4$.

قمنا بإجراء 900 مشاهدة ولنعين بـ: X عدد الأفراد الذين لديهم الحرف A في هذه العينة.

أ- وضح قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

ب- أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X.

جـ- أوجد التباين للمتغير العشوائي X.

د- أحسب احتمال الحوادث التالية: $\{360 \geq X \geq 390\}$، $\{335 \geq X \geq 350\}$ و $\{X \geq 370\}$.

هـ- أحسب المقدار: $\Pr\{X = 360\}$.

الحل:

أ- توضيح قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X هو قانون بينوميال$\beta(n ; p)$.

إذن، في هذه العينة، يمكن لفرد:

- أن يحمل الحرف A، باحتمال $p = 0,4$

- أن لا يحمل الحرف A، باحتمال $q = 1 – p = 0,6$

العينة تحتوي على عدد $n = 900$ من الأفراد المستقلين، أي أن التجربة المكونة من وجود أو عدم وجود الحرف A مكررة 900 مرة.

قانون الاحتمال L للمتغير العشوائي X يُعرف كالتالي:

$$\mathbf{L(X) = Pr(X = k) = } C_{900}^{k}\mathbf{(0,4)^k(0,6)^{900–k}} \qquad \mathbf{k = 0, 1, 2, …, 900}$$

ب- إيجاد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X:

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التوقع الرياضي له يُعرف كما يلي:

$$E(X) \sum_{k=0}^{n} \Pr(X = k)k$$

=

$$\Leftrightarrow \qquad E(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\, k = np$$

بالتعويض: $E(X) = (900)(0,4)$

$$\mathbf{E(X) = 360}$$

جـ- إيجاد التباين للمتغير العشوائي X:

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التباين له يُعرف كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) – E^2(X)$$

$$\Leftrightarrow \qquad V(X) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} k^2 - [\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} k]^2 = npq$$

بالتعويض: $V(X) = (900)(0,4)(0,6)$

$$\mathbf{V(X) = 216}$$

د- حساب احتمال الحوادث التالية: {360 ≥ X ≥ 390}، {335 ≥ X ≥ 350} و{X ≥ 370}:

لدينا:

n = 900 كبير (n ≥ 10) و p = 0,4 ليس قريب جداً من الصفر (0) أو من الواحد الصحيح (1).

وتطبيقياً: $npq = 216 > 3$.

إذن، قانون بينوميال $\beta(900, 0,4)$ يمكن أن يكون مقرب بواسطة قانون التوزيع الطبيعي، أي أن:

$$L(X) = Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2}$$

المقدار $t_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ يخضع لقانون التوزيع الطبيعي المعياري $N(0, 1)$.

يمكن أيضاً كتابة:

$$L(X) = Pr(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(t_k)$$

حيث $f(t_k)$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية لقانون التوزيع الطبيعي المعياري $N(0, 1)$.

هذه الكثافة يمكن البحث عنها في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(t_k) = \int_{-\infty}^{t_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} dt_k$.

بالتعويض: $$L(X) \approx f(t_k) \frac{1}{\sqrt{216}} \approx \frac{1}{\sqrt{216}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2}$$

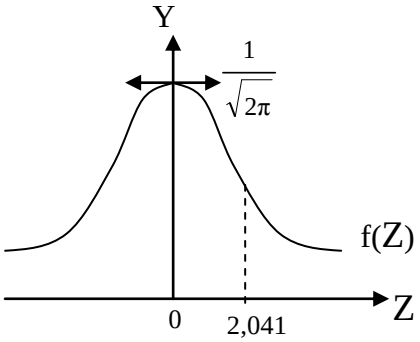
من أجل: $$= \frac{k - np}{\sqrt{npq}} t_k = \frac{k - 360}{\sqrt{216}}$$

وعليه، فإن:

$$Pr(360 \geq X \geq 390) = \int_{360}^{390} \frac{1}{\sqrt{216}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X - 360}{\sqrt{216}})^2} dX$$

$$Pr(360 \geq X \geq 390) = \int_{\frac{360-360}{\sqrt{216}}}^{\frac{390-360}{\sqrt{216}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr(360 \geq X \geq 390) = \int_{0}^{2,041} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(360 \geq X \geq 390) = \int_{-\infty}^{2,041} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr(360 \geq X \geq 390) = \Phi(2,041) - \Phi(0)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(Z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$، نجد:

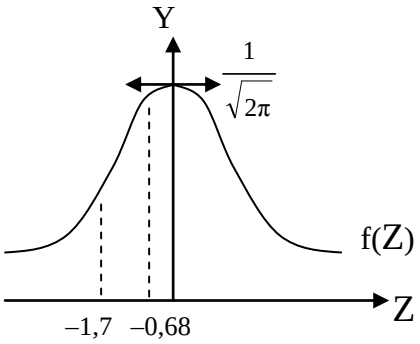
$$Pr(360 \geq X \geq 390) = 0,9793 - 0,5000$$

$Pr(360 \geq X \geq 390) = 0,4793$

$$Pr(350 \geq X \geq 335) = \int_{335}^{350} \frac{1}{\sqrt{216}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-360}{\sqrt{216}}\right)^2} dX$$

$$Pr(350 \geq X \geq 335) = \int_{\frac{335-360}{\sqrt{216}}}^{\frac{350-360}{\sqrt{216}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr(350 \geq X \geq 335) = \int_{-1,7}^{-0,68} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(350 \geq X \geq 335) = \int_{0,68}^{1,7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr(350 \geq X \geq 335) = \int_{-\infty}^{1,7} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ - \int_{-\infty}^{0,68} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr(350 \geq X \geq 335) = \Phi(1,7) - \Phi(0,68)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(Z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$، نجد:

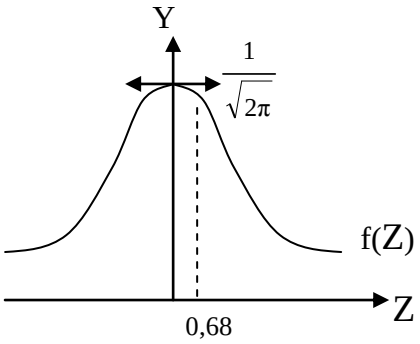
$$Pr(350 \geq X \geq 335) = 0,9554 - 0,7517$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(350 \geq X \geq 335) = 0,2037}}$$

$$Pr(X \geq 370) = \int_{370}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{216}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-360}{\sqrt{216}}\right)^2} dX$$

$$Pr(X \geq 370) = \int_{\frac{370-360}{\sqrt{216}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr(X \geq 370) = \int_{0,68}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(X \geq 370) = 1 - \int_{-\infty}^{0,68} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$Pr(X \geq 370) = 1 - \Phi(0,68)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(Z) = \int_{-\infty}^{Z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$، نجد:

$$Pr(X \geq 370) = 1 - 0,7517$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \geq 370) = 0,2483}}$$

هـ- حساب المقدار: Pr{X = 360}

$$Pr(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(t_k)$$

$$t_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{360 - 360}{\sqrt{216}} = 0$$

$$f(t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t_k^2}$$

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,39894$$

$$Pr(X = 360) \approx \frac{1}{\sqrt{216}} f(0) \approx \frac{0,39894}{14,697}$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X = 370) = 0,0270}}$$

2- تقريب قانون بينوميال بواسطة قانون بواسون

Approximation d'une loi Binomiale par une loi de Poisson

قانون بينوميال $\beta(n, p)$ يمكن أن يكون مقرب بواسطة قانون بواسون $P(\lambda)$، أي أن:

$$Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

يمكن تقريب توزيع بينوميال بواسطة توزيع بواسون، إذا كان:

n كبير $(n \geq 30)$ وp يكون قريب من الصفر (0) ويكون $np < 5$.

المعلمة λ لقانون بواسون تُعرف كما يلي: $\lambda = np$

مثال:

كتاب يتألف من 1000 صفحة، يحتوي على 1500 خطأ مطبعي موزعة بشكل عشوائي.

نفتح الكتاب على صفحة معينة ونعين بـ: X عدد الأخطاء الموجودة في هذه الصفحة.

أ- بين القانون الحقيقي للمتغير X مع إيجاد المعلمتين n وp.

ب- أحسب $E(X)$ و$V(X)$.

جـ- نقترح تقريب قانون المتغير X بواسطة قانون بواسون. هل هذا التقريب عقلاني؟

د- أحسب المقادير: $Pr\{X = 0\}$، $Pr\{X = 1\}$، $Pr\{X = 2\}$، $Pr\{X > 2\}$ و$Pr\{X \leq 3\}$.

أعطي: $e^{-1,5} = 0,2230$

الحل:

أ- تبيان القانون الحقيقي للمتغير X مع إيجاد المعلمتين n وp:

عند فتح الكتاب في أي صفحة كانت، فخطأ معين يمكن أن يظهر أو لا يظهر.

ليكن p احتمال ظهور خطأ معين في أي صفحة كانت (p يُمثل احتمال الإصابة)؛ $p = \frac{1}{1000}$

وليكن $q = 1 - p$ احتمال عدم ظهور خطأ معين في أي صفحة كانت (q يُمثل احتمال عدم الإصابة)؛ $q = \frac{99}{1000}$.

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد الأخطاء الموجودة في الكتاب؛ في الحقيقة أن هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(1500\ ;\ \frac{1}{1000})$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_{1500}^{k}(\frac{1}{1000})^{k}(\frac{99}{1000})^{1500-k} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 1500$$

ب- حساب E(X) وV(X):

يُعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X في توزيع بينوميال كالتالي:

$$E(X) = np$$

بالتعويض: $E(X) = 1500(\frac{1}{1000})$

$$\mathbf{E(X) = 1,5}$$

ويُعرف التباين للمتغير العشوائي X في توزيع بينوميال كالتالي:

$$V(X) = npq$$

بالتعويض: $V(X) = 1500(\frac{99}{1000})(\frac{1}{1000})$

$$\mathbf{V(X) = 1,1485}$$

ج- بيان عقلانية تقريب قانون المتغير X بواسطة قانون بواسون:

يكون من العقلانية تقريب قانون المتغير X بواسطة قانون بواسون إذا كان:

n كبير $(n \geq 30)$ وp يكون قريب من الصفر (0) ويكون $np < 5$.

حيث أن: $n = 1500 > 30$ كبيرة و $p = \frac{1}{1000} = 0,001$ صغيرة و $np = 1500(0,001) = 1,5 < 5$

؛ فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 1500$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 1,5$، فإن:

$$Pr(X = k) = e^{-1,5}\frac{(1,5)^{k}}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 1500$$

د- حساب المقادير: $\{X = 0\}Pr$، $\{X = 1\}Pr$، $\{X = 2\}Pr$، $\{X > 2\}Pr$ و $\{X \leq 3\}Pr$:

- احتمال أن لا تحتوي صفحة معينة على أي خطأ:

$$Pr(X = 0) = e^{-1,5}\frac{(1,5)^0}{0!} = e^{-1,5}$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X = 0) = 0,2230}}$$

- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأ واحد:

$$Pr(X = 1) = e^{-1,5}\frac{(1,5)^1}{1!} = 0,233(1,5)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X = 1) = 0,3345}}$$

- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأين:

$$Pr(X = 2) = e^{-1,5}\frac{(1,5)^2}{2!} = 0,223\frac{2,25}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X = 2) = 0,2509}}$$

- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على أكثر من خطأين:

$$Pr(X > 2) = Pr(X = 3) + Pr(X = 4) + \ldots + Pr(X = 1500)$$

$$Pr(X > 2) = 1 - [Pr(x = 0) + Pr(x = 1) + Pr(x = 2)]$$

$$Pr(X > 2) = 1 - [\, e^{-1,5}\frac{(1,5)^0}{0!} + e^{-1,5}\frac{(1,5)^1}{1!} + e^{-1,5}\frac{(1,5)^2}{2!}\,]$$

$$Pr(X > 2) = 1 - [0,2230 + 0,3345 + 0,2509] = 1 - 0,8084$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X > 2) = 0,1916}}$$

- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على ثلاثة أخطاء على الأكثر:

$$Pr(X \leq 3) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) + Pr(X = 2) + Pr(X = 3)$$

$$Pr(X \leq 3) = e^{-1,5}\frac{(1,5)^0}{0!} + e^{-1,5}\frac{(1,5)^1}{1!} + e^{-1,5}\frac{(1,5)^2}{2!} + e^{-1,5}\frac{(1,5)^3}{3!}$$

$$Pr(X \leq 3) = 0,2230 + 0,3345 + 0,2509 + 0,1254$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \leq 3) = 0,9338}}$$

المحور الرابع: المتغيرات العشوائية الثنائية

فيما سبق تم عرض التوزيعات الاحتمالية لمتغير عشوائي واحد، إلا أنه في كثير من النواحي التطبيقية يهتم الباحث بدراسة شكل التوزيع الاحتمالي بين متغيرين، لمعرفة العلاقة بينهما، أو التنبؤ بأحدها من الآخر.

1- التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرين متقطعين

بفرض أن X وY متغيرين عشوائيين متقطعين، حيث أن المتغير العشوائي X يأخذ القيم المنفصلة $x_1, x_2, \dots x_r$، والمتغير Y الذي يأخذ القيم المنفصلة $y_1, y_2, \dots y_c$.

يمكن كتابة دالة الاحتمال المشترك والتي تُبين احتمال حدوث زوج القيم (X, Y) بالشكل التالي:

$$Pr(X = x_i, Y = y_j) = f(x_i, y_j)$$

وتتصف هذه الدالة بالخاصيتين التاليتين:

$$0 < f(x_i, y_i) < 1$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} f(x_i, y_j)$$

ويمكن من خلال دالة الاحتمال المشترك في المعادلة ① تكوين جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X وY، وحساب احتمالات حدوث قيم المتغيرين معاً، والتغاير بين المتغيرين، كما يمكن استنتاج الخصائص الإحصائية التالية:

- دوال الاحتمال الهامشية واستخدامها في حساب متوسط وتباين التوزيع الهامشي؛
- التغاير بين المتغيرين؛
- حساب معامل الارتباط البسيط بين المتغيرين؛
- دالة الاحتمال الشرطية، واستخدامها في حساب متوسط وتباين التوزيع الشرطي؛
- استنتاج دالة الانحدار من متوسط التوزيع الشرطي.

مثال 1:

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة بين عدد الأطفال في الأسرة التي بها ما بين طفل إلى ثلاث أطفال ($X : x = 1, 2, 3$)، وعدد الوحدات المستهلكة من حليب الأطفال الجاف من نوع معين كل أسبوعين ($Y : y = 0, 1, 2$) تأخذ الصورة التالية:

$$f(x, y) = \frac{y - 0,5x + 2}{18}, \quad x = 1, 2, 3 \quad y = 0, 1, 2$$

المطلوب:

كون جدول التوزيع الاحتمالي المشترك بين المتغيرين X وY، ثم أوجد الآتي:

أ- احتمال أن أسرة عدد أطفالها 2، واستهلاكها من الحليب وحدة واحدة أسبوعياً.

ب- كون دوال التوزيع الهامشية لكلا المتغيرين، ثم أحسب المتوسط والتباين لكل منها.

جـ- احسب معامل الارتباط بين عدد الأطفال وعدد الوحدات المستهلكة، وما هو مدلوله؟

د- كون التوزيع الاحتمالي الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة عند معلومية عدد الأطفال.

هـ- أحسب متوسط عدد الوحدات المستهلكة إذا علم أن عدد الأطفال في الأسرة طفلان؟

و- كون مصفوفة التباين والتغاير للمتغيرين.

الحل:

تكوين جدول التوزيع الاحتمالي المشترك بين المتغيرين X وY:

بالتعويض في معادلة الاحتمال المشترك: $f(x, y) = \frac{y - 0,5x + 2}{18}$ عند عدد الأطفال $x = 1, 2, 3$ وعدد الوحدات المستهلكة $y = 0, 1, 2$، نحصل على الاحتمالات التالية:

		عدد الوحدات المستهلكة y		
		0	1	2
عدد الأطفال x		$f(1, 0) = \frac{0-0,5(1)+2}{18} = \frac{1,5}{18}$	$f(1, 1) = \frac{1-0,5(1)+2}{18} = \frac{2,5}{18}$	$f(1, 2) = \frac{2-0,5(1)+2}{18} = \frac{3,5}{18}$
		$f(2, 0) = \frac{0-0,5(2)+2}{18} = \frac{1}{18}$	$f(2, 1) = \frac{1-0,5(2)+2}{18} = \frac{2}{18}$	$f(2, 2) = \frac{2-0,5(2)+2}{18} = \frac{3}{18}$
		$f(3, 0) = \frac{0-0,5(3)+2}{18} = \frac{0,5}{18}$	$f(3, 1) = \frac{1-0,5(3)+2}{18} = \frac{1,5}{18}$	$f(3, 2) = \frac{2-0,5(3)+2}{18} = \frac{2,5}{18}$

ومن ثم يمكن كتابة جدول التوزيع الاحتمالي المشترك على الشكل التالي:

		عدد الوحدات المستهلكة y			f(x)
		0	1	2	
عدد الأطفال x		$\frac{1,5}{18}$	$\frac{2,5}{18}$	$\frac{3,5}{18}$	$\frac{\mathbf{7,5}}{\mathbf{18}}$
		$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{18}}$
		$\frac{0,5}{18}$	$\frac{1,5}{18}$	$\frac{2,5}{18}$	$\frac{\mathbf{4,5}}{\mathbf{18}}$
f(y)		$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{18}}$	$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{18}}$	$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{18}}$	**1**

أ- احتمال أن أسرة عدد أطفالها 2، واستهلاكها من الحليب وحدة واحدة أسبوعياً هو:

$$Pr(X = 2, Y = 1) = f(2, 1) = \frac{1-0,5(2)+2}{18} = \frac{2}{18} \approx 0,11$$

أي أن حوالي 11% من الأسر عدد أطفالها 2 وحدد وحدات استهلاكها من الحليب وحدة واحدة.

ب- تكوين دوال التوزيع الهامشية لكلا المتغيرين، وحساب المتوسط والتباين لكل منها:

- دالة الاحتمال الهامشية لعدد الأطفال، أي للمتغير الأول x تحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$Pr(X = x) = f(x) = \sum_{y}^{c} f(x, y)$$

وبالتطبيق:

$$Pr(X = x) = f(x) = \sum_{y}^{c} f(x, y) = \sum_{y=0}^{2} \frac{y - 0{,}5x + 2}{18}$$

$$Pr(X = x) = f(x) = \sum_{y}^{c} f(x, y) = \frac{0 - 0{,}5x + 2}{18} + \frac{1 - 0{,}5x + 2}{18} + \frac{2 - 0{,}5x + 2}{18}$$

$$Pr(X = x) = f(x) = \sum_{y}^{c} f(x, y) = \frac{9 - 0{,}5x}{18}, \quad x = 0, 1, 2$$

- دالة الاحتمال الهامشية لعدد الوحدات المستهلكة من الحليب، أي للمتغير الأول y تحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$Pr(Y = y) = f(y) = \sum_{x}^{r} f(x, y)$$

وبالتطبيق:

$$Pr(Y = y) = f(y) = \sum_{x}^{r} f(x, y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{y - 0{,}5x + 2}{18}$$

$$Pr(Y = y) = f(y) = \sum_{x}^{r} f(x, y) = \frac{y - 0{,}5(1) + 2}{18} + \frac{y - 0{,}5(2) + 2}{18} + \frac{y - 0{,}5(3) + 2}{18}$$

$$Pr(Y = y) = f(y) = \sum_{x}^{r} f(x, y) = \frac{3y + 3}{18}, \quad y = 1, 2, 3$$

ولحساب المتوسط والتباين للمتغيرين تستخدم دوال التوزيع الهامشية: $f(x) = \sum_{y}^{c} f(x,y)$ و $f(y) = \sum_{x}^{r} f(x,y)$، حيث يتم تطبيق المعادلات التالية:

	عدد الأطفال في الأسرة x	**عدد الوحدات المستهلكة y**
المتوسط μ	$\mu_x = \sum_{x}^{r} xf(x)$	$\mu_y = \sum_{y}^{c} yf(y)$
التباين σ^2	$\sigma_x^2 = \sum_{x}^{r} x^2 f(x) - \mu_x^2$	$\sigma_y^2 = \sum_{y}^{c} y^2 f(y) - \mu_y^2$

كما يمكن أيضاً اشتقاق التوزيعين الهامشيين من جدول التوزيع الاحتمالي المشترك، وتطبيق معادلتي المتوسط والتباين كما يلي:

$f(x) = \frac{9-0,5x}{18}$					$f(y) = \frac{3y+3}{18}$			
x	f(x)	xf(x)	$x^2f(x)$		y	f(y)	yf(y)	$y^2f(y)$
1	$\frac{7,5}{18}$	$\frac{7,5}{18}$	$\frac{7,5}{18}$		0	$\frac{3}{18}$	0	0
2	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{24}{18}$		1	$\frac{6}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{6}{18}$
3	$\frac{4,5}{18}$	$\frac{13,5}{18}$	$\frac{40,5}{18}$		2	$\frac{9}{18}$	$\frac{18}{18}$	$\frac{36}{18}$
Total	1	$\frac{33}{18}$	$\frac{72}{18}$		Total	1	$\frac{24}{18}$	$\frac{42}{18}$

وبتطبيق معادلتي المتوسط والتباين، نجد:

	عدد الأطفال في الأسرة x	عدد الوحدات المستهلكة y
المتوسط μ	$\mu_x = \frac{33}{18} \approx 1,83$	$\mu_y = \frac{24}{18} \approx 1,33$
التباين σ^2	$\sigma_x^2 = \frac{33}{18} - (1,83)^2 \approx$ 0,6389	$\sigma_y^2 = \frac{42}{18} - (1,33)^2 \approx$ 0,5556

أي أن متوسط عدد الأطفال في الأسرة التي بها ثلاث أطفال تقريباً 1,83 طفلاً، بتباين 0,6383.

بينما وُجد أن متوسط عدد الوحدات المستهلكة للأسرة 1,33 علبة، بتباين 0,5556.

جـ- حساب معامل الارتباط بين عدد الأطفال وعدد الوحدات المستهلكة، مع تبيان مدلول معامل الارتباط:

يبين معامل الارتباط نوع وقوة العلاقة بين متغيرين، ويُعرف معامل الارتباط بين المتغيرين X و Y كالتالي:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

حيث يُمثل σ_{xy} التغاير بين المتغيرين X و Y ويُحسب بالعلاقة التالية:

$$\sigma_{xy} = \sum_x^r \sum_y^c xy\, f(x,y) - \mu_x \mu_y$$

ويمكن حسابه من جدول التوزيع الاحتمالي المشترك كالتالي:

		عدد الوحدات المستهلكة y		
		0	1	2
عدد الأطفال x		$1 \times 0 \times \frac{1,5}{18} = 0$	$1 \times 1 \times \frac{2,5}{18} = \frac{2,5}{18}$	$1 \times 2 \times \frac{3,5}{18} = \frac{7}{18}$
		$2 \times 0 \times \frac{1}{18} = 0$	$2 \times 1 \times \frac{2}{18} = \frac{4}{18}$	$2 \times 2 \times \frac{3}{18} = \frac{12}{18}$
		$3 \times 0 \times \frac{0,5}{18} = 0$	$3 \times 1 \times \frac{1,5}{18} = \frac{4,5}{18}$	$3 \times 2 \times \frac{2,5}{18} = \frac{15}{18}$

- **حساب المجموع** $\sum_{x}^{r}\sum_{y}^{c} xy\, f(x,y)$

وعليه، فإن المجموع:

$$\sum_{x}^{r}\sum_{y}^{c} xy\, f(x,y) = [(0 + \frac{2,5}{18} + \frac{7}{18}) + (0 + \frac{4}{18} + \frac{12}{18}) + (0 + \frac{4,5}{18} + \frac{15}{18})] = \frac{45}{18} = 2,5$$

وتكون قيمة التغاير:

$$\sigma_{xy} = \sum_{x}^{r}\sum_{y}^{c} xy\, f(x,y) - \mu_x\mu_y$$

$$\sigma_{xy} = 2,5 - (1,83)(1,33) = 0,0661$$

الانحراف المعياري لعدد الأطفال x:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0,6389} \approx 0,7993$$

الانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة y:

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{0,5556} \approx 0,7454$$

وبالتالي، فقيمة معامل الارتباط بين عدد الأطفال وعدد الوحدات المستهلكة:

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{0,0661}{(0,7993)(0,7454)} \approx 0,1109$$

يوجد ارتباط طردي ضعيف بين عدد الأطفال في الأسرة وعدد الوحدات المستهلكة من الحليب الجاف.

د- تكوين التوزيع الاحتمالي الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة عند معلومية عدد الأطفال:

يعرف التوزيع الشرطي للمتغير، بأنه التوزيع الاحتمالي لأحد المتغيرين عند معلومية المتغير الآخر، ولحساب التوزيع الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة y إذا عُلم عدد الأطفال في الأسرة x نطبق المعادلة التالية:

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{y - 0,5x + 2}{18}}{\frac{9 - 1,5x}{18}} = \frac{y - 0,5x + 2}{9 - 1,5x}, \qquad y = 0, 1, 2$$

هـ- حساب متوسط عدد الوحدات المستهلكة y إذا علم أن عدد الأطفال x في الأسرة طفلان:

تطبق معادلة المتوسط الشرطي باتباع نفس الطريقة المتبعة في حالة الدوال الهامشية ولكن مع إحلال دالة الاحتمال الشرطي $f(y / x)$ مكان الدالة الهامشية $f(y)$ كما هو مبين بالمعادلة التالية:

$$\mu_{y/x} = \sum_{y}^{c} yf(y / x)$$

وبالتعويض، نجد:

$$\mu_{y/x} = \sum_{y}^{c} yf(y / x) = 0 \times f(0 / x) + 1 \times f(1 / x) + 2 \times f(2 / x)$$

$$\mu_{y/x} = 0 \times \frac{0 - 0,5x + 2}{9 - 1,5x} + 1 \times \frac{1 - 0,5x + 2}{9 - 1,5x} + 2 \times \frac{2 - 0,5x + 2}{9 - 1,5x}$$

$$\mu_{y/x} = \frac{11 - 1,5x}{9 - 1,5x}$$

أي أن متوسط عدد الوحدات المستهلكة $\mu_{y/x} = \frac{11 - 1,5x}{9 - 1,5x}$ يمثل دالة تابعة لعدد الأطفال x، ويمكن معرفة معدل التغيُّر في متوسط عدد الوحدات عند تغيُّر قيم x.

و- تكوين مصفوفة التباين والتغاير للمتغيرين:

تعرف مصفوفة التباين والتغاير بأنها مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي تمثل التباينات وعناصرها الأخرى تمثل التغايرات، وحيث أن لدينا متغيرين فقنط تكون هذه من الدرجة 2×2 ويعبر عنها كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6389 & 0,0661 \\ 0,0661 & 0,5556 \end{bmatrix}$$

وفيما يلي سلسلة تمارين الأعمال الموجهة في مقياس الإحصاء 03 لطلبة السنة الثانية ليسانس في العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير:

سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 01

المقياس : الإحصاء 03

التمرين الأول: نرمي قطعة نقود متزنة ذات الوجهين (H وT) ثلاث مرات.

1- مثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور H ثلاث مرات بجدول وبأعمدة بيانية.

2- أوجد التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور H ثلاث مرات.

التمرين الثاني:

لوحظ لفترة طويلة أن صياد يُصيب الهدف باحتمال 0,8، فإذا أطلق 5 طلقات على الهدف، فما هو احتمال:

1- إصابة الهدف مرتين فقط؟ **2-** إصابة مرة واحدة على الأكثر؟

3- إصابة الهدف ثلاث مرات على الأقل وأربع مرات على الأكثر؟

التمرين الثالث: من إنتاج صناعي معين، أخذنا 10 قطع لا على التعيين. إذا علمت بأن نسبة العطب في إنتاج المصنع 25%، فما هو احتمال أن يكون أكثر من قطعة واحدة من العينة العشوائية المسحوبة معطوبة؟

التمرين الرابع: فيما يلي توزيع 58 مؤسّسة زراعية حسب مدة استعمال الجرارات خلال السنة:

مدة الاستعمال	عدد المؤسسات
أقل من 50 يوم	؟
من 50 إلى أقل من 100 يوم	1
من 100 إلى أقل من 150 يوم	3
من 150 إلى أقل من 200 يوم	9
من 200 إلى أقل من 250 يوم	6
من 250 إلى أقل من 300 يوم	5
من 300 إلى أقل من 350 يوم	؟

نختار عينة متكونة من 5 مؤسسات، إذا علمت أن القيمة المتوسطة لمدة الاستعمال تساوي 200 يوم:

1- ما هو احتمال إيجاد 3 مؤسسات مدة الاستعمال فيها تفوق القيمة المتوسطة؟

2- ما هو احتمال إيجاد مؤسستين على الأقل مدة الاستعمال فيهما تفوق القيمة المتوسطة؟

التمرين الخامس : في مدرسة التسيير، الإعلام الآلي و التجارة **EGIC Ibn Rostom**:

1- تقدم لامتحان شهادة تقني سامي في الإعلام الآلي خمسة مرشحين بحيث أن التوقع الرياضي لعدد المرشحين الناجحين يساوي 1,5. ما هو احتمال فشل كل المرشحين؟

2- تقدم لامتحان شهادة تقني سامي في الإعلام الآلي m مرشح بحيث أن التوقع الرياضي لعدد المرشحين الناجحين يساوي 2,4 والتوقع الرياضي لعدد المرشحين الفاشلين يساوي 0,6. ما هو احتمال نجاح مرشحين على الأكثر في الامتحان؟

3- تقدم لامتحان شهادة عون عالي التأهيل في الإعلام الآلي n مرشح بحيث أن التوقع الرياضي لعدد المرشحين الناجحين يساوي 2,4 والتباين لعدد المرشحين الفاشلين يساوي 0,96.

ما هو احتمال فشل مرشحين على الأقل في الامتحان؟

4- تقدم لامتحان شهادة الكفاءة المهنية 5 مرشحين، التباين لعدد المرشحين الفاشلين يساوي 0,45.

ما هو احتمال نجاح كل المرشحين؟

حل سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 01:

التمرين الأول:

عند رمي قطعة النقود المتزنة ذات الوجهين (H و T) ثلاث مرات، يكون فضاء العينة كالآتي:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTT, TTH, THT, HHT\}$$

بالنظر إلى فضاء العينة Ω نجد أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور H ثلاث مرات هي: 0 و 1.

1- تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور H ثلاث مرات بجدول وبأعمدة بيانية.

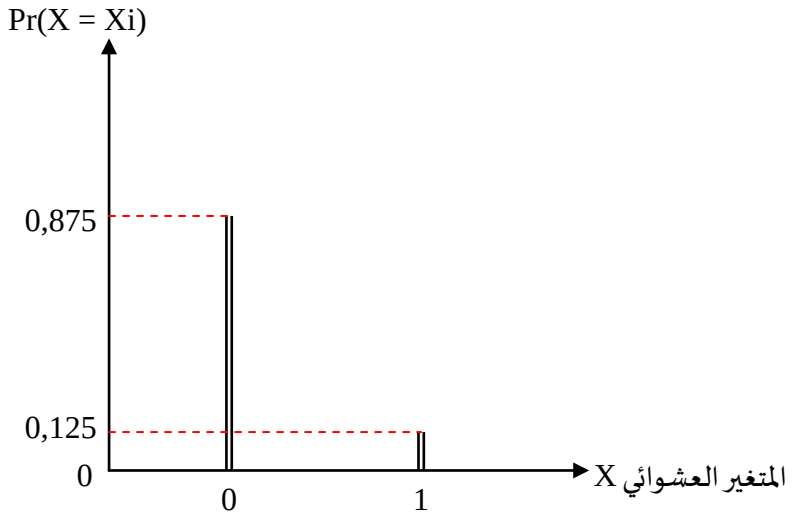
تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بجدول:

احتمال عدم ظهور H ثلاث مرات: $P(X = 0) = \frac{7}{8}$

احتمال ظهور H ثلاث مرات: $P(X = 1) = \frac{1}{8}$

X	0	1
Pr(X = Xi)	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{8} = 0,125$

تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بأعمدة بيانية:



2- إيجاد التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور H ثلاث مرات:

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي x:

xi	0	1	المجموع
Pi = Pr(x = xi)	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{8} = 0,125$	**1**
Pixi	0	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{8}}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i$$

$$\mathbf{E(X) = \frac{1}{8} = 0,125}$$

التباين للمتغير العشوائي X:

xi	0	1	المجموع
Pi = Pr(x = xi)	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{8} = 0,125$	**1**
$x_i - E(x)$	– 0,125	0,875	---
$[x_i - E(x)]^2$	0,015625	0,765625	----
$Pi\ [x_i - E(x)]^2$	0,01367188	0,09570313	**0,109375**

$$V(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i \left[X_i - E(X)\right]^2$$

$$\mathbf{V(X) = \sigma^2 = 0,109375}$$

كما يمكن حساب التباين للمتغير العشوائي X بطريقة أخرى كالتالي:

xi	0	1	المجموع
Pi = Pr(x = xi)	$\frac{7}{8} = 0,875$	$\frac{1}{8} = 0,125$	**1**
x_i^2	0	1	----
Pix_i^2	0	0,125	**0,125**

$$V(x) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - E^2(x) = 0,125 - (0,125)^2 = 0,125 - 0,015625$$

$$\mathbf{V(x) = \sigma^2 = 0,109375}$$

التمرين الثاني:

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد مرات إصابة الهدف؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(5\ ;\ 0{,}85)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_5^k (0{,}85)^k (0{,}15)^{5-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

1- احتمال إصابة الهدف مرتين فقط:

$$Pr(X = 2) = C_5^2 (0{,}85)^2 (0{,}15)^{5-2}$$

$$Pr(X = 2) = 10(0{,}7225)(0{,}003375)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X = 2) = 0{,}02438}}$$

2- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة على الأكثر:

$$Pr(x \leq 1) = Pr(x = 0) + Pr(x = 1)$$

$$= C_5^0 (0{,}85)^0 (0{,}15)^{5-0} + C_5^1 (0{,}85)^1 (0{,}15)^{5-1}$$

$$= (0{,}15)^5 + 5(0{,}85)\ (0{,}15)^4$$

$$= 0{,}000076 + 0{,}00215$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \leq 1) = 0{,}002226}}$$

3- احتمال إصابة الهدف ثلاث مرات على الأقل وأربع مرات على الأكثر:

$$Pr(4 \geq X \geq 3) = Pr(X = 3) + Pr(X = 4)$$

$$= C_5^3 (0{,}85)^3 (0{,}15)^{5-3} + C_5^4 (0{,}85)^4 (0{,}15)^{5-4}$$

$$= 10(0{,}614125)\ (0{,}0225) + 5(0{,}522)\ (0{,}15)$$

$$= 0{,}13818 + 0{,}3915$$

$$\mathbf{Pr(4 \geq X \geq 3) = 0{,}52968}$$

التمرين الثالث:

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد القطع المعطوبة؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(10\ ;\ 0{,}25)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_{10}^{k}(0,25)^{k}(0,75)^{10-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

- احتمال أن يكون أكثر من قطعة واحدة من العينة العشوائية المسحوبة معطوبة:

$$Pr(x > 1) = Pr(x = 2) + Pr(x = 3) + \ldots + Pr(x = 10)$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [Pr(X = 0) + Pr(X = 1)]$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [C_{10}^{0}(0,25)^{0}(0,75)^{10-0} + C_{10}^{1}(0,25)^{1}(0,75)^{10-1}]$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [(0,75)^{10} + 10(0,25)(0,75)^{9}]$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [0,0563 + 10(0,25)(0,075)]$$

$$Pr(x > 1) = 1 - (0,0563 + 0,1875)$$

$$Pr(x > 1) = 1 - 0,2438$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x > 1) = 0,7562}}$$

التمرين الرابع:

لنرمز بـ: A لعدد المؤسسات التي مدة استعمال الجرارات فيها أقل من 50 يوم؛

لنرمز بـ: B لعدد المؤسسات التي مدة استعمال الجرارات فيها أقل من 50 يوم.

عندئذٍ يصبح توزيع المؤسسات حسب مدة استعمال الجرارات كالآتي:

C_i الفئات		x_i مراكز الفئات	f_i التكرارات	$f_i x_i$
0	50	25	A	25A
50	100	75	1	75
100	150	125	3	375
150	200	175	9	1575
200	250	225	6	1350
250	300	275	5	1375
300	350	325	B	325B
المجموع		---	**A + B + 24**	**25A + 325B + 4750**

من هذا التوزيع التكراري، نجد:

$$A + B + 24 = 58$$

$$\Rightarrow \qquad A + B = 34 \text{ ---------- } ①$$

لدينا القيمة المتوسطة لمدة الاستعمال: $\overline{X}$ = 200 jours

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = 200$$

بالتعويض:
$$\frac{25A + 325B + 4750}{58} = 200$$

$$\Rightarrow \quad 25A + 325B = 6850 \text{ ---------- ②}$$

بحل جملة المعادلتين ① و②، نحصل على: $A = 14$ و$B = 20$

يمكن تشكيل التوزيع التكراري المتجمع النازل كالآتي:

التكرار المتجمع النازل	الحدود الدنيا للفئات	
58	أكثر من	0
44	أكثر من	50
43	أكثر من	100
40	أكثر من	150
31	أكثر من	200
25	أكثر من	250
20	أكثر من	300

ليكن x متغير عشوائي يُقترن بعدد المؤسسات التي مدة الاستعمال فيها تفوق القيمة المتوسطة؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(5 ; \frac{31}{58})$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_5^k (\frac{31}{58})^k (\frac{27}{58})^{5-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

1- احتمال إيجاد 3 مؤسسات مدة الاستعمال فيها تفوق القيمة المتوسطة:

$$Pr(x = 3) = C_5^3 (\frac{31}{58})^3 (\frac{27}{58})^{5-3}$$

$$Pr(x = 3) = 10(0,15270)(0,21669)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x = 3) = 0,33089}}$$

2- احتمال إيجاد مؤسستين على الأقل مدة الاستعمال فيهما تفوق القيمة المتوسطة:

$$Pr(x \geq 2) = Pr(x = 2) + Pr(x = 3) + Pr(x = 4) + Pr(x = 5)$$

$$Pr(x \geq 2) = 1 - [Pr(X = 0) + Pr(X = 1)]$$

$$Pr(x \geq 2) = 1 - [C_5^0(\frac{31}{58})^0(\frac{27}{58})^{5-0} + C_5^1(\frac{31}{58})^1(\frac{27}{58})^{5-1}]$$

$$Pr(x \geq 2) = 1 - [(\frac{27}{58})^5 + 5(\frac{31}{58})(\frac{27}{58})^4]$$

$$Pr(x \geq 2) = 1 - [(0,4655)^5 + 5(0,5345)(0,4655)^4]$$

$$Pr(x \geq 2) = 1 - [0,02186 + 5(0,5345)(0,0470)]$$

$$Pr(x \geq 2) = 1 - 0,1475$$

$$\boxed{\textbf{Pr } (x \geq 2) = \textbf{ 0,8525}}$$

التمرين الخامس:

1- احتمال فشل كل المرشحين:

ليكن x متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين الناجحين؛

ليكن y متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين الفاشلين.

هذين المتغيرين يخضعان لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$Pr(y = k) = C_n^k q^k p^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

لدينا: التوقع الرياضي لعدد المترشحين الناجحين: $E(x) = 1,5$

$\Leftrightarrow$ $np = 1,5$

بالتعويض: $5p = 1,5$

$\Rightarrow$ $p = 0,3$

لدينا: $p + q = 1$

بالتعويض: $0,3 + q = 1$

$\Rightarrow$ $q = 0,7$

ومنه، فإن احتمال فشل كل المرشحين:

$$Pr(x = 0) = C_5^0(0,3)^0(0,7)^{5-0}$$

$$Pr(y = 5) = C_5^5(0,7)^5(0,3)^{5-5}$$

$$Pr(x = 0) = Pr\ (y = 5) = (0,7)^5$$

$$\boxed{\textbf{Pr(x = 0) = Pr(y = 5) = 0,16807}}$$

2- احتمال نجاح مرشحين على الأكثر:

لدينا: التوقع الرياضي لعدد المترشحين الناجحين: $E(x) = 2,4$

$\Leftrightarrow \quad np = 2,4$

لدينا: التوقع الرياضي لعدد المترشحين الفاشلين: $E(y) = 0,6$

$\Leftrightarrow \quad nq = 0,6$

لدينا: $E(x) + E(y) = 2,4 + 0,6$

$\Leftrightarrow \quad np + nq = 3$

$\Leftrightarrow \quad n(p + q) = 3$

$\Leftrightarrow \quad n(1) = 3$

$n = 3$

لدينا: $E(x) = 2,4$

$\Leftrightarrow \quad np = 2,4$

بالتعويض: $3p = 2,4$

$\Rightarrow \quad p = 0,8$

لدينا: $p + q = 1$

بالتعويض: $0,8 + q = 1$

$\Rightarrow \quad q = 0,2$

ومنه، فإن احتمال نجاح مرشحين على الأكثر:

$$Pr(x \leq 2) = Pr(x = 0) + Pr(x = 1) + Pr(x = 2)$$

$$Pr(x \leq 2) = 1 - Pr\,(x = 3) = 1 - C_3^3(0,8)^3(0,2)^{3-3} = (0,8)^3$$

$$Pr(y \geq 1) = Pr(Y = 1) + Pr(Y = 2) + Pr(Y = 3)$$

$$Pr(y \geq 1) = 1 - Pr(Y = 0) = 1 - C_3^0(0,2)^0(0,8)^{3-0} = (0,8)^3$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x \leq 2) = Pr(y \geq 1) = 0,488}}$$

3- احتمال فشل مرشحين على الأقل:

لدينا: التوقع الرياضي لعدد المترشحين الناجحين: $E(x) = 2,4$

$\Leftrightarrow \quad np = 2,4$

لدينا: التباين لعدد المترشحين الفاشلين: $V(y) = 0,96$

$\Leftrightarrow \quad nqp = 0,96$

بالتعويض: $2,4q = 0,96$

$\Rightarrow \quad q = 0,4$

لدينا: $p + q = 1$

بالتعويض: $p + 0,4 = 1$

$\Rightarrow \quad p = 0,6$

لدينا: $E(x) = 2,4$

$\Leftrightarrow \quad np = 2,4$

بالتعويض: $n(0,6) = 2,4$

$\Rightarrow \quad n = 4$

ومنه، فإن احتمال فشل مرشحين على الأقل:

$$Pr(y \geq 2) = Pr\,(y = 2) + Pr\,(y = 3) + Pr\,(y = 4)$$

$$Pr(y \geq 2) = 1 - [Pr\,(y = 0) + Pr\,(y = 1)]$$

$$Pr(y \geq 2) = 1 - [C_4^0(0,4)^0(0,6)^{4-0} + C_4^1(0,4)^1(0,6)^{4-1}]$$

$$Pr(y \geq 2) = 1 - [(0,6)^4 + 4(0,4)(0,6)^3]$$

$$Pr(y \geq 2) = 1 - [0,01296 + 0,3456]$$

$$Pr(x \leq 2) = Pr\,(X = 0) + Pr\,(X = 1) + Pr\,(X = 2)$$

$$Pr(x \leq 2) = 1 - [Pr\,(x = 3) + Pr\,(x = 4)]$$

$$Pr(x \leq 2) = 1 - [C_4^3(0,6)^3(0,4)^{4-3} + C_4^4(0,6)^4(0,4)^{4-4}]$$

$$Pr(x \leq 2) = 1 - [4(0,6)^3(0,4) + (0,6)^4]$$

$$Pr(x \leq 2) = 1 - [0,3456 + 0,01296]$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x \leq 2) = Pr(y \geq 2) = 0,5248}}$$

4- احتمال نجاح كل المترشحين:

لدينا: التباين لعدد المترشحين الفاشلين: $V(y) = 0,45$

$\Leftrightarrow \quad nqp = 0,45$

بالتعويض: $5pq = 0,96$

$\Leftrightarrow \quad 5p(1 - p) = 0,45$

$$p - p^2 = 0,09$$

$$p^2 - p + 0,09 = 0$$

$$p^2 - 2(0,5)p + 0,25 - 0,25 + 0,09 = 0$$

$(p - 0,5)^2 - (0,4)^2 = 0$

$(p - 0,5 - 0,4)\ (p - 0,5 + 0,4) = 0$

$(p - 0,9)\ (p - 0,1) = 0$

إما: $p = 0,9$ و: $q = 0,1$

احتمال نجاح كل المترشحين:

$$Pr(x = 5) = C_5^5 (0,9)^5 (0,1)^{5-5}$$

$$Pr(y = 0) = C_5^0 (0,1)^0 (0,9)^{5-0}$$

$$Pr(x = 5) = Pr\ (y = 0) = (0,9)^5$$

Pr(x = 0) = Pr(y = 5) = 0,59049

أو: $p = 0,1$ و: $q = 0,9$

احتمال نجاح كل المترشحين:

$$Pr(x = 5) = C_5^5 (0,1)^5 (0,9)^{5-5}$$

$$Pr(y = 0) = C_5^0 (0,9)^0 (0,1)^{5-0}$$

$$Pr(x = 5) = Pr(y = 0) = (0,1)^5$$

Pr(x = 0) = Pr(y = 5) = 0,00001

التمرين الأول:

ظهر دواء جديد لمعالجة الزكام. معدل نجاحه 80%، أعطي هذا الدواء لـ: 15 مريضاً بالزكام.

1- ما احتمال شفاء 12 منهم؟ **2-** ما احتمال شفاء 13 منهم على الأكثر؟

التمرين الثاني:

ليكن العدد المتوسط للمكالمات الهاتفية الصادرة من شخص x بين 10,00 سا و 11,00 سا هو 1,8 في الدقيقة.

ماهو احتمال أن تكون بين 10,53 سا و 10,54 سا:

1- ولا مكالمة؟ **2-** مكالمتين؟ **3-** على الأقل مكالمتين؟

أعطي: $e^{-1,8} = 0,16529$

التمرين الثالث:

أ- مركب يتألف من 1000 آلة تعمل بشكل مستقل. إذا كان احتمال توقف آلة في أي لحظة زمنية، خلال الفترة الزمنية t، يساوي 0,002. فأوجد احتمال تعطل ثلاث آلات خلال هذه الفترة الزمنية.

ب- كتاب يتألف من 500 صفحة، يحتوي على 300 خطأ مطبعي.

1- ما هو احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأين فقط؟

2- ما هو احتمال أن تحتوي صفحة معينة على أكثر من خطأ واحد؟

أعطي: $e^{-2} = 0,1354$ $e^{-0,6} = 0,549$

التمرين الرابع:

نفترض أن دخول الأسر تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 16000 دينار وبانحراف معياري قدره 2000 دينار.

- ما هو احتمال أن يكون دخل أسرة اختيرت عشوائياً:

1- بين 15000 دينار و 18000 دينار؟ **2-** أقل من 15000 دينار ؟ **3-** أعلى من 18000 دينار ؟

التمرين الخامس:

ليكن x متغير عشوائي طبيعي بحيث: $Pr(x > 5) = 0,6915$ $Pr(x > 8) = 0,1587$

- أوجد احتمال أن يكون x محصور بين 4 و 7.

التمرين السادس:

ليكن X متغير عشوائي طبيعي بحيث: $Pr(x > 49) = 0,5$

1- أوجد التوقع الرياضي m.

2- أوجد الانحراف المعياري σ إذا كان: $Pr(x < 60) = 0,9861$

3- أحسب $Pr(60 > x > 40)$.

حل سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 02:

التمرين الأول:

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد المرضى المشفينمن الزكام؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(15\ ;\ 0{,}8)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_{10}^{k}(0{,}8)^{k}(0{,}2)^{10-k} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ 15$$

1- احتمال شفاء 12 مرض من الزكام:

$$Pr(x = 12) = C_{15}^{12}(0{,}8)^{12}(0{,}2)^{15-12}$$

$$Pr(x = 2) = 455(0{,}06872)(0{,}008)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x = 12) = 0{,}250}}$$

2- احتمال شفاء 13 مرض على الأكثر من الزكام:

$$Pr(x \leq 13) = Pr\,(x = 0) + Pr\,(x = 1) + \ldots + Pr\,(x = 13)$$

$$Pr(x \leq 13) = 1 - [Pr\,(x = 14) + Pr\,(x = 15)]$$

$$Pr(x \leq 13) = 1 - [C_{15}^{14}(0{,}8)^{14}(0{,}2)^{15-14} + C_{15}^{15}(0{,}8)^{15}(0{,}2)^{15-15}]$$

$$Pr(x \leq 13) = 1 - [15(0{,}04398)(0{,}2) + 0{,}035184]$$

$$Pr(x \leq 13) = 1 - 0{,}167124$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x \leq 13) = 0{,}832876}}$$

التمرين الثاني:

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد المكالمات التي تلقاها المركز الهاتفي في الدقيقة؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = 1{,}8$، فإن:

$$Pr(x = k) = e^{-1{,}8}\frac{(1{,}8)^{k}}{k!} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots..$$

1- احتمال أن تكون بين 10,53 سا و 10,54 سا ولا مكالمة:

$$Pr(X = 0) = e^{-1,8}\frac{(1,8)^0}{0!} = e^{-1,8}$$

Pr(X = 0) = 0,16529

2- احتمال أن تكون بين 10,53 سا و 10,54 سا مكالمتين:

$$Pr(X = 2) = e^{-1,8}\frac{(1,8)^2}{2!} = 0,16529\frac{3,24}{2}$$

Pr(X = 2) = 0,2678

3- احتمال أن تكون بين 10,53 سا و 10,54 سا على الأقل مكالمتين:

$$Pr(X \geq 2) = Pr\,(X = 2) + Pr\,(X = 3) + Pr\,(X = 4) + \ldots.$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [Pr\,(X = 0) + Pr\,(X = 1)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-1,8}\frac{(1,8)^0}{0!} + e^{-1,8}\frac{(1,8)^1}{1!}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-1,8} + 1,8e^{-1,8}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [0,16529 + 1,8(0,16529)]$$

Pr(X ≥ 2) = 0,5370

<u>التمرين الثالث:</u>

أ- ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد الآلات المتعطلة خلال الفترة الزمنية t؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال.

حيث أن: $n = 1000 > 30$ كبيرة و$p = 0,002$ صغيرة و$np = 1000(0,002) = 2 < 5$؛ فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 1000$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 2$، فإن:

$$Pr(x = k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 1000$$

1- احتمال تعطل ثلاث آلات خلال هذه الفترة الزمنية:

$$Pr(x = 3) = e^{-1,8}\frac{2^3}{3!} = 0,1354\frac{8}{6}$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x = 3) = 0,1805}}$$

ب- ليكن x متغير عشوائي يُقترن بعدد الأخطاء الموجودة في الكتاب؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال.

حيث أن: $n = 300 > 30$ كبيرة و $p = \frac{1}{500} = 0,002$ صغيرة و $np = 300(0,002) = 0,6 < 5$؛

فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 300$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 0,6$، فإن:

$$Pr(x = k) = e^{-0,6}\frac{(0,6)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 300$$

1- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأين فقط:

$$Pr(x = 2) = e^{-0,6}\frac{(0,6)^2}{2!} = 0,549\frac{0,36}{2}$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x = 3) = 0,1805}}$$

2- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على أكثر من خطأ واحد:

$$Pr(x > 1) = Pr\,(x = 2) + Pr\,(x = 3) + Pr\,(x = 4) + \ldots.$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [Pr\,(x = 0) + Pr\,(x = 1)]$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [e^{-0,6}\frac{(0,6)^0}{0!} + e^{-0,6}\frac{(0,6)^1}{1!}]$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [e^{-0,6} + 0,6e^{-0,6}]$$

$$Pr(x > 1) = 1 - [0,549 + 0,6(0,549)]$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x > 1) = 0,1216}}$$

التمرين الرابع:

ليكن x متغير عشوائي يُقترن بدخول الأسر؛ هذا المتغير يخضع للتوزيع الطبيعي $N(16000\ ;\ 2000)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

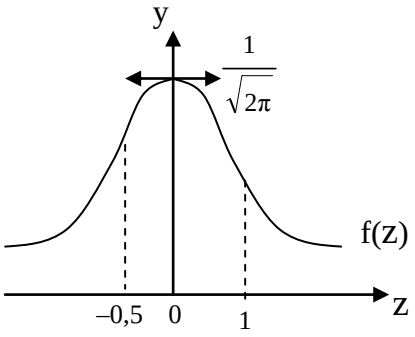
$$Pr(b > x > a) = \int_a^b \frac{1}{2000\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-16000}{2000})^2} dx$$

1- احتمال أن يكون دخل الأسرة المختارة بين 15000 دينار و 18000 دينار:

$$Pr(18000 > x > 15000) = \int_{15000}^{18000} \frac{1}{2000\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-16000}{2000})^2} dx$$

$$Pr(18000 > x > 15000) = \int_{\frac{18000-16000}{2000}}^{\frac{18000-16000}{2000}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(18000 > x > 15000) = \int_{-0,5}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(18000 > x > 15000) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \int_{-\infty}^{-0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(18000 > x > 15000) = \Phi(1) - \int_{0,5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(18000 > x > 15000) = \Phi(1) - [1 - \int_{-\infty}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\ ]$$

$$Pr(18000 > x > 15000) = \Phi(1) - 1 + \Phi(0,5)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$، نجد:

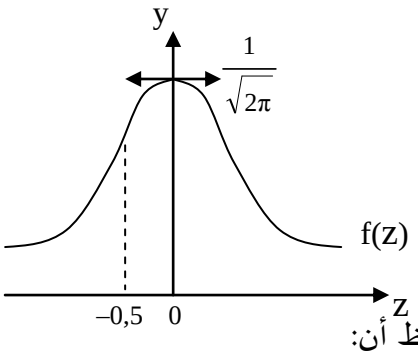
$$Pr(18000 > x > 15000) = 0,8413 - 1 + 0,6915$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(18000 > x > 15000) = 0,5328}}$$

2- احتمال أن يكون دخل الأسرة المختارة أقل من 15000 دينار:

$$Pr(x < 15000) = \int_{-\infty}^{15000} \frac{1}{2000\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-16000}{2000})^2} dx$$

$$Pr(x < 15000) = \int_{-\infty}^{\frac{15000-16000}{2000}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-\infty}^{-0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(x < 15000) = \int_{0,5}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 - \int_{-\infty}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

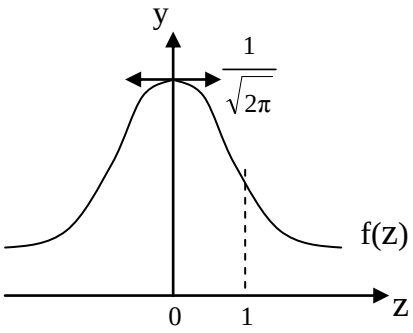
$$Pr(x < 15000) = 1 - \Phi(0,5) = 1 - 0,6915$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x < 15000) = 0,3085}}$$

3- احتمال أن يكون دخل الأسرة المختارة أعلى من 18000 دينار:

$$Pr(x > 18000) = \int_{18000}^{+\infty} \frac{1}{2000\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-16000}{2000})^2} dx$$

$$Pr(x > 18000) = \int_{\frac{18000-16000}{2000}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(x > 18000) = 1 - \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(x > 18000) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x > 18000) = 0{,}1587}}$$

التمرين الخامس:

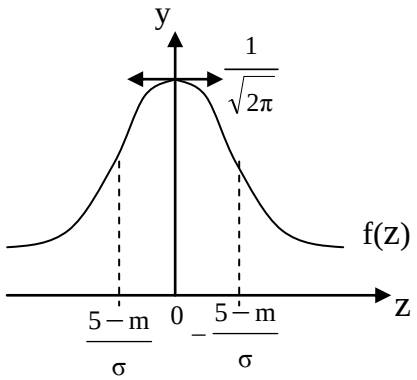
حيث x متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي $N(m ; \sigma)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(b > x > a) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx$$

لدينا: $Pr(x > 5) = 0{,}6915$

$$\Leftrightarrow \int_{5}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0{,}6915$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{5-m}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}6915$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$\int_{-\infty}^{-\frac{5-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,6915$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi(-\frac{5-m}{\sigma}) = 0,6915$$

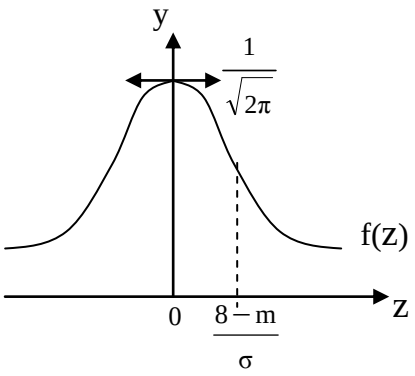
وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$، نجد:

$$-\frac{5-m}{\sigma} = 0,5 \Rightarrow -5 + m = 0,5\sigma \text{ -------①}$$

ولدينا: $Pr(x > 8) = 0,1587$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{8}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0,1587$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\frac{8-m}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,1587$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$1 - \int_{-\infty}^{\frac{8-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,1587$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \Phi(\frac{8-m}{\sigma}) = 0,1587$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{5-m}{\sigma}) = 0,8413$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$، نجد:

$$\frac{8-m}{\sigma} = 1 \Rightarrow 8 - m = \sigma \text{ ---------②}$$

من ① و② نحصل على جملة المعادلتين:

$$-5 + m = 0{,}5\sigma \text{ -------①}$$

$$8 - m = \sigma \text{ ----------②}$$

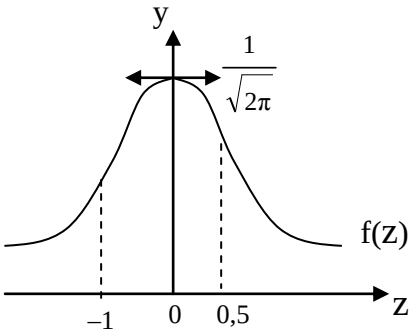
بحل جملة المعادلتين، نحصل على: $m = 6$ و$\sigma = 2$.

- احتمال أن يكون x محصور بين 4 و7:

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{4}^{7} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-6}{2})^2} dx$$

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{\frac{4-6}{2}}^{\frac{7-6}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{-1}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{-\infty}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(7 > x > 4) = \Phi(0{,}5) - \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(7 > x > 4) = \Phi(0{,}5) - [1 - \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz\,]$$

$$Pr(7 > x > 4) = \Phi(0{,}5) - 1 + \Phi(1)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$، نجد:

$$Pr(7 > x > 4) = 0{,}6915 - 1 + 0{,}8413$$

$$\mathbf{Pr(7 > x > 4) = 0,5328}$$

التمرين السادس:

1- إيجاد التوقع الرياضي m للمتغير العشوائي x:

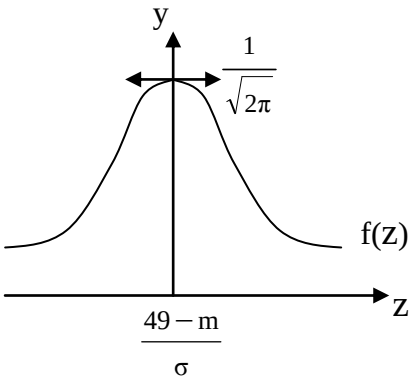
حيث x متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي $N(m\ ;\ \sigma)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(b > x > a) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx$$

لدينا: $Pr(x > 49) = 0,5$

$$\Leftrightarrow \int_{49}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0,5$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{49-m}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,5$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$\frac{49-m}{\sigma} = 0 \Rightarrow 49 - m = 0$$

$$\mathbf{m = 49}$$

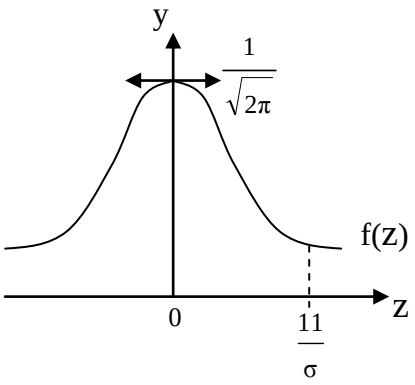
2- إيجاد الانحراف المعياري σ للمتغير العشوائي x:

لدينا: $Pr(x < 60) = 0,9861$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{60} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0,9861$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\frac{60-49}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}9861$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\frac{11}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}9861$$



$$\Leftrightarrow \quad \Phi(\frac{11}{\sigma}) = 0{,}9861$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$، نجد:

$$\frac{11}{\sigma} = 2{,}2$$

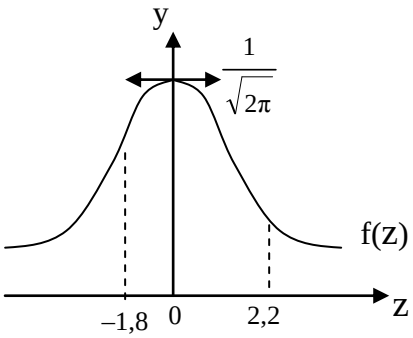
$$\boxed{\sigma = 5}$$

3- حساب احتمال أن يكون x محصور بين 40 و60:

$$Pr(60 > x > 40) = \int_{40}^{60} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-49}{2})^2} dx$$

$$Pr(60 > x > 40) = \int_{\frac{40-49}{5}}^{\frac{60-49}{5}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(60 > x > 40) = \int_{-1{,}8}^{2{,}2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(60 > x > 40) = \int_{-\infty}^{2,2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \int_{-\infty}^{-1,8} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(60 > x > 40) = \Phi(2,2) - \int_{1,8}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(60 > x > 40) = \Phi(2,2) - [1 - \int_{-\infty}^{1,8} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz]$$

$$Pr(60 > x > 40) = \Phi(2,2) - 1 + \Phi(1,8)$$

وبالبحث في جدول التوزيع الطبيعي $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$، نجد:

$$Pr(60 > x > 40) = 0,9861 - 1 + 0,9641$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(60 > x > 40) = 0,9502}}$$

سلسلة تمارين الأعمال الموجهة 02

المقياس : الإحصاء 03

<u>التمرين السابع</u>: في إحدى مسابقات توظيف الأساتذة المساعدين في إحدى الجامعات خلال فترة زمنية معينة كانت لدينا المعلومات التالية:

أ- تقدم للتوظيف في شعبة العلوم الاقتصادية n مترشح بحيث:

- التباين لعدد المترشحين المقبولين في هذه الشعبة يساوي 0,84.
- احتمال قبول مترشح واحد في المسابقة في هذه الشعبة يساوي 0,4116.
- احتمال رفض كل المترشحين في المسابقة في هذه الشعبة يساوي 0,2401.

ما هو احتمال قبول ثلاثة مترشحين على الأكثر في المسابقة في شعبة العلوم الاقتصادية؟

ب- تقدم للتوظيف في شعبة العلوم التجارية m مترشح بحيث:

- احتمال قبول $m-1$ مترشح في المسابقة في هذه الشعبة يساوي 0,0064.
- احتمال قبول $m-2$ مترشح في المسابقة في هذه الشعبة يساوي 0,0512.
- التوقع الرياضي لعدد المترشحين المرفوضين في هذه الشعبة يساوي 4.

ما هو احتمال رفض مترشح واحد على الأقل في المسابقة في شعبة العلوم التجارية؟

جـ- تقدم للتوظيف في شعبة علوم التسيير r مترشح بحيث:

- احتمال قبول كل المترشحين في المسابقة في هذه الشعبة يساوي 0,064.
- التوقع الرياضي لعدد المترشحين المرفوضين في هذه الشعبة يساوي 1,8.

أوجد التباين لعدد المترشحين المقبولين في شعبة علوم التسيير.

د- تقدم للتوظيف في شعبة علوم المالية والمحاسبة s مترشح بحيث:

- احتمال قبول مترشح واحد على الأقل في المسابقة في هذه الشعبة يساوي 0,992.
- التوقع الرياضي لعدد المترشحين المرفوضين في هذه الشعبة يساوي 0,6.

1- ما هو احتمال قبول مترشحين على الأكثر في المسابقة في شعبة علوم المالية والمحاسبة؟

2- ما هو احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم المالية والمحاسبة؟

هـ- تقدم للتوظيف في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمِّية g مترشح بحيث:

- احتمال قبول مترشح واحد يساوي احتمال رفض كل المترشحين في المسابقة في هذه الشعبة.
- التباين لعدد المترشحين المرفوضين في هذه الشعبة يساوي 0,64.
- ما هو احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمِّية؟

<u>ملاحظة :</u> عدد المترشحين في هذه المسابقة في جميع الشعب يخضع لتوزيع بينوميال -Binomiale-.

EGIC EGIC EGIC EGIC EGIC

التمرين السابع:

أ- احتمال قبول ثلاثة مترشحين على الأكثر في المسابقة في شعبة العلوم الاقتصادية:

ليكن x متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين المقبولين؛

ليكن y متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين المرفوضين.

هذين المتغيرين يخضعان لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$Pr(y = k) = C_n^k q^k p^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

لدينا التباين لعدد المترشحين المقبولين: $V(x) = 0,84$

$$\Leftrightarrow \quad npq = 0,84 \text{ ----------①}$$

لدينا احتمال قبول مترشح واحد في المسابقة: $Pr\ (x = 1) = 0,4116$

$$\Leftrightarrow \quad C_n^1 p^1 q^{n-1} = 0,4116$$

$$\Leftrightarrow \quad np\frac{q^n}{q} = 0,4116 \text{ ----------②}$$

لدينا احتمال رفض كل المترشحين في المسابقة: $Pr\ (y = n) = 0,2401$

$$\Leftrightarrow \quad C_n^n q^n p^{n-n} = 0,2401$$

$$\Leftrightarrow \quad q^n = 0,2401$$

بالتعويض في المعادلة ②، نحصل على:

$$np\frac{0,2401}{q} = 0,4116$$

$$\Rightarrow \quad np = \frac{0,4116}{0,2401}q$$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$\frac{0,4116}{0,2401}q^2 = 0,84$$

$$\Rightarrow \quad q^2 = \frac{(0,84)(0,2401)}{0,4116}$$

$$q^2 = 0,49$$

ومنه، فإن: $q = 0,7$ و: $p = 0,3$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$n(0,3)(0,7) = 0,84$$

$$\Rightarrow \quad n = 4$$

ومنه، فإن احتمال قبول ثلاثة مترشحين على الأكثر في المسابقة في شعبة العلوم الاقتصادية:

$$Pr(x \leq 3) = Pr(x = 0) + Pr(x = 1) + Pr(x = 2) + Pr(x = 3)$$

$$Pr(x \leq 3) = 1 - Pr\,(x = 4) = 1 - C_4^4(0,3)^4(0,7)^{4-4} = (0,3)^4$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(x \leq 3) = 0,0081}}$$

ب- احتمال رفض مترشح واحد على الأقل في المسابقة في شعبة العلوم التجارية:

- احتمال قبول $m - 2$ مترشح في المسابقة في هذه الشعبة يساوي 0,0512.
- التوقع الرياضي لعدد المترشحين المرفوضين في هذه الشعبة يساوي 4.

لدينا احتمال قبول $m - 1$ مترشح في المسابقة: $Pr\,(x = m - 1) = 0,0064$

$$\Leftrightarrow \quad C_m^{m-1}p^{m-1}q^{m-m+1} = 0,0064$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m!}{(m-m+1)!(m-1)!}p^{m-1}q = 0,0064$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m(m-1)!}{1!(m-1)!}p^{m-1}q = 0,0064$$

$$\Leftrightarrow \quad mp^m\frac{q}{p} = 0,0064 \text{ ----------①}$$

لدينا احتمال قبول $m - 2$ مترشح في المسابقة: $Pr\,(x = m - 2) = 0,0512$

$$\Leftrightarrow \quad C_m^{m-2}p^{m-2}q^{m-m+2} = 0,0512$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m!}{(m-m+2)!(m-2)!}p^{m-2}q^2 = 0,0512$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m(m-1)(m-2)!}{2!(m-2)!}p^{m-2}q^2 = 0,0512$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m(m-1)}{2}p^m\frac{q^2}{p^2} = 0,0512 \text{ ----------②}$$

بقسمة طرفي المعادلة ② على ①، نحصل على:

$$\frac{\frac{m(m-1)}{2}p^m\frac{q^2}{p^2}}{mp^m\frac{q}{p}} = \frac{0,0512}{0,0064}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m-1}{2}\frac{q}{p} = 8 \text{ ----------③}$$

لدينا التوقع الرياضي لعدد المترشحين المرفوضين: $E(y) = 4$

$$\Leftrightarrow \quad mq = 4$$

$$\Rightarrow \quad q = \frac{4}{m}$$

$$p = 1 - \frac{4}{m} = \frac{m-4}{m}$$

بالتعويض في المعادلة ③، نحصل على:

$$\frac{m-1}{2}\frac{\frac{4}{m}}{\frac{m-4}{m}} = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4m-4}{2m-8} = 8$$

$$\Rightarrow \quad 4m - 4 = 16m - 64$$

$$\Leftrightarrow \quad 60 = 12m \quad \Rightarrow \quad m = 5$$

ومنه، فإن: $q = \frac{4}{m}$

بالتعويض: $q = \frac{4}{5} = 0,8$

$$p = 0,2$$

وعليه، فإن احتمال رفض مترشح واحد على الأقل في المسابقة في شعبة العلوم التجارية:

$$Pr(y \geq 1) = Pr(y = 1) + Pr(y = 2) + Pr(y = 3) + Pr(y = 4) + Pr(y = 5)$$

$$Pr(y \geq 1) = 1 - Pr\,(y = 0) = 1 - C_5^0(0,8)^0(0,2)^{4-0} = 1 - (0,2)^4 = 1 - (0,0016)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(Y \geq 1) = 0,9984}}$$

ج- التباين لعدد المترشحين المقبولين في شعبة علوم التسيير:

لدينا احتمال قبول كل المترشحين في المسابقة: $Pr\,(x = n) = 0,064$

$$\Leftrightarrow \quad C_r^r p^r q^{r-r} = 0,064$$

$$\Leftrightarrow \quad p^r = 0,064 \text{ ----------①}$$

لدينا التوقع الرياضي لعدد المترشحين المرفوضين: $E(y) = 1,8$

$$\Leftrightarrow \quad rq = 1,8$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{1,8}{q} \text{ ----------②}$$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$p^{\frac{1,8}{q}} = 0,064$$

$$\Leftrightarrow \quad p^{\frac{1,8}{q}} = (0,4)^3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1,8}{q} \text{Ln } p = 3\text{Ln } (0,4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Ln } p}{1-p} = \frac{3}{1,8}\text{Ln } (0,4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Ln } p}{1-p} = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{1,8}{3}}\text{Ln } (0,4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Ln } p}{1-p} = \frac{\text{Ln } (0,4)}{0,6}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Ln } p}{1-p} = \frac{\text{Ln } (0,4)}{1-0,4}$$

ومنه، فإن: $p = 0,4$ و: $q = 0,6$

بالتعويض في المعادلة ②، نحصل على:

$$r = \frac{1,8}{0,6} = 3$$

وعليه، فإن التباين لعدد المترشحين المقبولين في شعبة علوم التسيير:

$$V(x) = rpq = 3(0,4)(0,6)$$

$$\mathbf{V(x) = 0,72}$$

د- 1- احتمال قبول مترشحين على الأكثر في المسابقة في شعبة علوم المالية والمحاسبة:

لدينا احتمال قبول مترشح واحد على الأقل في المسابقة: $Pr(X \geq 1) = 0,992$

$\Leftrightarrow \quad 1 - Pr(x = 0) = 0,992$

$\Leftrightarrow \quad 1 - C_s^0 p^0 q^{s-0} = 0,992$

$\Leftrightarrow \quad 1 - q^s = 0,992$

$\Rightarrow \quad q^s = 1 - 0,992$

$\Leftrightarrow \quad q^s = 0,008$ ----------①

لدينا التوقع الرياضي لعدد المترشحين المرفوضين: $E(y) = 0,6$

$\Leftrightarrow \quad sq = 0,6$

$\Rightarrow \quad s = \frac{0,6}{q}$ ----------②

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$q^{\frac{0,6}{q}} = 0,008$$

$\Leftrightarrow \quad q^{\frac{0,6}{q}} = (0,2)^3$

$\Leftrightarrow \quad \frac{0,6}{q} \text{Ln } q = 3\text{Ln } (0,2)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{0,6}{q} \text{Ln } q = 3\text{Ln } (0,4)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Ln } q}{q} = \frac{3}{0,6} \text{Ln } (0,2)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Ln } q}{q} = \frac{\frac{3}{3}}{\frac{0,6}{3}} \text{Ln } (0,2)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Ln } q}{q} = \frac{\text{Ln } (0,2)}{0,2}$

ومنه، فإن: $q = 0,2$ و: $p = 0,8$

بالتعويض في المعادلة ②، نحصل على:

$$s = \frac{0,6}{0,2} = 3$$

وعليه، فإن احتمال قبول مترشحين على الأكثر في المسابقة في شعبة علوم المالية والمحاسبة:

$$Pr(X \leq 2) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) + Pr(X = 2)$$

$$Pr(X \leq 2) = 1 - Pr\,(X = 3) = 1 - C_3^3 (0,8)^3 (0,2)^{3-3} = 1 - (0,8)^3 = 1 - (0,512)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \leq 2) = 0,488}}$$

د- 2- احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم المالية والمحاسبة:

$$Pr(Y \geq 2) = Pr(Y = 2) + Pr(Y = 3)$$

$$Pr(Y \geq 2) = C_3^2 (0,2)^2 (0,8)^{3-2} + C_3^3 (0,2)^3 (0,8)^{3-3}$$

$$Pr(Y \geq 2) = 3(0,04)(0,8) + (0,2)^3 = 0,096 + 0,008$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(Y \geq 2) = 0,104}}$$

هـ- احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية:

لدينا التباين لعدد المترشحين المرفوضين: $V(Y) = 0,64$

$$\Leftrightarrow \quad gpq = 0,64 \text{ ----------①}$$

لدينا احتمال قبول مترشح واحد يساوي احتمال رفض كل المترشحين في المسابقة:

$$Pr\,(X = 1) = Pr\,(Y = n)$$

$$\Leftrightarrow \quad C_g^1 p^1 q^{g-1} = C_g^g q^g p^{g-g}$$

$$\Leftrightarrow \quad gp\frac{q^g}{q} = q^g$$

$$\Rightarrow \quad \frac{gp}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \quad gp = q$$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$qq = 0,64$$

$$\Leftrightarrow \quad q^2 = 0,64$$

ومنه، فإن: $q = 0,8$ و: $p = 0,2$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$g(0,2)(0,8) = 0,64$$

$$\Rightarrow \quad g = 4$$

وعليه، فإن احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية:

$$Pr(Y \geq 2) = Pr(Y = 2) + Pr(Y = 3) + Pr(Y = 4)$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [Pr\ (y = 0) + Pr(Y = 1)]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [\ C_4^0(0,8)^0(0,2)^{4-0} + C_4^1(0,8)^1(0,2)^{4-1}]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [(0,2)^4 + 4(0,8)(0,2)^3] = 1 - [(0,0016) + 4(0,8)(0,008)]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [0,0016 + 0,0256] = 1 - 0,0272$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(Y \geq 2) = 0,9728}}$$

وفيما يلي امتحانات السداسي الأول في مقياس الإحصاء 03 لطلبة السنة الثانية ليسانس في العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير:

الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

جامعة ابن خلدون - تيارت

2ème Année LMD

2024 - 2023

كلّية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

-o- امتحان السداسي الثاني في مقياس الإحصاء 03 -o-

للسنة الثانية ليسانس علوم التسيير

مدة الامتحان: ساعة ونصف

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية ولا يسمح باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري

التمرين الأول:

أ- في إحدى مسابقات توظيف الأساتذة المساعدين في إحدى الجامعات خلال فترة زمنية معينة تقدم في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية n مترشح بحيث:

- احتمال قبول مترشح واحد يساوي احتمال رفض كل المترشحين في المسابقة في هذه الشعبة.

- التباين لعدد المترشحين المرفوضين في هذه الشعبة يساوي 0,64.

1- ما هو احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية؟

2- باستخدام طريقة واحدة فقط، أثبت أنه في توزيع بينوميال يكون التباين: $V(X) = npq$، حيث p وq يمثلان على التوالي: احتمال الإصابة واحتمال عدم الإصابة.

ملاحظة : عدد المترشحين في هذه المسابقة في هذه الشعبة يخضع لتوزيع بينوميال -Binomiale-.

ب- من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يخضع لتوزيع بينوميال استخرجنا ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\left[X_i - E(X)\right]^2 = 0,32 \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i X_i^2 = 2,88$$

مثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بجدول وبأعمدة بيانية.

التمرين الثاني:

ليكن X متغير عشوائي طبيعي بحيث: $Pr\,(X < 9) = 0,6915$ و$Pr\,(X > 4) = 0,9772$

- أوجد احتمال أن يكون X محصور بين 4 و 9.

أعطى من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,1915 \qquad \int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,4772$$

التمرين الثالث:

أ- مركب يتألف من 2500 آلة تعمل بشكل مستقل. إذا كان احتمال توقف آلة في أي لحظة زمنية، خلال الفترة الزمنية t، يساوي 0,0015. فأوجد احتمال تعطل آلتين على الأكثر خلال هذه الفترة الزمنية.

ب- كتاب يتألف من 800 صفحة، يحتوي على 400 خطأ مطبعي.

1- ما هو احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأين على الأقل؟

2- ما هو احتمال أن تحتوي صفحة معينة على أكثر من خطأين؟

أعطي: $e^{-3,75} = 0,02351775$ $\qquad e^{-0,5} = 0,60653066$

بالتوفيق

التمرين الأول:

أ- 1- احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية:

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين المقبولين؛

ليكن Y متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين المرفوضين.

هذين المتغيرين يخضعان لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_n^k\, p^k q^{n-k} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

$$Pr(y = k) = C_n^k\, q^k p^{n-k} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

لدينا التباين لعدد المترشحين المرفوضين: $V(Y) = 0{,}64$

$$\Leftrightarrow \qquad npq = 0{,}64 \text{ ----------①}$$

لدينا احتمال قبول مترشح واحد يساوي احتمال رفض كل المترشحين في المسابقة:

$$Pr\,(X = 1) = Pr\,(Y = n)$$

$$\Leftrightarrow \qquad C_n^1\, p^1 q^{n-1} = C_n^n\, q^n p^{n-n}$$

$$\Leftrightarrow \qquad np\,\frac{q^n}{q} = q^n$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{np}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad np = q$$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$qq = 0{,}64$$

$$\Leftrightarrow \qquad q^2 = 0{,}64$$

ومنه، فإن: $q = 0{,}8$ و: $p = 0{,}2$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$n(0{,}2)(0{,}8) = 0{,}64$$

$$\Rightarrow \qquad n = 4$$

وعليه، فإن احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية:

$$Pr(Y \geq 2) = Pr(Y = 2) + Pr(Y = 3) + Pr(Y = 4)$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [Pr\,(y = 0) + Pr(Y = 1)]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [\,C_4^0(0,8)^0(0,2)^{4-0} + C_4^1(0,8)^1(0,2)^{4-1}]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [(0,2)^4 + 4(0,8)(0,2)^3] = 1 - [(0,0016) + 4(0,8)(0,008)]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [0,0016 + 0,0256] = 1 - 0,0272$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(Y \geq 2) = 0,9728}}$$

أ- 2- إثبات أنه في توزيع بينوميال يكون التباين: $V(X) = npq$، حيث p و q يمثلان على التوالي: احتمال الإصابة واحتمال عدم الإصابة:

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التوقع الرياضي لـ: $k(k-1)$ يُعرف كما يلي:

$$E[k(k-1)] \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k(k-1)$$

=

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\, k(k-1) = \sum_{k=o}^{n} \frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n} \frac{k(k-1)n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!} p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^k q^{n-k} \text{ ---------①}$$

نضع: $y = k - 2$

$$\Rightarrow \quad k = y + 2$$

بالتعويض في المعادلة ①، فنحصل على:

$$E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2-y)!(2+y-2)!} p^{y+2} q^{n-2-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=o}^{n-2} \frac{(n-2)!}{[(n-2)-y]!y!} p^y q^{(n-2)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} C_{n-2}^{y} p^y q^{(n-2)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2(1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2 - k) = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2) - E(k) = n^2p^2 - np^2$$

بما أنه في قانون بينوميال يكون: $E(K) = np$، فإن:

$$E(k^2) - np = n^2p^2 - np^2$$

$$\Rightarrow \quad E(k^2) = np + n^2p^2 - np^2$$

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التباين له يُعرف كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

بالتعويض:

$$V(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$V(X) = np - np^2$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\mathbf{V(X) = npq}$$

ويمكن إيجاد التباين بطريقة أخرى كالنالي:

لدينا: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n$

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ: p مرتين، فنحصل على:

المشتق الأول: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k p^{k-1} q^{n-k} = n(p+q)^{n-1}$

المشتق الثاني: $= n(n-1)(p+q)^{n-2}$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1) p^{k-2} q^{n-k}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة في: p^2، فنحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1)p^k q^{n-k} = np^2(n-1)(p+q)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} k(k-1) = np^2(n-1)(1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k(k-1) = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)(k^2-k) = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k^2 - \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2) - E(k) = n^2p^2 - np^2$$

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التباين له يُعرف كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

بالتعويض:

$$V(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$V(X) = np - np^2$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\mathbf{V(X) = npq}$$

ب- المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بجدول وبأعمدة بيانية:

المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \left[X_i - E(X)\right]^2 = 0{,}32$$

$$\Leftrightarrow \quad V(X) = 0{,}32 \text{ ----------①}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X^2) - E^2(X) = 0{,}32$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} P_i X_i^2 - E^2(X) = 0,32$$

بالتعويض، نحصل على:

$$2,88 - E^2(X) = 0,32$$

$$\Rightarrow \quad E^2(X) = 2,56$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = 1,6$$

$$np = 1,6 \text{ ----------②}$$

من المعادلة ①، لدينا: $V(X) = 0,32$

$$\Leftrightarrow \quad npq = 0,32$$

بالتعويض بقيمة المعادلة ②، نحصل على:

$$1,6q = 0,32$$

$$\Rightarrow \quad q = 0,2 \quad ; \quad p = 0,8$$

من المعادلة ②، لدينا: $np = 1,6$

بالتعويض، نحصل على: $n(0,8) = 1,6$

$$\Rightarrow \quad n = 2$$

$$Pr(X = 0) = C_2^0 (0,8)^0 (0,2)^{2-0} = (0,2)^2 = 0,04$$

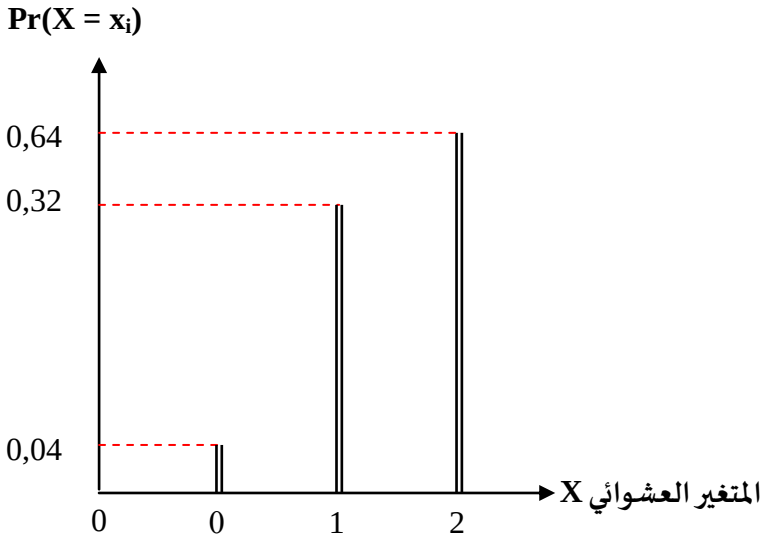
$$Pr(X = 1) = C_2^1 (0,8)^1 (0,2)^{2-1} = 2(0,8)(0,2) = 0,32$$

$$Pr(X = 2) = C_2^2 (0,8)^2 (0,2)^{2-2} = (0,8)^2 = 0,64$$

تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بجدول:

X	0	1	2
Pr(X = xi)	0,04	0,32	0,64

تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بأعمدة بيانية:



التمرين الثاني:

حيث X متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي $N(m\ ;\ \sigma)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

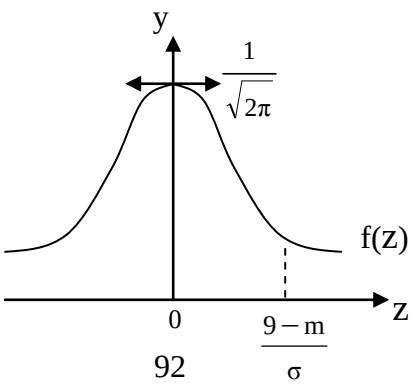
$$Pr(b > X > a) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx$$

لدينا: $Pr(X < 9) = 0{,}6915$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{9} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0{,}6915$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\frac{9-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}6915$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{\frac{9-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}1915$$



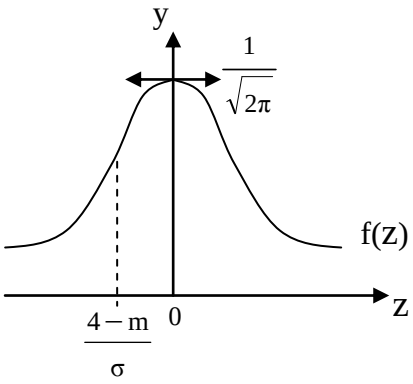
وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي، نجد:

$$\frac{9-m}{\sigma} = 0,5 \Rightarrow 9 - m = 0,5\sigma \text{ -------①}$$

ولدينا: $Pr(X > 4) = 0,9772$

$$\Leftrightarrow \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0,9772$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{4-m}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9772$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$\int_{-\infty}^{-\frac{4-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9772$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{-\frac{4-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,4772$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي، نجد:

$$-\frac{4-m}{\sigma} = 2 \Rightarrow -4 + m = 2\sigma \text{ -------②}$$

من ① و② نحصل على جملة المعادلتين:

$$9 - m = 0,5\sigma \text{ ----------①}$$

$$-4 + m = 2\sigma \text{ ----------②}$$

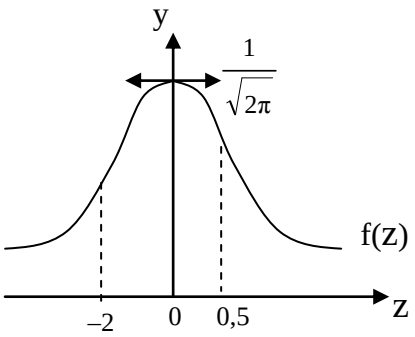
بحل جملة المعادلتين، نحصل على: $m = 8$ و$\sigma = 2$.

- احتمال أن يكون X محصور بين 4 و7:

$$Pr(9 > X > 4) = \int_{4}^{9} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-8}{2})^2} dx$$

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{\frac{4-8}{2}}^{\frac{9-8}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{-2}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(9 > X > 4) = \int_{0}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(9 > X > 4) = \int_{0}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي، نجد:

$$Pr(9 > X > 4) = 0,1915 + 0,4772$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(9 > X > 4) = 0,6687}}$$

التمرين الثالث:

أ- ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد الآلات المتعطلة خلال الفترة الزمنية t؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال.

حيث أن: $n = 2500 > 30$ كبيرة و$p = 0,0015$ صغيرة و$np = 2500(0,0015) = 3,75 < 5$؛

فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots 2500$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 3,75$، فإن:

$$Pr(X = k) = e^{-3,75}\frac{(3,75)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots 2500$$

- احتمال تعطل آلتين على الأكثر خلال هذه الفترة الزمنية:

$$Pr(X \le 2) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) + Pr(X = 2)$$

$$Pr(X \le 2) = e^{-3,75}\frac{(3,75)^0}{0!} + e^{-3,75}\frac{(3,75)^1}{1!} + e^{-3,75}\frac{(3,75)^2}{2!}$$

$$Pr(X \le 2) = e^{-3,75} + e^{-3,75}(3,75) + e^{-3,75}(7,03125)$$

$$Pr(X \le 2) = (1 + 3,75 + 7,03125)e^{-3,75}$$

$$Pr(X \le 2) = (11,78125)(0,02351775)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \le 2) = 0,277068492}}$$

ب- ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد الأخطاء الموجودة في الكتاب؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال.

حيث أن: $n = 400 > 30$ كبيرة و $p = \frac{1}{800} = 0,00125$ صغيرة

و $p = 400(0,00125) = 0,5 < 5$؛ فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots 400$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 0,5$، فإن:

$$Pr(x = k) = e^{-0,5}\frac{(0,5)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 400$$

1- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأين على الأقل:

$$Pr(X \geq 2) = Pr\,(X = 2) + Pr\,(X = 3) + Pr\,(X = 4) + \ldots. Pr\,(X = 400)$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [Pr\,(X = 0) + Pr\,(X = 1)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5}\frac{(0,5)^0}{0!} + e^{-0,5}\frac{(0,5)^1}{1!}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5} + 0,5e^{-0,5}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [0,60653066 + 0,5(0,60653066)]$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \geq 2) = 0,09020401}}$$

2- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على أكثر من خطأين:

$$Pr(X > 2) = Pr\,(X = 3) + Pr\,(X = 4) + \ldots. Pr\,(X = 400)$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [Pr\,(X = 0) + Pr\,(X = 1) + Pr\,(X = 2)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5}\frac{(0,5)^0}{0!} + e^{-0,5}\frac{(0,5)^1}{1!} + e^{-0,5}\frac{(0,5)^2}{2!}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5} + 0,5e^{-0,5}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [0,60653066 + 0,5(0,60653066) + 0,125(0,60653066)]$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X > 2) = 0,01438168}}$$

الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

جامعة ابن خلدون - تيارت

2ème Année LMD

2024 - 2023

كلّية العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير

-o- **الامتحان الاستدراكي في مقياس الإحصاء** -o-

للسنة الثانية ليسانس علوم التسيير

مدة الامتحان: ساعة ونصف

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة العلمية ولا يسمح باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري

التمرين الأول:

أ- في إحدى مسابقات توظيف الأساتذة المساعدين في إحدى الجامعات خلال فترة زمنية معينة تقدم في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية n مترشح بحيث:

- احتمال قبول مترشح واحد يساوي التباين لعدد المترشحين المرفوضين في هذه الشعبة.

1- أوجد عدد المترشحين n الذين تقدموا للمسابقة في هذه الشعبة.

2- باستخدام طريقة واحدة فقط، أثبت أنه في توزيع بينوميال يكون التوقع الرياضي: $E(X) = np$

و التباين: $V(X) = npq$، حيث p وq يمثلان على التوالي: احتمال الإصابة واحتمال عدم الإصابة.

ملاحظة : عدد المترشحين في هذه المسابقة في هذه الشعبة يخضع لتوزيع بينوميال -Binomiale-.

ب- نرمي قطعة نقود متزنة ذات الوجهين (H وT) ثلاث مرات.

1- مثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور T ثلاث مرات بجدول وبأعمدة بيانية.

2- أوجد التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X الذي يُقترن بعدد ظهور T ثلاث مرات.

التمرين الثاني:

ليكن X متغير عشوائي طبيعي بحيث: $Pr(X < 50) = 0,8944$ و $Pr(X > 20) = 0,9938$

- أوجد احتمال أن يكون X محصور بين 30 و 80.

أعطى من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$\int_0^{1,25} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,3944 \qquad \int_0^{2,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,4938$$

التمرين الثالث:

فيما يلي توزيع 60 مؤسسة زراعية حسب مدة استعمال الجرارات خلال السنة:

مدة الاستعمال	عدد المؤسسات
أقل من 50 يوم	؟
من 50 إلى أقل من 100 يوم	12
من 100 إلى أقل من 150 يوم	6
من 150 إلى أقل من 200 يوم	8
من 200 إلى أقل من 250 يوم	2
من 250 إلى أقل من 300 يوم	20
من 300 إلى أقل من 350 يوم	؟

نختار عينة متكونة من 5 مؤسسات، إذا علمت أن القيمة المتوسطة لمدة الاستعمال تساوي 205 يوم:

1- ما هو احتمال إيجاد 4 مؤسسات مدة الاستعمال فيها تفوق القيمة المتوسطة؟

2- ما هو احتمال إيجاد مؤسسة واحدة على الأقل مدة الاستعمال فيهما تفوق القيمة المتوسطة؟

بالتوفيق

التمرين الأول:

أ- 1- احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية:

ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين المقبولين؛

ليكن Y متغير عشوائي يُقترن بعدد المترشحين المرفوضين.

هذين المتغيرين يخضعان لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$Pr(y = k) = C_n^k q^k p^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

لدينا التباين لعدد المترشحين المرفوضين: $V(Y) = 0,64$

$$\Leftrightarrow \qquad npq = 0,64 \text{ ----------①}$$

لدينا احتمال قبول مترشح واحد يساوي احتمال رفض كل المترشحين في المسابقة:

$$Pr\,(X = 1) = Pr\,(Y = n)$$

$$\Leftrightarrow \qquad C_n^1 p^1 q^{n-1} = C_n^n q^n p^{n-n}$$

$$\Leftrightarrow \qquad np\frac{q^n}{q} = q^n$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{np}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad np = q$$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$qq = 0,64$$

$$\Leftrightarrow \qquad q^2 = 0,64$$

ومنه، فإن: $q = 0,8$ و: $p = 0,2$

بالتعويض في المعادلة ①، نحصل على:

$$n(0,2)(0,8) = 0,64$$

$$\Rightarrow \qquad n = 4$$

وعليه، فإن احتمال رفض مترشحين على الأقل في المسابقة في شعبة علوم الاقتصاد الرياضي والأساليب الكمّية:

$$Pr(Y \geq 2) = Pr(Y = 2) + Pr(Y = 3) + Pr(Y = 4)$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [Pr\,(y = 0) + Pr(Y = 1)]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [\,C_4^0(0,8)^0(0,2)^{4-0} + C_4^1(0,8)^1(0,2)^{4-1}]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [(0,2)^4 + 4(0,8)(0,2)^3] = 1 - [(0,0016) + 4(0,8)(0,008)]$$

$$Pr(Y \geq 2) = 1 - [0,0016 + 0,0256] = 1 - 0,0272$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(Y \geq 2) = 0,9728}}$$

أ- 2- إثبات أنه في توزيع بينوميال يكون التباين: $V(X) = npq$، حيث p وq يمثلان على التوالي: احتمال الإصابة واحتمال عدم الإصابة:

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التوقع الرياضي لـ: $k(k-1)$ يُعرف كما يلي:

$$E[k(k-1)] \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k(k-1)$$

=

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\, k(k-1) = \sum_{k=o}^{n} \frac{k(k-1)n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n} \frac{k(k-1)n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!} p^k q^{n-k}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^k q^{n-k} \text{ ---------①}$$

نضع: $y = k - 2$

$$\Rightarrow \quad k = y + 2$$

بالتعويض في المعادلة ①، فنحصل على:

$$E[k(k-1)] = \sum_{k=o}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2-y)!(2+y-2)!} p^{y+2} q^{n-2-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=o}^{n-2} \frac{(n-2)!}{[(n-2)-y]!y!} p^y q^{(n-2)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} C_{n-2}^{y} p^y q^{(n-2)-y}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2(1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n(n-1)p^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E[k(k-1)] = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2 - k) = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2) - E(k) = n^2p^2 - np^2$$

بما أنه في قانون بينوميال يكون: $E(K) = np$، فإن:

$$E(k^2) - np = n^2p^2 - np^2$$

$$\Rightarrow \quad E(k^2) = np + n^2p^2 - np^2$$

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التباين له يُعرف كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

بالتعويض:

$$V(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$V(X) = np - np^2$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\mathbf{V(X) = npq}$$

ويمكن إيجاد التباين بطريقة أخرى كالنالي:

لدينا: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n$

نشتق طرفي المعادلة بالنسبة لـ: p مرتين، فنحصل على:

المشتق الأول: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k k p^{k-1} q^{n-k} = n(p+q)^{n-1}$

المشتق الثاني: $= n(n-1)(p+q)^{n-2}$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1) p^{k-2} q^{n-k}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة بالنسبة في: p^2، فنحصل على:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1)p^k q^{n-k} = np^2(n-1)(p+q)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} k(k-1) = np^2(n-1)(1)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k(k-1) = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)(k^2-k) = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k^2 - \sum_{k=0}^{n} Pr(X=k)k = n^2p^2 - np^2$$

$$\Leftrightarrow \quad E(k^2) - E(k) = n^2p^2 - np^2$$

بما أن قانون بينوميال من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة، فإن التباين له يُعرف كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

بالتعويض:

$$V(X) = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2$$

$$V(X) = np - np^2$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\mathbf{V(X) = npq}$$

ب- المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

- تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بجدول وبأعمدة بيانية:

المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع بينوميال $\beta(n\ ;\ p)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\left[X_i - E(X)\right]^2 = 0{,}32$$

$$\Leftrightarrow \quad V(X) = 0{,}32 \text{ ----------①}$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X^2) - E^2(X) = 0{,}32$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} P_i X_i^2 - E^2(X) = 0{,}32$$

بالتعويض، نحصل على:

$$2,88 - E^2(X) = 0,32$$

$$\Rightarrow \quad E^2(X) = 2,56$$

$$\Leftrightarrow \quad E(X) = 1,6$$

$$np = 1,6 \text{ ----------②}$$

من المعادلة ①، لدينا: $V(X) = 0,32$

$$\Leftrightarrow \quad npq = 0,32$$

بالتعويض بقيمة المعادلة ②، نحصل على:

$$1,6q = 0,32$$

$$\Rightarrow \quad q = 0,2 \quad ; \quad p = 0,8$$

من المعادلة ②، لدينا: $np = 1,6$

بالتعويض، نحصل على: $n(0,8) = 1,6$

$$\Rightarrow \quad n = 2$$

$$Pr(X = 0) = C_2^0(0,8)^0(0,2)^{2-0} = (0,2)^2 = 0,04$$

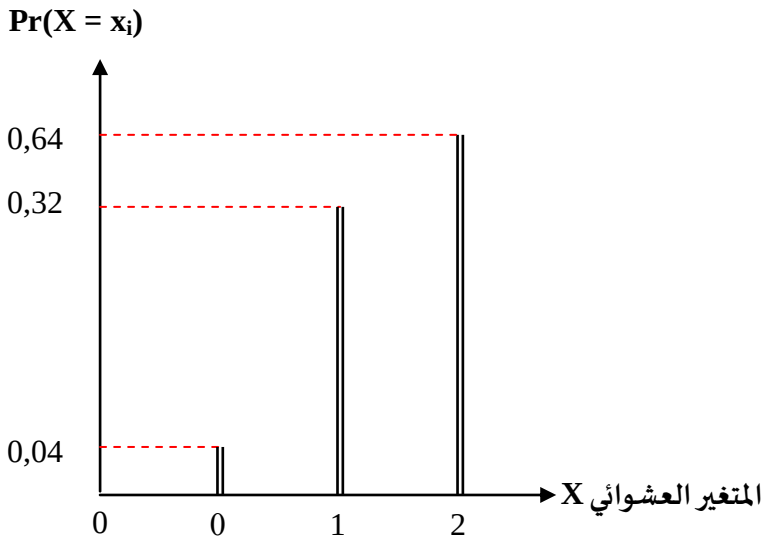
$$Pr(X = 1) = C_2^1(0,8)^1(0,2)^{2-1} = 2(0,8)(0,2) = 0,32$$

$$Pr(X = 2) = C_2^2(0,8)^2(0,2)^{2-2} = (0,8)^2 = 0,64$$

تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بجدول:

X	0	1	2
Pr(X = xi)	0,04	0,32	0,64

تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بأعمدة بيانية:



التمرين الثاني:

حيث X متغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي $N(m\ ;\ \sigma)$ الذي يُعرف احتماله كالآتي:

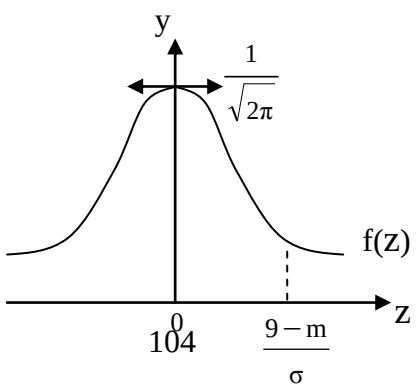
$$Pr(b > X > a) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx$$

لدينا: $Pr(X < 9) = 0{,}6915$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{9} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0{,}6915$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\frac{9-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}6915$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{\frac{9-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0{,}1915$$



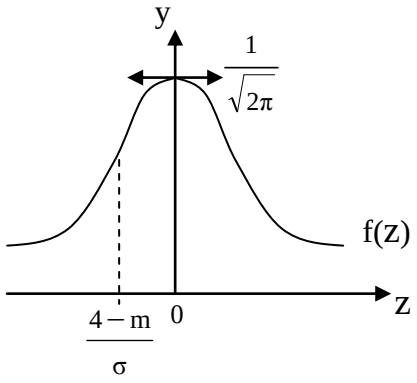
وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي، نجد:

$$\frac{9-m}{\sigma} = 0,5 \Rightarrow 9 - m = 0,5\sigma \text{ -------①}$$

ولدينا: $Pr(X > 4) = 0,9772$

$$\Leftrightarrow \int_{4}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} dx = 0,9772$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{4-m}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9772$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$\int_{-\infty}^{-\frac{4-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,9772$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{-\frac{4-m}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,4772$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي، نجد:

$$-\frac{4-m}{\sigma} = 2 \Rightarrow -4 + m = 2\sigma \text{ -------②}$$

من ① و② نحصل على جملة المعادلتين:

$$9 - m = 0,5\sigma \text{ ----------①}$$

$$-4 + m = 2\sigma \text{ ----------②}$$

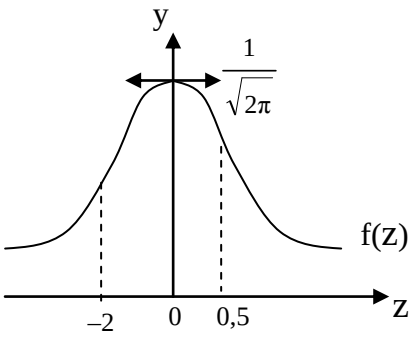
بحل جملة المعادلتين، نحصل على: $m = 8$ و$\sigma = 2$.

- احتمال أن يكون X محصور بين 4 و7:

$$Pr(9 > X > 4) = \int_{4}^{9} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-8}{2})^2} dx$$

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{\frac{4-8}{2}}^{\frac{9-8}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(7 > x > 4) = \int_{-2}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$



من هذا التمثيل البياني نلاحظ أن:

$$Pr(9 > X > 4) = \int_{0}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$Pr(9 > X > 4) = \int_{0}^{0,5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

وحسب معطيات جدول التوزيع الطبيعي، نجد:

$$Pr(9 > X > 4) = 0,1915 + 0,4772$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(9 > X > 4) = 0,6687}}$$

التمرين الثالث:

أ- ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد الآلات المتعطلة خلال الفترة الزمنية t؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال.

حيث أن: $n = 2500 > 30$ كبيرة و$p = 0,0015$ صغيرة و$np = 2500(0,0015) = 3,75 < 5$؛

فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots 2500$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 3,75$، فإن:

$$Pr(X = k) = e^{-3,75}\frac{(3,75)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots 2500$$

- احتمال تعطل آلتين على الأكثر خلال هذه الفترة الزمنية:

$$Pr(X \le 2) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) + Pr(X = 2)$$

$$Pr(X \le 2) = e^{-3,75}\frac{(3,75)^0}{0!} + e^{-3,75}\frac{(3,75)^1}{1!} + e^{-3,75}\frac{(3,75)^2}{2!}$$

$$Pr(X \le 2) = e^{-3,75} + e^{-3,75}(3,75) + e^{-3,75}(7,03125)$$

$$Pr(X \le 2) = (1 + 3,75 + 7,03125)e^{-3,75}$$

$$Pr(X \le 2) = (11,78125)(0,02351775)$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \le 2) = 0,277068492}}$$

ب- ليكن X متغير عشوائي يُقترن بعدد الأخطاء الموجودة في الكتاب؛ هذا المتغير يخضع لتوزيع بينوميال.

حيث أن: $n = 400 > 30$ كبيرة و $p = \frac{1}{800} = 0,00125$ صغيرة

و $p = 400(0,00125) = 0,5 < 5$؛ فسوف نستخدم توزيع بواسون الذي يُعرف احتماله كالآتي:

$$Pr(x = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \dots 400$$

وحيث أن متوسط هذا التوزيع: $\lambda = np = 0,5$، فإن:

$$Pr(x = k) = e^{-0,5}\frac{(0,5)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots 400$$

1- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على خطأين على الأقل:

$$Pr(X \geq 2) = Pr\,(X = 2) + Pr\,(X = 3) + Pr\,(X = 4) + \ldots. Pr\,(X = 400)$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [Pr\,(X = 0) + Pr\,(X = 1)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5}\frac{(0,5)^0}{0!} + e^{-0,5}\frac{(0,5)^1}{1!}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5} + 0,5e^{-0,5}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [0,60653066 + 0,5(0,60653066)]$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X \geq 2) = 0,09020401}}$$

2- احتمال أن تحتوي صفحة معينة على أكثر من خطأين:

$$Pr(X > 2) = Pr\,(X = 3) + Pr\,(X = 4) + \ldots. Pr\,(X = 400)$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [Pr\,(X = 0) + Pr\,(X = 1) + Pr\,(X = 2)]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5}\frac{(0,5)^0}{0!} + e^{-0,5}\frac{(0,5)^1}{1!} + e^{-0,5}\frac{(0,5)^2}{2!}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [e^{-0,5} + 0,5e^{-0,5}]$$

$$Pr(X \geq 2) = 1 - [0,60653066 + 0,5(0,60653066) + 0,125(0,60653066)]$$

$$\boxed{\mathbf{Pr(X > 2) = 0,01438168}}$$